- Sumadi
- Darno
- Agus Suharjana

Matematika

Sekolah Menengah Kejuruan (SMK)/Madrasah Aliyah Kejuruan (MAK)

Kelompok Teknologi, Kesehatan, dan Pertanian

PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

Sumadi, Darno, dan Agus Suharjana • Matematika Kelas XI • untuk Sekolah Menengah Kejuruan (SMK)/Madrasah Aliyah Kejuruan (MAK)

- Sumadi
- Darno
- Agus Suharjana

BUKU SEKOLAH bse ELEKTRONIK

Matematika

Sekolah Menengah Kejuruan (SMK)/Madrasah Aliyah Kejuruan (MAK)

Kelas XI

Kelompok Teknologi, Kesehatan, dan Pertanian

PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

Matematika Kelas XI

SMK/MAK Kelompok Teknologi, Kesehatan, dan Pertanian

Penulis	:	Sumadi
	:	Darno
	:	Agus Suharjana
Editor	:	Alnurrizki Muthfisari
	:	Hadi Karyanto
	:	Miyanto
Perancang Kulit	:	Sugiyanta
Layouter	:	Haryadi
	:	Isti Nur Chasanah
	:	Rini Suryani
	:	Titik Nur Hadiningsih
Ilustrator	:	Jumiyo
	:	Muhamad Yusuf
	:	P.C. Krisdiyanto
	:	Suryono
Ukuran Buku	:	21 × 29,7 cm

510.07
SUM SUMADI
m
Matematika: Sekolah Menengah Kejuruan (SMK)/Madrasah Aliyah Kejuruan (MAK) Kelas XI Kelompok Teknologi, Kesehatan, dan Pertanian/Sumadi, Darno, Agus Suharjana; editor Alnurrizki Muthfisari, Hadi Karyanto, Miyanto.-- Jakarta: Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional, 2008.
vi, 194 hlm.:ilus.; 29,7 cm.

Bibliografi : hlm. 194
Indeks. Hlm. 193
ISBN 979-462-966-9

1. Matematika-Studi dan Pengajaran I. Judul II. Darno
III. Suharjana, Agus IV. Muthfisari, Alnurrizki V. Karyanto, Hadi
VI. Miyanto

Diterbitkan oleh Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional
Tahun 2008

Diperbanyak oleh ...

Kata Sambutan

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT, berkat rahmat dan karunia-Nya, Pemerintah, dalam hal ini, Departemen Pendidikan Nasional, pada tahun 2008, telah membeli hak cipta buku teks pelajaran ini dari penulis/penerbit untuk disebarluaskan kepada masyarakat melalui situs internet (*website*) Jaringan Pendidikan Nasional.

Buku teks pelajaran ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan dan telah ditetapkan sebagai buku teks pelajaran yang memenuhi syarat kelayakan untuk digunakan dalam proses pembelajaran melalui Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 34 Tahun 2008.

Kami menyampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada para penulis/penerbit yang telah berkenan mengalihkan hak cipta karyanya kepada Departemen Pendidikan Nasional untuk digunakan secara luas oleh para siswa dan guru di seluruh Indonesia.

Buku-buku teks pelajaran yang telah dialihkan hak ciptanya kepada Departemen Pendidikan Nasional ini, dapat diunduh (*down load*), digandakan, dicetak, dialihmediakan, atau difotokopi oleh masyarakat. Namun, untuk penggandaan yang bersifat komersial harga penjualannya harus memenuhi ketentuan yang ditetapkan oleh Pemerintah. Diharapkan bahwa buku teks pelajaran ini akan lebih mudah diakses sehingga siswa dan guru di seluruh Indonesia maupun sekolah Indonesia yang berada di luar negeri dapat memanfaatkan sumber belajar ini.

Kami berharap, semua pihak dapat mendukung kebijakan ini. Kepada para siswa kami ucapkan selamat belajar dan manfaatkanlah buku ini sebaik-baiknya. Kami menyadari bahwa buku ini masih perlu ditingkatkan mutunya. Oleh karena itu, saran dan kritik sangat kami harapkan.

Jakarta, Juli 2008

Kepala Pusat Perbukuan

Kata Pengantar

Percayakah kalian bahwa matematika adalah ilmu universal? Matematika dapat digunakan dalam bidang teknologi, kesehatan, dan pertanian. Mari kita ambil contoh tentang penggunaan bahan bakar sebuah mesin traktor. Mesin traktor mempunyai bahan bakar 40 liter solar pada tangkinya. Jika pada setiap 3 km solar berkurang 0,125 liter, tentukan sisa bensin pada tangki jika traktor berjalan sejauh 60 km.

Penyelesaian:

$a = 0$; $b = 0{,}125$; $n = 60 : 3 = 20$

$$\begin{aligned} U_{20} &= a + 19 \cdot b \\ &= 0 + 19 \cdot 0{,}125 \\ &= 2{,}375 \\ S_{20} &= 10 + (a + U_{20}) \\ &= 10 + (0 + 2{,}375) \\ &= 12{,}375 \end{aligned}$$

Solar yang digunakan untuk menempuh jarak 60 km adalah 12,375 liter. Sisa solar = 40 – 12,375 = 27,625. Jadi, sisa solar 27,625 liter.

Teknik penyelesaian menggunakan matematika untuk bidang tertentu lainnya dapat kalian temui pada pernik aplikasi dalam buku ini. Masih terdapat berbagai pernik, antara lain trik, info, tugas mandiri, tugas kelompok, diskusi, kilas balik, intisari, dan perlu tahu. Setiap pernik akan membantu kalian belajar matematika dengan mudah dan menyenangkan. Oleh karena itu, buku **Matematika Kelompok Teknologi, Kesehatan, dan Pertanian Kelas XI** ini mudah kalian pelajari. Jadi, tunggu apa lagi? Buka dan pelajari.

Klaten, Juli 2008

Penulis

Daftar Isi

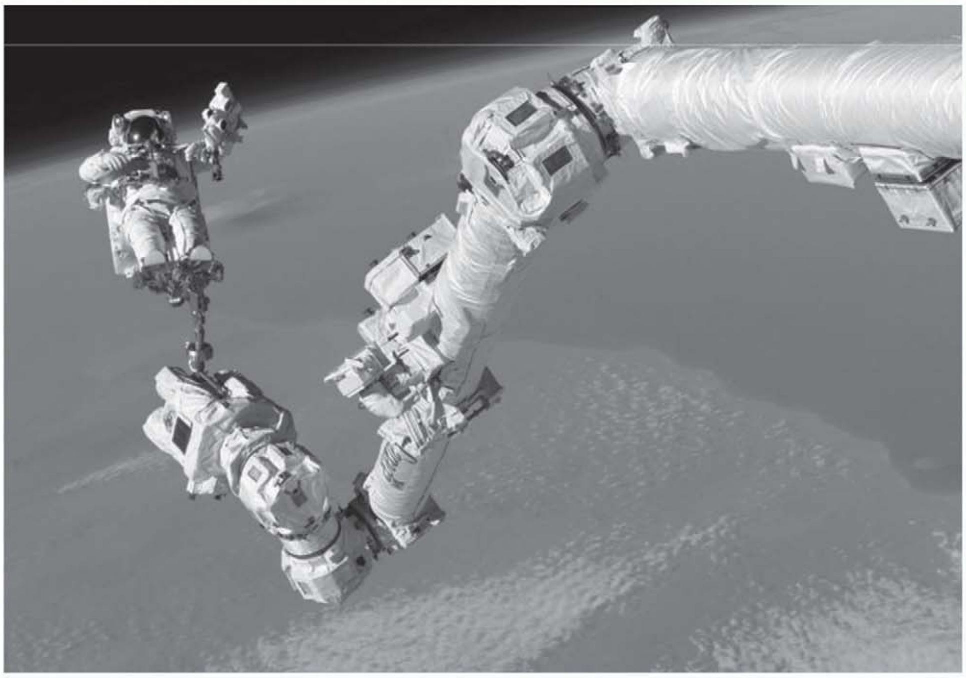
Bab IV Geometri Dimensi Dua

Bab V Geometri Dimensi Tiga

Bab VI Vektor

Bab I

Trigonometri



Sumber: *www.wikipedia.com*

Robot Besar Canadarm

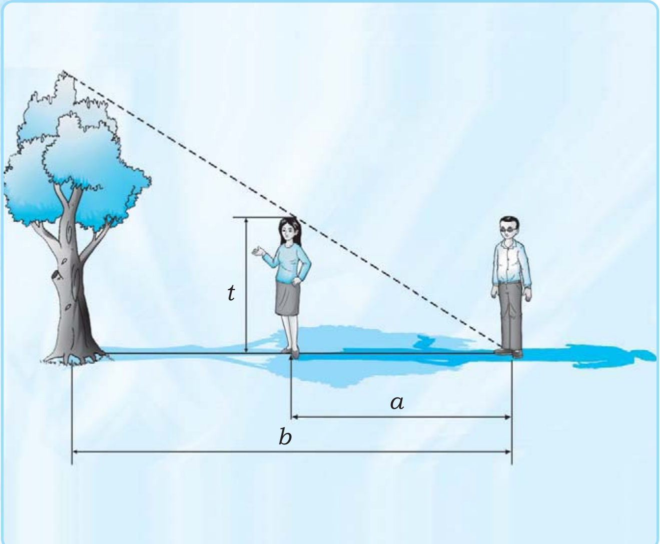
Segitiga siku-siku? Tentu istilah ini telah kalian kenal sejak kecil. Jenis segitiga ini memang pantas dipelajari sebab bangun datar ini memiliki banyak terapan.

Tahukah kalian apa segitiga siku-siku itu? Segitiga siku-siku adalah suatu bangun datar yang memiliki sisi sebanyak 3 buah dengan salah satu sudutnya 90°. Perbandingan sisi-sisi pada segitiga siku-siku oleh bangsa Mesir dan Babilonia dijadikan sebagai dasar ilmu selanjutnya, yaitu trigonometri. Trigonometri merupakan cabang ilmu Matematika yang melibatkan dua bidang teori penting, yaitu teori bilangan dan geometri. Secara geometris, ilmu trigonometri dikembangkan berdasarkan studi bintang-bintang.

Trigonometri memiliki banyak penerapan praktis, misalnya dalam teknik bangunan dan arsitektur, digunakan untuk mengukur rangka atap dan sudut elevasi pada sebuah kawat penyangga jembatan. Pada ilmu pelayaran trigonometri digunakan untuk menentukan posisi kapal ketika berada di laut lepas. Selain hal-hal yang bisa dihitung secara nyata, trigonometri dapat digunakan untuk menghitung sesuatu yang mustahil untuk dilakukan, seperti mencari jarak dari suatu tempat ke suatu bintang atau ke suatu pulau di lautan. Salah satu kegunaan trigonometri yang paling modern adalah menentukan posisi seorang astronaut ketika berada di luar angkasa seperti pada gambar di atas. Hal tersebut dilakukan dengan cara menghitung besar sudut yang dibentuk oleh lengan satelit terhadap posisi satelit ketika mengorbit. Pembahasan lebih lanjut mengenai trigonometri serta rumus-rumus yang berlaku di dalamnya akan kita pelajari pada bab berikut.

Kegiatan Belajar 1

Perbandingan Trigonometri

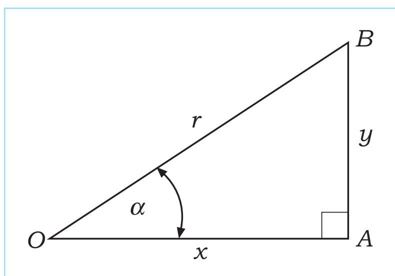


Bangun segitiga yang bermacam-macam ukurannya memiliki perbandingan trigonometri yang sama antara satu dengan yang lain. Perbandingan yang tetap ini dapat kita gunakan untuk mengukur tinggi sebuah pohon atau suatu bangunan yang belum kita ketahui. Ajaklah satu orang teman kalian untuk turut serta dalam uji coba ini. Cara yang digunakan adalah posisikan kalian, teman kalian, serta pohon atau bangunan yang akan dihitung tingginya dalam satu garis lurus. Dalam suatu bayangan, posisikan kalian dalam ujung bayangan benda yang diukur. Posisikan teman kalian sehingga ujung bayangannya berimpit dengan bayangan benda. Kemudian hitung masing-masing tinggi badan teman kalian (*t*), banyaknya langkah dari kalian ke teman kalian (*a*), dan banyaknya langkah dari posisi kalian ke pohon (*b*). Akhirnya, kita dapat menghitung tinggi pohon atau bangunan dengan rumus: $\frac{t \times b}{a}$.

Uraian Materi

A. Perbandingan Trigonometri

1. Perbandingan Trigonometri Suatu Sudut pada Segitiga Siku-Siku



x = sisi siku-siku samping sudut (proyeksi)

y = sisi siku-siku depan sudut (proyektor)

r = sisi miring (proyektum)

Perbandingan trigonometri untuk sudut α pada segitiga siku-siku OAB didefinisikan sebagai berikut.

a. sinus α $= \sin \alpha = \frac{y}{r}$

b. cosinus α $= \cos \alpha = \frac{x}{r}$

c. tangen α $= \tan \alpha = \frac{y}{x}$

d. cosecan α $= \csc \alpha = \frac{r}{y}$

e. secan α $= \sec \alpha = \frac{r}{x}$

f. cotangen α $= \cot \alpha = \frac{x}{y}$

Dari perbandingan di atas, kita memperoleh hubungan sebagai berikut.

$$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$
$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$
$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

Tugas Mandiri

Buktikan $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$. Caranya, lengkapilah isian berikut.

$\tan \alpha = \frac{y}{x}$

$= \frac{y : \ldots}{x : \ldots}$

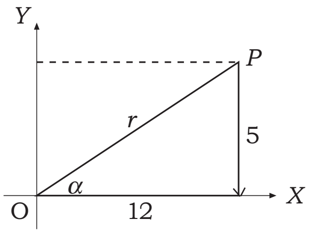
$= \frac{\ldots}{\ldots}$

(karena $y : r = \sin \alpha$, $x : r = \cos \alpha$)

Contoh:

Suatu garis OP dengan O (0,0) dan P (12,5) membentuk sudut α terhadap sumbu X positif. Tentukan perbandingan trigonometrinya!

Penyelesaian:



$r = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$

a. $\sin\alpha = \frac{5}{13}$

b. $\cos\alpha = \frac{12}{13}$

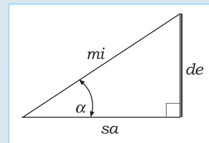
c. $\tan\alpha = \frac{5}{12}$

d. $\csc\alpha = \frac{13}{5}$

e. $\sec\alpha = \frac{13}{12}$

f. $\cot\alpha = \frac{12}{5}$

Trik



Keterangan:
de = sisi **de**pan
sa = sisi **sa**mping
mi = sisi **mi**ring

$\sin\alpha = \frac{de}{mi}$

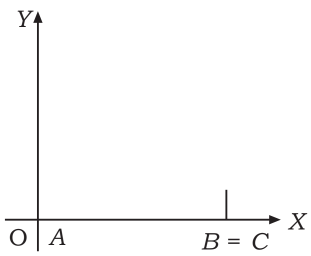
$\cos\alpha = \frac{sa}{mi}$

$\tan\alpha = \frac{de}{sa}$

2. Perbandingan Trigonometri Sudut Khusus

Sudut istimewa adalah sudut dengan nilai perbandingan trigonometri yang dapat ditentukan nilainya tanpa menggunakan tabel trigonometri atau kalkulator. Sudut-sudut istimewa antara lain: 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, dan seterusnya.

a. Sudut 0°



Jika sudut α = 0° maka sisi AC berimpit dengan sumbu X dan $AC = AB = 1$, $BC = 0$.

$\sin 0° = \frac{BC}{AC} = \frac{0}{1} = 0$

$\cos 0° = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{1} = 1$

$\tan 0° = \frac{BC}{AB} = \frac{0}{1} = 0$

b. Sudut 30° dan 60°

Jika $\angle ABC = 90°$ dan $\alpha_1 = 30°$ maka $\alpha_2 = 60°$.

Dengan perbandingan $AB : BC : AC = \sqrt{3} : 1 : 2$ diperoleh:

$\sin 30° = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$

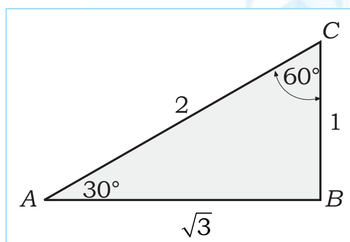
$\cos 30° = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\tan 30° = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$\sin 60° = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\cos 60° = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$

$\tan 60° = \frac{AB}{BC} = \sqrt{3}$



c. Sudut 45°

Jika $\angle ABC$ = 90° dan sudut α = 45° maka dengan memerhatikan gambar di samping diperoleh:

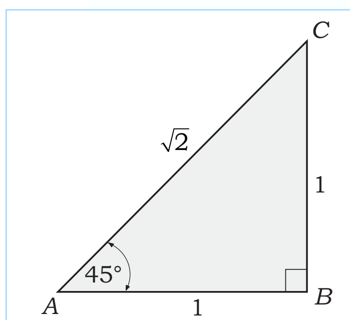
$AB = BC$ = sama panjang = 1; $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

Diperoleh:

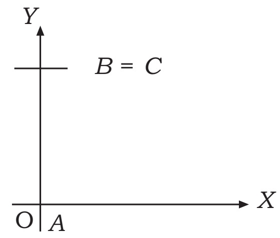
$\sin 45° = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\cos 45° = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\tan 45° = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{1} = 1$



d. Sudut 90°



Karena $\alpha = 90°$ maka AC berimpit sumbu Y.
Jadi $AC = AB = 1$ dan $BC = 0$.
Diperoleh:

$$\sin 90° = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cos 90° = \frac{BC}{AC} = \frac{0}{1} = 0$$

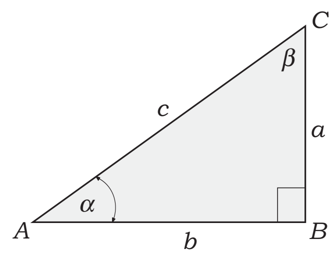
$$\tan 90° = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{0} = \text{tak terdefinisi}$$

Dari uraian di atas, diperoleh tabel sebagai berikut.

	0	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

B. Panjang Sisi dan Besar Sudut Segitiga Siku-Siku

Dalam segitiga siku-siku, jika diketahui besar salah satu sudut lancip dan panjang salah satu sisinya diketahui maka ukuran unsur-unsur yang lain dalam segitiga tersebut dapat kita tentukan. Dari gambar di samping, jika diketahui sudut $CAB = \alpha$ dan panjang sisi $AB = b$ maka besar sudut β, sisi a dan sisi c dapat ditentukan, dan berlaku:



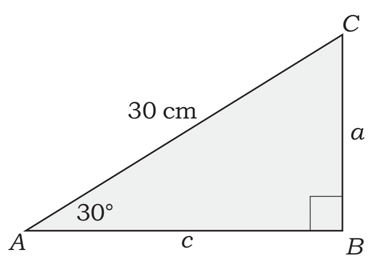
$$\beta = 90° - \alpha$$

$\tan\alpha = \frac{a}{b}$ maka $a = b \cdot \tan\alpha$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ maka $c = \frac{b}{\cos\alpha}$

Contoh:

Diketahui segitiga ABC siku-siku di B, $\angle BAC = 30°$, dan panjang sisi $AC = 30$ cm. Hitunglah panjang sisi a dan c.



$$\sin 30° = \frac{BC}{AC} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{a}{30}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \cdot 30$$

$$\Leftrightarrow a = 15$$

Jadi, panjang sisi $a = 15$ cm.

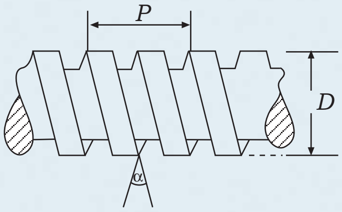
$$\cos 30° = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{c}{30}$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 30$$

$$\Leftrightarrow c = 15\sqrt{3}$$

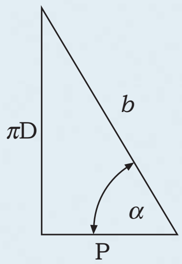
Jadi, panjang sisi $c = 15\sqrt{3}$ cm.

Aplikasi



Sebuah paku ulir ganda seperti gambar di samping memiliki diameter (D) = $\frac{28}{11}\sqrt{3}$ mm dan kisar (P) = 8 mm. Tentukan besar sudut α!

Penyelesaian:
Menghitung besar sudut α ekuivalen dengan menghitung kemiringan ulir. Kemiringan ulir dapat digambarkan sebagai berikut.



$$\tan \alpha = \frac{\pi D}{P} = \frac{\frac{22}{7} \cdot \frac{28}{11}\sqrt{3}}{8} = \sqrt{3}$$

$\Leftrightarrow \quad \alpha = \text{arc } \tan \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \quad \alpha = 60°$

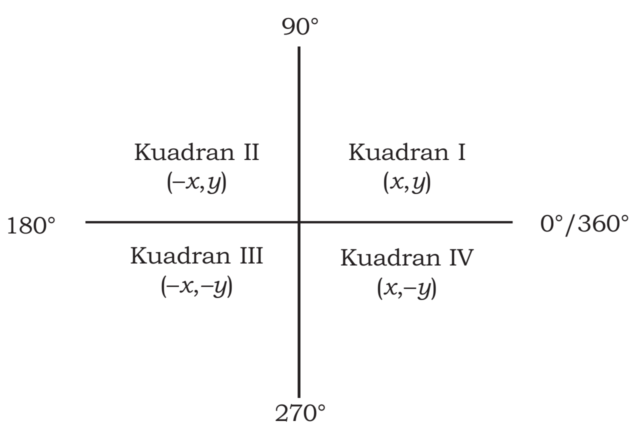
Jadi, kemiringan ulir sebesar 60°.

C. Perbandingan Trigonometri Sudut di Berbagai Kuadran

1. Sudut pada Kuadran

Selain sudut-sudut istimewa, menentukan nilai perbandingan trigonometri dapat dilakukan dengan menggunakan daftar, tabel trigonometri, atau kalkulator. Tabel trigonometri hanya memuat sudut-sudut di kuadran I dan selebihnya tidak. Untuk menentukan nilai perbandingan trigonometri dengan sudut lebih dari 90° dapat dilakukan dengan mengubah sudut tersebut ke kuadran I.

Sumbu-sumbu pada koordinat membagi bidang koordinat menjadi empat daerah yang disebut **kuadran**. Dengan begitu, besar sudut α dapat dikelompokkan menjadi 4 daerah seperti yang terlihat pada gambar berikut.



Dari gambar di atas dapat ditentukan tanda (+/–) nilai perbandingan trigonometri pada masing-masing kuadran.

Trik

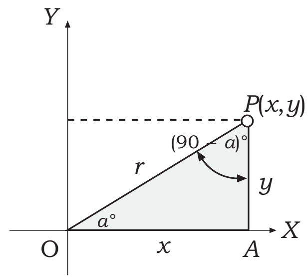
Untuk memudahkan kalian menghafal tanda pada kuadran, perhatikan gambar berikut.

Kuadran II *sin*	Kuadran I *all*
Kuadran III *tan*	Kuadran IV *cos*

- Di kuadran I nilai semua (*all*) sudut bernilai positif.
- Di kuadran II nilai *sin* positif, selain sinus nilainya negatif.
- Di kuadran III nilai *tan* positif, selain tangen nilainya negatif.
- Di kuadran IV nilai *cos* positif, selain cosinus nilainya negatif.

2. Sudut Berelasi

a. Sudut di Kuadran I ($0° < x < 90°$)



Perhatikan Δ OAP di kuadran I dan titik $P\ (x,\ y)$.

$$\sin a° = \frac{y}{r} \qquad \sin (90° - a) = \frac{x}{r}$$

$$\cos a° = \frac{x}{r} \qquad \cos (90° - a) = \frac{y}{r}$$

$$\tan a° = \frac{y}{x} \qquad \tan (90° - a) = \frac{x}{y}$$

Dapat disimpulkan bahwa:

$$\sin a° = \cos (90° - a) = \frac{y}{r}$$

$$\cos a° = \sin (90° - a) = \frac{x}{r}$$

$$\tan a° = \frac{1}{\tan (90° - a)} = \cot (90° - a) = \frac{x}{y}$$

Contoh:

1. $\sin 30° = \sin (90° - 60°) = \cos 60°$
2. $\cos 45° = \sin (90° - 45°) = \sin 45°$
3. $\tan 30° = \tan (90° - 60°) = \cot 60°$

b. Sudut di Kuadran II ($90° < x < 180°$)

Perhatikan Δ OAP di kuadran I, titik $P\ (x,y)$ dan titik $P'\ (-x,y)$ di kuadran II.

Sudut di kuadran 1		Sudut di kuadran II	
$\sin a°$	$= \frac{y}{r}$	$\sin (180° - a)$	$= \frac{y}{r}$
$\cos a°$	$= \frac{x}{r}$	$\cos (180° - a)$	$= \frac{-x}{r}$
$\tan a°$	$= \frac{y}{x}$	$\tan (180° - a)$	$= \frac{y}{-x}$

Dari beberapa rumusan di atas, dapat disimpulkan:

$$\sin (180° - a) = \sin a°$$
$$\cos (180° - a) = -\cos a°$$
$$\tan (180° - a) = -\tan a°$$

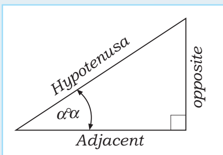
Contoh:

1. $\cos 120° = \cos (180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$
2. $\cos 135° = \cos (180° - 45°) = -\cos 45° = -1$
3. $\tan 150° = \tan (180° - 30°) = -\tan 30° = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

c. Sudut di Kuadran III ($180° < x < 270°$)

Perhatikan Δ OAP di kuadran I dan titik $P\ (x,y)$ dan titik $P'\ (-x,-y)$ di kuadran III. Diperoleh relasi sebagai berikut.

Perlu Tahu

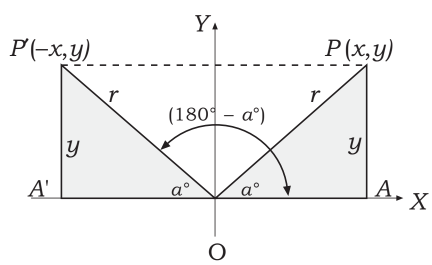


Dasar dari ilmu trigonometri adalah segitiga siku-siku seperti pada gambar.

$$\sin \alpha = \frac{\text{opposite}}{\text{hypotenusa}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypotenusa}}$$

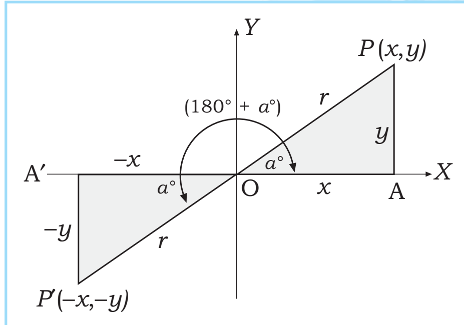
$$\tan \alpha = \frac{\text{opposite}}{\text{adjacent}}$$



Intisari

Di dalam trigonometri, rasio antara sembarang dua garis dari suatu segitiga siku-siku ditetapkan sebagai fungsi sudut. Rasio-rasio ini disebut fungsi-fungsi trigonometri. Rasio-rasio yang paling umum dipakai yaitu sinus, cosinus, dan tangen.

Sudut di kuadran I	Sudut di kuadran III
$\sin a^\circ = \frac{y}{r}$	$\sin(180^\circ + a) = \frac{-y}{r}$
$\cos a^\circ = \frac{x}{r}$	$\cos(180^\circ + a) = \frac{-x}{r}$
$\tan a^\circ = \frac{y}{x}$	$\tan(180^\circ + a) = \frac{y}{x}$



Dari beberapa rumusan di atas, dapat disimpulkan:

$$\sin(180^\circ + a) = -\sin a^\circ$$
$$\cos(180^\circ + a) = -\cos a^\circ$$
$$\tan(180^\circ + a) = \tan a^\circ$$

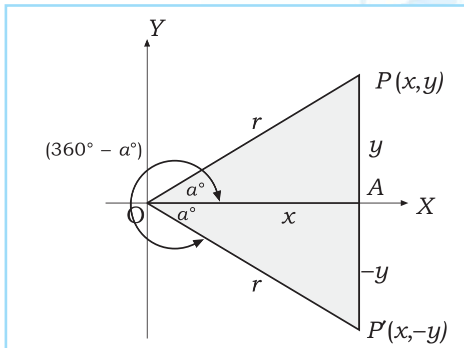
Contoh:

1. $\sin 225^\circ = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
2. $\tan 210^\circ = \tan(180^\circ + 30^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

d. Sudut di Kuadran IV ($270^\circ < x < 360^\circ$)

Perhatikan $\Delta\ OAP$, titik $P(x,y)$ di kuadran I, $\Delta\ OA'P'$ dan $P'(x',y')$ di kuadran IV. Diperoleh relasi sebagai berikut.

Sudut di kuadran I	Sudut di kuadran IV
$\sin a^\circ = \frac{y}{r}$	$\sin(360^\circ - a) = \frac{-y}{r}$
$\cos a^\circ = \frac{x}{r}$	$\cos(360^\circ - a) = \frac{x}{r}$
$\tan a^\circ = \frac{y}{x}$	$\tan(360^\circ - a) = \frac{-y}{x}$



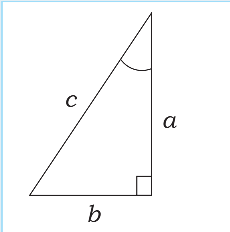
Dari beberapa rumusan tersebut diperoleh hubungan sebagai berikut.

$$\sin a^\circ = -\sin(360^\circ - a) = \frac{-y}{r} \text{ atau } \sin(360^\circ - a) = \sin(-a) = -\sin a^\circ$$
$$\cos a^\circ = \cos(360^\circ - a) = \frac{x}{r} \text{ atau } \cos(360^\circ - a) = \cos(-a) = \cos a^\circ$$
$$\tan a^\circ = -\tan(360^\circ - a) = \frac{-y}{x} \text{ atau } \tan(360^\circ - a) = \tan(-a) = -\tan a^\circ$$

Contoh:

1. $\sin 300^\circ = \sin(360^\circ - 30^\circ) = \sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$
2. $\cos 315^\circ = \cos(360^\circ - 45^\circ) = \cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
3. $\tan(-30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

Info



Sumber: *www.wikipedia.org*

Segitiga siku-siku dan teorema Pythagoras merupakan dasar dari ilmu trigonometri.

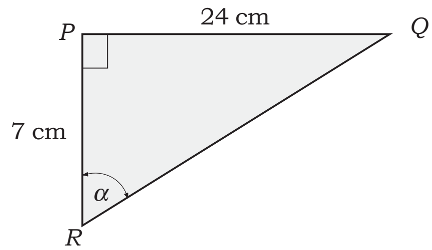
Latihan 1

Kerjakan soal-soal berikut!

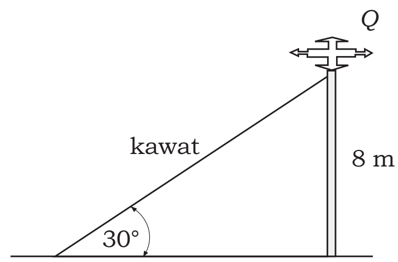
1. Jika *cot* $\alpha = \frac{4}{3}$, tentukan nilai dari bentuk trigonometri berikut!
   a. *sin* α
   b. *cos* α

2. Tentukan nilai dari sudut istimewa berikut!
   a. *sin* 120°
   b. *cos* 210°
   c. *tan* 300°

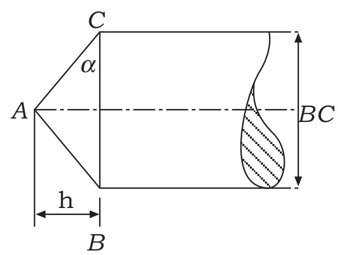
3. Pada gambar di samping PR = 7 cm dan PQ = 24 cm.
   Jika $\angle P$ = 90°, tentukan nilai *sin* α dan *tan* α!



4. Sebuah antena dipasang dengan diberi penguat dari kawat seperti pada gambar di samping. Jika tinggi antena 8 m dan sudut elevasi 30°, berapakah panjang kawat tersebut?



5. Sebuah alat pelubang mempunyai ukuran tinggi (h) = 3,5 cm dan $BC = 7\sqrt{3}$ cm. Tentukan besar sudutnya!



Koordinat Cartesius dan Kutub

Pernahkah kalian tersesat? Atau, pernahkah kalian bingung saat menentukan arah mata angin? Jika ya, berarti kalian merasakan hal yang sama seperti penduduk zaman dahulu.

Wilayah bumi yang begitu luas memungkinkan manusia untuk melakukan penjelajahan ke berbagai tempat. Akan tetapi, untuk kegiatan yang harus melewati wilayah gurun, hutan, maupun samudra dibutuhkan alat untuk menentukan posisi atau keberadaan suatu objek. Pada abad kedelapan para ilmuwan Mesir memperkaya ilmu pengetahuan geometri yang telah dicetuskan oleh bangsa India kuno dengan teori baru trigonometri. Teori ini selanjutnya digunakan sebagai dasar mencari letak atau posisi di atas muka bumi. Teknik ini disebut sistem koordinat. Pada trigonometri ada dua sistem koordinat yang digunakan yaitu koordinat cartesius dan koordinat kutub. Penjelasan mengenai dua sistem koordinat ini akan kita pelajari pada uraian berikut.

Sumber: *www.ignoracia.com*

Salah satu kenampakan gurun

Uraian Materi

A. Pengertian Koordinat Cartesius dan Koordinat Kutub

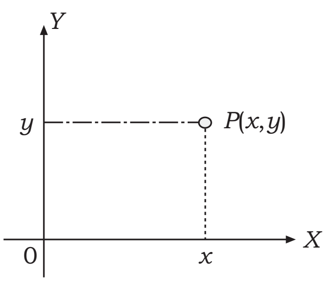
Letak suatu titik pada sebuah bidang dapat dinyatakan dengan 2 macam sistem koordinat.

1. Sistem Koordinat Cartesius

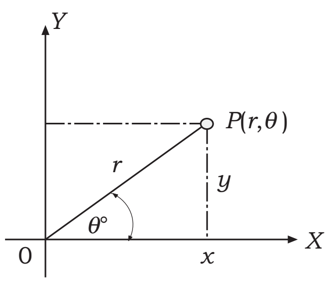
Titik P pada koordinat cartesius ditulis $P\,(x,y)$ dengan x sebagai absis dan y sebagai ordinat.

2. Sistem Koordinat Kutub (Polar)

Titik P pada koordinat kutub ditulis $P\,(r, \theta°)$ dengan r jarak dari P ke titik pangkal koordinat dan r memiliki sudut $\theta°$ dengan sumbu X positif.



Titik $P\,(x,y)$



Titik $P\,(r,\theta°)$

Info

Sumber: *www.wikipedia.org*

Hipparchos

Dasar perumusan trigonometri dicetuskan oleh ilmuwan matematika, Hipparchos (170–125 SM). Beliau menerapkan trigonometri untuk menentukan letak kota-kota di atas bumi dengan memakai garis lintang dan garis bujur, sistem yang masih dipakai sampai sekarang.

B. Mengkonversi Koordinat Cartesius ke Koordinat Kutub atau Sebaliknya

Jika pada koordinat cartesius titik $P\,(x,y)$ diketahui maka koordinat kutub $P\,(r,\theta°)$ dapat ditentukan dengan menggunakan rumus sebagai berikut.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta° = \frac{y}{x} \iff \theta° = \arctan \frac{y}{x}$$

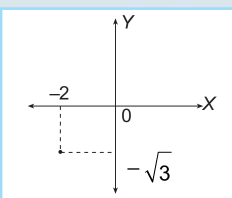
Perlu Tahu

Sumber: *www.egyptos.net*

Piramida

Sudut siku-siku yang besarnya 90° dijadikan dasar oleh ilmuwan matematika dari bangsa Rhind, yaitu Ahmes, untuk menunjukkan bagaimana ketinggian sebuah piramida berhubungan dengan ukuran dan sudut kemiringan dari setiap dinding segitiga. Hasilnya disebut dalam bentuk tabel perbandingan trigonometri yang masih digunakan hingga saat ini.

Trik



Karena titik P terletak di kuadran III maka arc $\tan\sqrt{3} = 240°$.

Jika koordinat kutub titik $P(r,\theta°)$ diketahui maka koordinat cartesius titik $P(x, y)$ dapat ditentukan dengan menggunakan rumus sebagai berikut.

$$\sin\theta° = \frac{y}{r} \rightarrow y = r \cdot \sin\theta$$

$$\cos\theta° = \frac{x}{r} \rightarrow x = r \cdot \cos\theta$$

Berikut ini adalah koordinat kutub $P(r,\theta°)$ bila dinyatakan dalam koordinat cartesius adalah $P(r \cdot \sin\theta, r \cdot \cos\theta)$.

Sebaliknya, koordinat cartesius titik P (x,y) bila dinyatakan dalam koordinat kutub adalah $P\left(\sqrt{x^2+y^2}, \text{arc}\tan\frac{y}{x}\right)$

Contoh:

1. Diketahui koordinat kutub titik $P(4,60°)$. Tentukan koordinat cartesius titik P!

   Penyelesaian:

   Diketahui $P(4,60°)$, diperoleh $r = 4$ dan $\theta° = 60°$.

   $x = r \cdot \cos\theta$
   $= 4 \cdot \cos 60°$
   $= 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$

   $y = r \cdot \sin\theta$
   $= 4 \cdot \sin 60°$
   $= 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

   Jadi, koordinat cartesius dari titik $P(4,60°)$ adalah $P(2,2\sqrt{3})$.

2. Diketahui koordinat cartesius titik $P(-2,-2\sqrt{3})$. Tentukan koordinat kutub titik P!

   Penyelesaian:

   Diketahui $P(-2,-2\sqrt{3})$, diperoleh $x = -2$ dan $y = -2\sqrt{3}$ yang terletak di kuadran III.

   $r = \sqrt{(-2)^2+(-2\sqrt{3})^2}$
   $= \sqrt{4+12}$
   $= 16 = 4$

   $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3}$
   $\Leftrightarrow \theta = \text{arc}\tan\sqrt{3}$
   $\Leftrightarrow \theta = 240°$ (kuadran III)

   Jadi, koordinat kutub dari titik $P(-2,-2\sqrt{3})$ adalah $P(4,240°)$.

Latihan 2

Kerjakan soal-soal berikut!

1. Ubahlah koordinat kutub berikut ke koordinat cartesius!

   a. $A(6,30°)$
   b. $B(2,120°)$
   c. $C(6,315°)$
   d. $D(4\sqrt{3},300°)$
   e. $E(8,45°)$
   f. $F(7,90°)$
   g. $G(4\sqrt{3},150°)$
   h. $H(10,330°)$
   i. $I(8,240°)$
   j. $J(3\sqrt{2},225°)$
   k. $K(5\sqrt{3},3.000°)$
   l. $L(15,330°)$

2. Ubahlah koordinat cartesius berikut ke koordinat kutub!

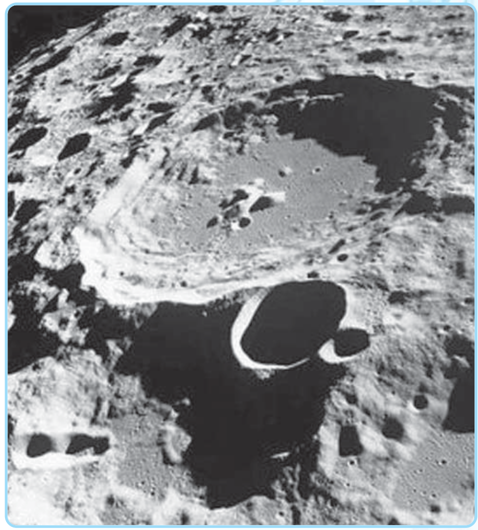
   a. $P(2,2\sqrt{3})$
   b. $Q(-1,-1)$
   c. $R(-2\sqrt{3},6)$
   d. $S(6,-2\sqrt{3})$
   e. $T(5,5)$
   f. $U(-3\sqrt{2},3\sqrt{2})$
   g. $V(-5\sqrt{3},5)$
   h. $W(-3\sqrt{2},-3\sqrt{6})$
   i. $X(3\sqrt{15},-9\sqrt{5})$
   j. $Y(6,6\sqrt{3})$

Kegiatan Belajar 3

Aturan Sinus dan Cosinus

Pernahkah kalian melihat permukaan bulan dengan detail? Pengamatan tersebut tidak dapat kalian lakukan tanpa alat bantu, misalnya teropong bintang.

Perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi pada tiga dasawarsa ini telah berhasil membawa manusia untuk menyelidiki dan melihat gambaran luar angkasa beserta isinya secara nyata. Kondisi sistem tata surya beserta spesifikasi dari isinya dapat dipantau oleh para ilmuwan dari muka bumi. Penyelidikan di stasiun luar angkasa tentunya perlu didukung dengan peralatan yang modern. Selain itu, diperlukan pengembangan dari pengetahuan yang sudah ada. Gambar di samping menampilkan penampakan salah satu sisi muka bulan yang diambil oleh kru pesawat Apollo 11 yang diluncurkan oleh stasiun ruang angkasa Amerika Serikat, yaitu NASA. Ilmu trigonometri beserta rumus-rumus yang terkandung di dalamnya berperan besar dalam perkembangan penyelidikan luar angkasa. Selanjutnya, akan kita pelajari mengenai aturan sinus dan cosinus pada uraian berikut.

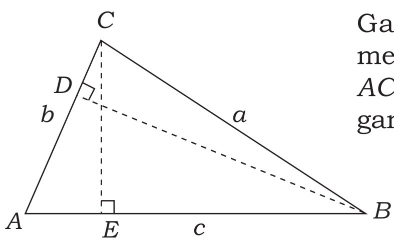


Sumber: *www.wikipedia.org*

Permukaan bulan

Uraian Materi

A. Menemukan dan Menerapkan Aturan Sinus



Gambar segitiga sebarang ABC di samping memiliki panjang sisi $AB = c$ cm, $BC = a$ cm, dan $AC = b$ cm. Sementara itu, CE dan BD adalah garis tinggi $\Delta\ ABC$.

Pada $\Delta\ AEC$ diketahui $\sin A = \frac{CE}{AC}$. Diperoleh $CE = AC \cdot \sin A = b \cdot \sin A$ . . . (1)

Pada $\Delta\ BEC$ diketahui $\sin B = \frac{CE}{CB}$. Diperoleh $CE = CB \cdot \sin B = a \cdot \sin B$ . . . (2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh kesamaan sebagai berikut.

$b \cdot \sin A = a \cdot \sin B$ . . . (masing-masing dibagi dengan $\sin A \cdot \sin B$)

$$\Leftrightarrow \frac{a \cdot \sin B}{\sin A \cdot \sin B} = \frac{b \cdot \sin A}{\sin A \cdot \sin B}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}} \quad . . . (3)$$

Pada $\Delta\ ADB$ berlaku $\sin A = \frac{BD}{AB}$. Diperoleh $BD = AB \cdot \sin A = c \cdot \sin A$ . . . (4)

Pada $\Delta\ CBD$ berlaku $\sin C = \frac{BD}{BC}$. Diperoleh $BD = BC \cdot \sin C = a \cdot \sin C$ . . . (5)

Dari persamaan (4) dan (5) diperoleh kesamaan sebagai berikut.

$c \cdot \sin A = a \cdot \sin C$ . . . (masing-masing dibagi dengan $\sin A \cdot \sin C$)

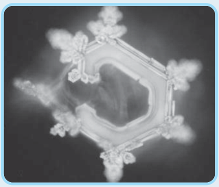
$$\Leftrightarrow \frac{c \cdot \sin A}{\sin A \cdot \sin C} = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A \cdot \sin C}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}} \qquad \text{. . . (6)}$$

Dari persamaan (3) dan (6) maka diperoleh **aturan sinus** sebagai berikut.

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{6}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}}$$

Perlu Tahu



Sumber: *www.thank.water.net*

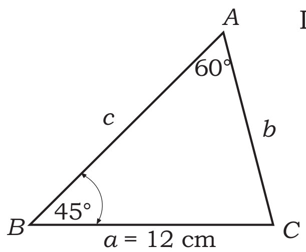
Salah satu bentuk kristal

Salah satu aplikasi modern yang paling penting dalam trigonometri, yaitu studi mengenai kristal. Seorang ahli fisika Inggris, Lawrence Bragg (1890–1971) menggunakan trigonometri untuk menunjukkan bagaimana struktur kristal bisa dihitung dengan cara mengukur sudut penyebaran sinar x pada kristal.

Contoh:

1. Diketahui ΔABC, $\angle A = 60°$, $\angle B = 45°$, dan panjang sisi $BC = 12$ cm. Tentukan panjang sisi AC!

Penyelesaian:



Dari gambar diketahui panjang $BC = 12$ cm.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Leftrightarrow \frac{12}{\sin 60°} = \frac{AC}{\sin 45°}$$

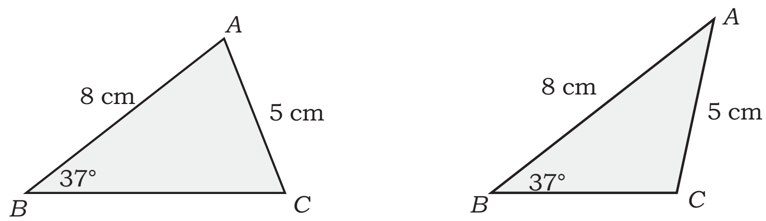
$$\Leftrightarrow AC = \frac{12 \cdot \sin 45°}{\sin 60°} = \frac{12 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{12}{3}\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$$

Jadi, panjang sisi $AC = 4\sqrt{6}$ cm.

2. Diketahui Δ ABC dengan sisi $AB = 8$ cm, $AC = 5$ cm, dan $\angle B = 37°$. Hitunglah besar sudut C!

Penyelesaian:

Dari data di atas ada 2 kemungkinan segitiga yang dapat dibuat, yaitu:



Aturan yang dipakai:

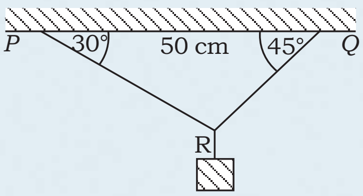
$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{5}{\sin 37°} = \frac{8}{\sin C} \Leftrightarrow C = \frac{8 \cdot \sin 37°}{5}$$

$$\Leftrightarrow \sin C = \frac{8 \cdot 0{,}602}{5} \Leftrightarrow \sin C = 0{,}9632 \Leftrightarrow \sin C = \text{arc } \sin 0{,}9632$$

Dari tabel diperoleh $\angle C = 74°24' = 74{,}4°$ (sudut C merupakan sudut lancip).
Jika sudut C merupakan sudut tumpul, diperoleh $\angle C = 180° - 74{,}4° = 105{,}6°$

Jadi, besar sudut C ada dua kemungkinan, yaitu $74{,}4°$ dan $105{,}6°$.

Aplikasi



Suatu beban ditahan oleh seutas tali seperti pada gambar di samping. Tentukan panjang tali *QR*!

Penyelesaian:
Panjang tali *QR* dapat dihitung dengan menggunakan aturan sinus sebagai berikut.

$$\frac{QR}{\sin P} = \frac{PQ}{\sin R}$$

$$\Leftrightarrow \quad QR = \frac{PQ \cdot \sin P}{\sin R}$$

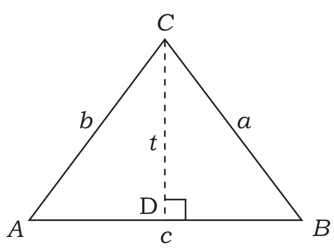
$$= \frac{50 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 105^\circ}$$

$$= \frac{50 \cdot 0{,}5}{0{,}9659}$$

$$= 25{,}9$$

Jadi, panjang tali *QR* adalah 25,9 cm.

B. Menemukan dan Menerapkan Aturan Cosinus



Apabila diketahui dua buah sisi dan satu buah sudut yang diapit maka panjang sisi yang lain dapat dihitung dengan cara sebagai berikut. Pada gambar $\Delta\, ABC$ di samping, *CD* adalah garis tinggi.

$$\sin A = \frac{CD}{AC} \Leftrightarrow CD = AC \cdot \sin A \Leftrightarrow \boxed{CD = b \cdot \sin A}$$

$$\cos A = \frac{AD}{AC} \Leftrightarrow AD = AC \cdot \cos A \Leftrightarrow \boxed{AD = b \cdot \cos A}$$

Dengan menggunakan dasar Teorema Phytagoras dari Δ BDC diperoleh:

$$\begin{aligned}
a^2 &= CD^2 + BD^2 \\
&= (b \cdot \sin A)^2 + (c - AD)^2 \\
&= (b \cdot \sin A)^2 + (c - b \cdot \cos A)^2 \\
&= b^2 \cdot \sin^2 A + c^2 - 2 \cdot bc \cdot \cos A + b^2 \cos^2 A \\
&= b^2 \cdot \sin^2 A + b^2 \cdot \cos^2 A + c^2 - 2bc \cdot \cos A \\
&= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc \cdot \cos A \\
&= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A
\end{aligned}$$

Jadi, diperoleh $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A}$

Analog dengan cara tersebut dapat diperoleh panjang sisi *b* dan *c* yang dinamakan **aturan cosinus** sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \\
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C
\end{aligned}$$

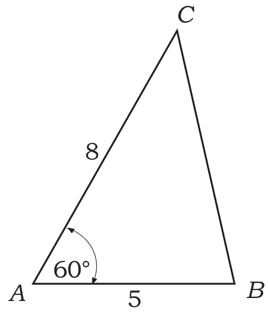
Perlu Tahu

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$
Persamaan tersebut akan kita pelajari pada kegiatan belajar 6 bab ini.

Diskusi

Buatlah kelompok bersama teman sebangku kalian, kemudian diskusikan hal berikut. Buktikanlah bahwa pada segitiga ABC berlaku:
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$.
Gunakan petunjuk berikut.
- Buktikan dahulu:
  $BD = a \cos B$
  $CD = a \sin B$
- Gunakan rumus:
  $b^2 = CD^2 + AD^2$

Contoh:



Diketahui $\Delta\ ABC$, $AB = 5$ dan $AC = 8$ dan $\angle A = 60°$
Hitunglah panjang sisi BC.

Penyelesaian:

$AB = c = 5,\ AC = b = 8,\ \angle A = 60°$

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \\
&= 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 60° \\
&= 64 + 25 - 80 \cdot \frac{1}{2} \\
&= 89 - 40 = 49 \\
a &= \sqrt{49} = \pm 7
\end{aligned}
$$

Karena sisi haruslah bernilai positif maka panjang sisi $BC = 7$ cm.

Aturan cosinus dapat digunakan untuk menentukan besar sudut dalam $\Delta\ ABC$ dengan syarat panjang ketiga sisinya harus diketahui. Untuk itu aturan cosinus dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$$

Contoh:

1. Diketahui $\Delta\ ABC$ dengan $AB = 6$ cm, $AC = 5$ cm, dan $BC = 4$ cm. Hitunglah besar sudut B!

   Penyelesaian:

   $$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{4^2 + 6^2 - 5^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{16 + 36 - 25}{48} = 0{,}5625$$

   $\Leftrightarrow\ B = \text{arc} \cos 0{,}5625 = 55°44'$
   Jadi, besar sudut B = 55,77°.

2. Diketahui $\Delta\ ABC$ dengan $\angle A = 60°$, sisi $b = 10$ cm, dan sisi $c = 16$ cm. Tentukan besar unsur-unsur:
   a. panjang sisi a,
   b. besar $\angle B$, dan
   c. besar $\angle C$.

   Penyelesaian:

   a. $$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \\ &= 10^2 + 16^2 - 2 \cdot 10 \cdot 16 \cdot \cos 60° \\ &= 100 + 256 - 2 \cdot 10 \cdot 16 \cdot \frac{1}{2} = 196 \end{aligned}$$
   Jadi, panjang sisi $a = \sqrt{196} = 14$ cm.

   b. $$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{14^2 + 16^2 - 10^2}{2 \cdot 14 \cdot 16} = \frac{196 + 256 - 100}{448} = \frac{356}{448} = 0{,}795$$
   $\Leftrightarrow\ B = \text{arc} \cos 0{,}795$
   Jadi, besar $\angle B = 38°28'$.

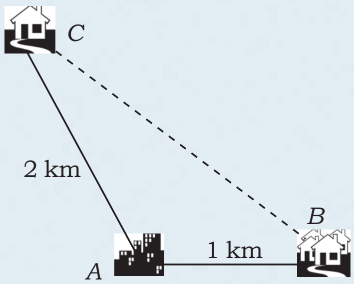
   c. Sudut C dihitung dengan aturan jumlah sudut dalam sebuah segitiga adalah 180°.
   $$\begin{aligned} C &= 180° - (60° + 38°28') \\ &= 180° - 98°28' \\ &= 81°32' \end{aligned}$$
   Jadi, besar $\angle C = 81°32'$.

Info

Sumber: *www.palmbeachprinces.com*
Kapal pesiar

Tabel-tabel bilangan, seperti halnya pedoman nautika (pelayaran), telah digunakan lebih dari 4.000 tahun sebagai pedoman untuk menyelesaikan perhitungan-perhitungan yang rumit. Beberapa di antaranya digunakan untuk nilai-nilai trigonometri.

Aplikasi



Diberikan posisi tiga buah bangunan seperti gambar di samping. Setelah dilakukan pengukuran diperoleh bahwa jarak rumah sakit dengan apotek adalah 1 km dan jarak rumah sakit dengan bank adalah 2 km. Pada bangunan rumah sakit dipasang pesawat theodolit yang diarahkan ke rumah sakit dan bank. Sudut yang dibentuk oleh theodolit adalah 120°. Tentukan jarak bank dengan apotek!

Penyelesaian:

Dimisalkan: rumah sakit = A

apotek = B

bank = C

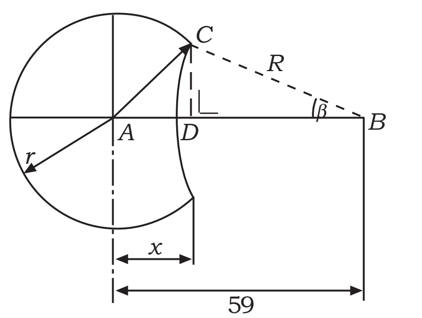
Dengan menggunakan rumus aturan cosinus diperoleh:

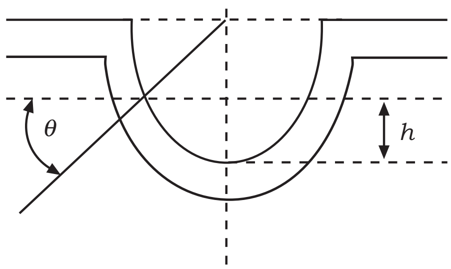
$$
\begin{aligned}
& BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 120^\circ \\
\Leftrightarrow\ & BC^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos (180^\circ - 60^\circ) \\
\Leftrightarrow\ & BC^2 = 1 + 4 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-\cos 60^\circ) \\
\Leftrightarrow\ & BC^2 = 5 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-\tfrac{1}{2}) \\
\Leftrightarrow\ & BC^2 = 5 + 2 \\
\Leftrightarrow\ & BC^2 = 7 \\
\Leftrightarrow\ & BC = \sqrt{7} = 2{,}6458
\end{aligned}
$$

Jadi, jarak apotek dengan bank adalah 2,6458 km $\approx$ 2,7 km.

Latihan 3

Kerjakan soal-soal berikut!

1. Pada Δ PQR, jika PQ = 7 cm, QR = 9 cm, dan PR = 6 cm, hitunglah nilai $\angle P$, $\angle Q$ dan $\angle R$!
2. Kota B terletak 20 km sebelah utara kota A dan kota C terletak 15 km barat laut kota A. Hitunglah jarak antara kota B dan kota C!
3. Pada Δ ABC diketahui $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 5$. Tentukan perbandingan sisi $a : b : c$.
4. 

   Sebuah benda kerja berbentuk lingkaran dengan r bola = 40 mm dan R pisau = 50 mm. Tentukan panjang x!
5. 

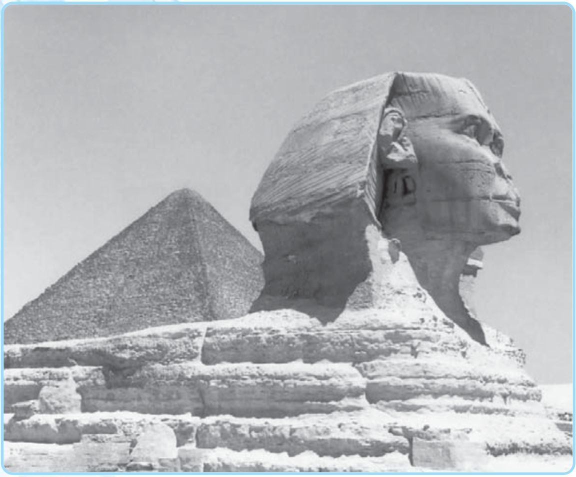
   Perhatikan pasangan roda gigi pada gambar di samping. Hubungan antara θ, h, dan modul (m) diberikan pada persamaan berikut.

   $$h = m\left(1 - \frac{\pi}{4} \cos \theta \sin \theta\right)$$

   Jika diketahui h = 6 dan m = 8, tentukan nilai $\sin 2\theta$!

Kegiatan Belajar 4

Luas Segitiga

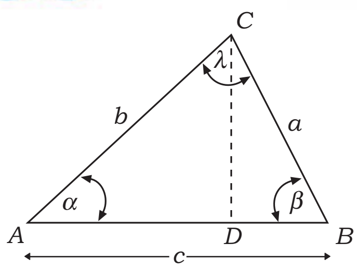


Sumber: *www.ignoracia.com*

Piramida

Kuno tidak selalu identik dengan kebodohan. Buktinya dapat kalian lihat pada gambar di samping. Ya, ternyata piramida ini menyimpan ilmu pengetahuan yang hebat. Berdasarkan sumber dari daun lontar peninggalan bangsa Rhind, seorang ilmuwan matematika bernama Ahmes menuliskan buah-buah pikirannya terkait dengan segitiga siku-siku. Hal ini dilakukan untuk menunjukkan hubungan antara ketinggian piramida terkait dengan ukuran dan sudut kemiringan dari setiap dinding piramida. Selanjutnya, Ahmes membuat sebuah tabel perbandingan (rasio) yang dapat membantu para perancang piramida pada zaman dahulu agar menghasilkan kemiringan dinding piramida sesuai yang diinginkan. Tabel yang dihasilkan disebut sebagai perbandingan-perbandingan trigonometri yang masih digunakan oleh para matematikawan hingga saat ini. Sisi-sisi piramida yang berbentuk segitiga merupakan bangun datar yang tentunya memiliki luas. Penggunaan trigonometri untuk menghitung luas segitiga akan kita pelajari pada uraian berikut.

Uraian Materi



Rumus umum untuk mencari luas segitiga adalah:

$$\text{Luas } \Delta\, ABC = \frac{\text{alas} \times \text{tinggi}}{2}$$

Dari gambar $\Delta\, ABC$ di atas, alas = AB dan tinggi = CD. Panjang CD dicari dengan langkah berikut.

Perhatikan $\Delta\, ACD$ pada $\Delta\, ABC$ di atas. $\Delta\, ACD$ adalah segitiga siku-siku sehingga diperoleh: $\sin A = \frac{CD}{b}$ atau $CD = b \sin A$. Luas $\Delta\, ABC = \frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{AB \cdot b \sin A}{2} = \frac{1}{2} c \cdot b \sin A$.

Dengan cara yang sama untuk menghitung luas $\Delta\, ABC$ bila panjang dua sisi dan besar salah satu sudut yang diapit kedua sisi tersebut diketahui akan diperoleh rumus-rumus sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \text{L}\, \Delta\, ABC &= \frac{1}{2} a \cdot b \sin C \\ &= \frac{1}{2} b \cdot c \sin A \\ &= \frac{1}{2} a \cdot c \sin B \end{aligned}$$

Info

Sumber: *www.wikipedia.org*

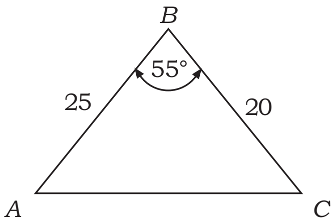
Al-Khwarizmi

Tabel sinus dan tangen yang dipakai saat ini ditemukan oleh ilmuwan matematika dari Persia, Al-Khwarizmi, pada 10 SM.

Contoh:

1. Diketahui Δ *ABC* dengan sisi $a = 20$ cm, $c = 25$ cm, $\angle B = 55°$. Carilah luas Δ *ABC* tersebut!

   Penyelesaian:



$$\begin{aligned} \text{Luas } \Delta ABC &= \frac{1}{2}\, a \cdot c \sin B \\ &= \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 25 \sin 55° \\ &= \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 25\ (0{,}8191) \\ &= 209{,}78 \end{aligned}$$

Jadi, luas segitiga *ABC* adalah 209,78 cm^2.

2. Diketahui Δ *ABC* dengan sisi $a = 14$ cm, $b = 16$ cm, dan $c = 22$ cm. Carilah luas Δ *ABC* tersebut!

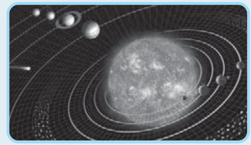
   Penyelesaian:

$$\begin{aligned} & a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A \\ \Leftrightarrow\ & 14^2 = 16^2 + 22^2 - 2 \cdot 16 \cdot 22 \cdot \cos A \\ \Leftrightarrow\ & 196 = 256 + 484 - 704 \cdot \cos A \\ \Leftrightarrow\ & \cos A = \frac{740 - 196}{704} \\ \Leftrightarrow\ & \cos A = \frac{544}{704} = 0{,}7727 \\ \Leftrightarrow\ & \angle A = \text{arc} \cos (0{,}7727) \\ \Leftrightarrow\ & \angle A = 39°24' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Luas } \Delta ABC &= \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \sin A \\ &= \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 22.\ \sin 39°24' \\ &= 176 \cdot (0{,}6347) = 111{,}7072 \end{aligned}$$

Jadi, luas Δ *ABC* adalah 111,7072 cm^2.

Perlu Tahu

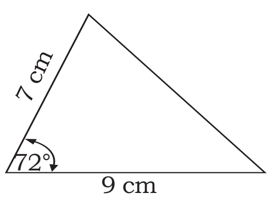


Sumber: *www.wikipedia.org*

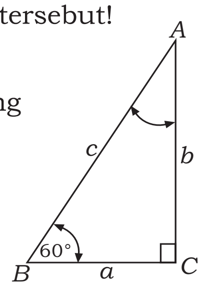
Astronom-astronom terdahulu menggunakan "astrolabe" untuk mengukur sudut elevasi dari bintang-bintang dan hasilnya digunakan untuk menghitung jarak bintang dan planet-planet serta keliling bumi.

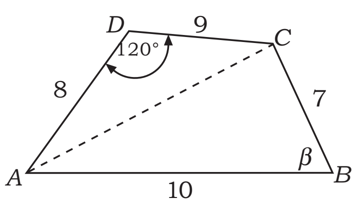
Latihan 4

Kerjakan soal-soal berikut!

1. Carilah luas Δ *ABC* jika diketahui unsur-unsurnya sebagai berikut!
   a. $a = 7$ cm, $b = 9$ cm, dan $\delta = 72°$
   b. $b = 24$ cm, $c = 30$ cm, dan $\alpha = 45°$
   c. $c = 40$ cm, $a = 14$ cm, dan $\beta = 60°$
   d. $a = 4$ cm, $b = 6$ cm, dan $c = 8$ cm
2. Luas segitiga *ABC* adalah 32 cm^2. $AB = 8$ cm dan $AC = 16$ cm. Tentukan besar sudut *A*!
3. 

   Selembar pelat tembaga dipotong sehingga berbentuk segitiga seperti pada gambar di samping. Tentukan luas pelat tersebut!
4. Perhatikan segitiga *ABC* di samping ini. Bila panjang sisi $c = 5$ cm, tentukan luas segitiga *ABC*!

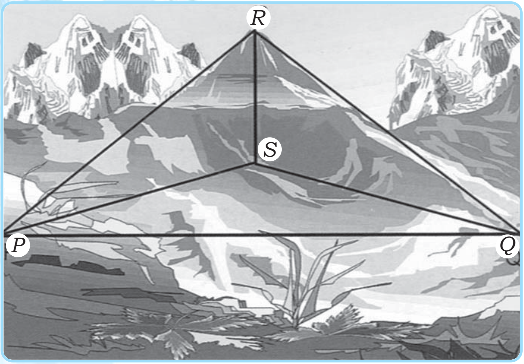


5. 

   Hitunglah luas segi empat *ABCD* seperti pada gambar di samping!

Kegiatan Belajar 5

Rumus Trigonometri Jumlah dan Selisih Dua Sudut



Sumber: *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia*

Gunung yang digambarkan sebagai limas segitiga

Dalam buku ilmu pengetahuan tentu kalian pernah membaca data tentang ketinggian gunung. Ketinggian gunung dituliskan dalam bilangan bulat. Tahukah kalian, bagaimana cara mengukur ketinggian gunung? Tentu ketinggian gunung tidak dihitung secara manual atau secara langsung. Akan tetapi, dengan menggunakan dasar trigonometri. Langkah pertama yaitu gunung yang akan dihitung ketinggiannya digambarkan sebagai bangun ruang limas segitiga. Limas tersebut disusun atas tiga segitiga siku-siku, dan satu buah segitiga sembarang yaitu *PQR*. Panjang $PS = SQ$ dan $\angle RSP = \angle RQS = 90°$. Selanjutnya dihitung panjang *PQ*, $\angle RPQ$, $\angle RQP$, $\angle RPS$, dan $\angle RQS$. Akhirnya tinggi gunung yaitu *RS* dapat dicari nilainya. Di dalam trigonometri rumus yang digunakan bermacam-macam, salah satunya rumus jumlah dan selisih dua buah sudut yang akan kita pelajari berikut.

Uraian Materi

A. Rumus Trigonometri untuk Jumlah Dua Sudut dan Selisih Dua Sudut

Apabila diketahui dua buah sudut yaitu *A* dan *B* maka identitas trigonometri dari jumlah dan selisih sudut *A* dan sudut *B* dapat dicari dengan rumus berikut.

$$\cos(A+B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$$
$$\cos(A-B) = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B$$
$$\sin(A+B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B$$
$$\sin(A-B) = \sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B$$
$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B}$$
$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \cdot \tan B}$$

Info

Sumber: *www.wikipedia.org*

Claudius Ptolemy

Trigonometri sebagai fungsi dipelajari lebih lanjut oleh matematikawan Yunani, Hipparchos (90 M SM–12 SM) dan matematikawan Mesir, Ptolemy (90 M SM–12 SM). Kedua ilmuwan inilah yang menemukan rumus-rumus penting dalam trigonometri, salah satunya *sin* (*A* + *B*) dan *cos* (*A* + *B*).

Contoh:

1. Dengan menyatakan 105° = (60° + 45°), tentukan nilai *sin* 105°!

   Penyelesaian:

   $$\begin{aligned} \sin 105^\circ &= \sin (60^\circ + 45^\circ) \\ &= \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ &= \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

   Jadi, nilai *sin* 105° = $\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$.

2. Diketahui $\sin A = \frac{3}{5}$ untuk A sudut lancip, dan

   $\cos B = -\frac{12}{13}$ untuk B sudut tumpul.

   Tentukan nilai dari jumlah dan selisih sudut berikut!

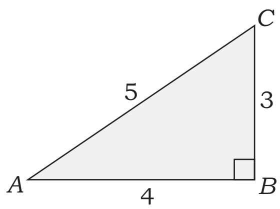
   a. $\sin (A + B)$

   b. $\cos (B - A)$

   c. $\tan (A - B)$

   Penyelesaian:

   Untuk sudut lancip, nilai trigonometri sudut A seluruhnya bernilai positif.

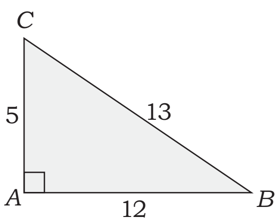


$\sin A = \frac{3}{5}$

$\cos A = \frac{4}{5}$

$\tan A = \frac{3}{4}$

Untuk sudut tumpul dengan nilai cos negatif maka sudut terletak di kuadran II.



$\sin B = \frac{5}{13}$

$\cos B = -\frac{12}{13}$

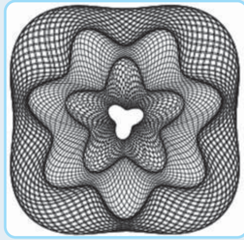
$\tan B = -\frac{5}{12}$

a. $$\begin{aligned} \sin (A + B) &= \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B \\ &= \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} \\ &= -\frac{36}{65} + \frac{20}{65} = -\frac{16}{65} \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} \cos (B - A) &= \cos B \cdot \cos A + \sin B \cdot \sin A \\ &= -\frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5} + \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5} \\ &= -\frac{48}{65} + \frac{15}{65} = -\frac{33}{65} \end{aligned}$$

c. $$\tan (A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \cdot \tan B} = \frac{\frac{3}{4} - \left(-\frac{5}{12}\right)}{1 + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{5}{12}\right)} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{5}{12}}{1 - \frac{15}{48}} = \frac{\frac{36}{48} + \frac{20}{48}}{\frac{48}{48} - \frac{15}{48}} = \frac{\frac{56}{48}}{\frac{33}{48}} = \frac{56}{33}$$

Info



Sumber: *www.wikipedia.org*

Guilloche Patterns

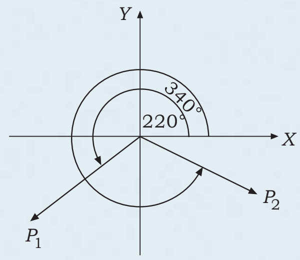
Guilloche Patterns adalah kurva berbentuk spirograf (spiral terhubung). Kurva ini digunakan dalam bidang keamanan pada perbankan, untuk mencegah pemalsuan. Teknik ini digunakan di Amerika, Brasil, Rusia, dan negara-negara di Eropa.

Aplikasi

Pada suatu titik tumpuan bekerja dua buah gaya yaitu P_1 sebesar 5N dengan arah α_1 = 220° dan P_2 sebesar 7N dengan arah α_2 = 340°. Tentukan tiap-tiap gaya apabila diuraikan sesuai sumbu koordinat!

Penyelesaian:

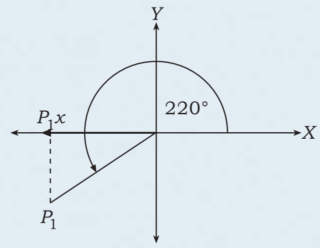
Gaya P_1 dan P_2 apabila digambarkan dalam bidang koordinat akan diperoleh:



Untuk gaya P_1:

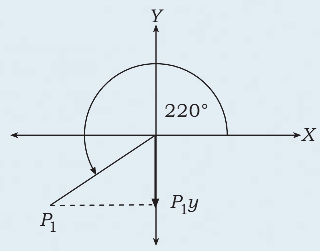
- Diuraikan pada sumbu X:

$$\begin{aligned} P_1x &= P_1 \cdot \cos \alpha_1 \\ &= 5 \cdot \cos 220° \\ &= 5 \cdot \cos (180° + 40°) \\ &= 5 \cdot (\cos 180° \cdot \cos 40° - \sin 180° \cdot \sin 40°) \\ &= 5 \cdot (-1 \cdot 0{,}766 - 0 \cdot 0{,}642) \\ &= 5 \cdot (-0{,}766) \\ &= -5{,}766 \end{aligned}$$



- Diuraikan pada sumbu Y:

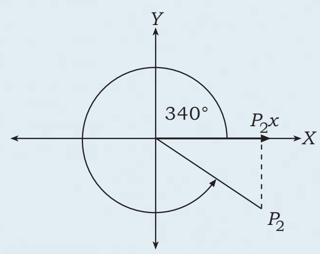
$$\begin{aligned} P_1y &= P_1 \cdot \sin \alpha_1 \\ &= 5 \cdot \sin 220° \\ &= 5 \cdot \sin (180° + 40°) \\ &= 5 \cdot (\sin 180° \cdot \cos 40° - \cos 180° \cdot \sin 40°) \\ &= 5 \cdot (0 \cdot 0{,}766 + (-1) \cdot 0{,}642) \\ &= 5 \cdot (-0{,}642) \\ &= -3{,}214 \end{aligned}$$



Untuk gaya P_2:

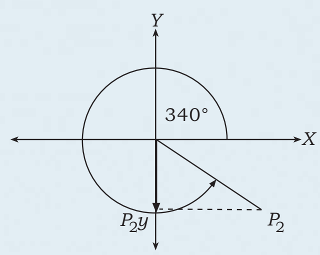
- Diuraikan pada sumbu X:

$$\begin{aligned} P_2x &= P_2 \cdot \cos \alpha_2 \\ &= 7 \cdot \cos 340° \\ &= 7 \cdot \cos (270° + 70°) \\ &= 7 \cdot (\cos 270° \cdot \cos 70° - \sin 270° \cdot \sin 70°) \\ &= 7 \cdot (0 \cdot 0{,}342 + 1 \cdot 0{,}939) \\ &= 7 \cdot (0{,}939) \\ &= 6{,}5779 \end{aligned}$$



- Diuraikan pada sumbu Y:

$$\begin{aligned} P_2y &= P_2 \cdot \sin \alpha_2 \\ &= 7 \cdot \sin 340° \\ &= 7 \cdot \sin (270° + 70°) \\ &= 7 \cdot (\sin 270° \cdot \cos 70° - \cos 270° \cdot \sin 70°) \\ &= 7 \cdot (-1 \cdot 0{,}342 + 0 \cdot 0{,}939) \\ &= 7 \cdot (-0{,}342) \\ &= -2{,}394 \end{aligned}$$



B. Rumus Trigonometri Sudut Rangkap

Di dalam trigonometri terdapat rumus yang menjadi dasar dari perkembangan trigonometri selanjutnya, yaitu **identitas trigonometri**.

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

Selanjutnya diturunkan rumus-rumus penting sebagai berikut.

a. $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

b. $$\begin{aligned} \cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \\ &= \cos^2 A - (1 - \cos^2 A) \\ &= \cos^2 A - 1 + \cos^2 A \\ &= 2 \cos^2 A - 1 \end{aligned}$$

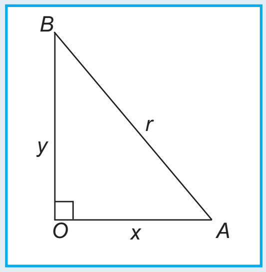
$$\begin{aligned} \cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \\ &= (1 - \sin^2 A) - \sin^2 A \\ &= 1 - 2 \sin^2 A \end{aligned}$$

c. $\cos^2 A = \frac{1}{2}(1 + \cos 2A)$

d. $\sin^2 A = \frac{1}{2}(1 - \cos 2A)$

e. $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$

Info



Identitas trigonometri akan kita buktikan sebagai berikut.

$\sin A = \frac{y}{r}$ dan $\cos A = \frac{x}{r}$

$$\begin{aligned} \sin^2 A + \cos^2 A &= \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 \\ &= \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} \\ &= \frac{y^2 + x^2}{r^2} \\ &= \frac{r^2}{r^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

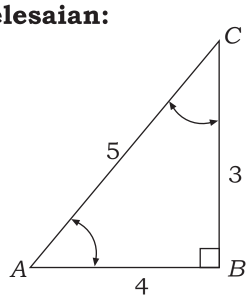
Contoh:

Diketahui $\sin A = \frac{3}{5}$ untuk A sudut lancip.

Tentukan nilai identitas trigonometri berikut!

a. $\sin 2A$
b. $\cos 2A$
c. $\tan 2A$

Penyelesaian:



$\cos A = \frac{4}{5}$

$\sin A = \frac{3}{5}$

$\tan A = \frac{3}{4}$

a. $\sin 2A = 2 \sin A \cdot \cos A = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$

b. $\cos 2A = 1 - 2 \sin^2 A = 1 - 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - 2\,\frac{9}{25} = \frac{25-18}{25} = \frac{7}{25}$

c. $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} = \dfrac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \dfrac{\frac{6}{4}}{\frac{16}{16} - \frac{9}{16}} = \frac{6}{4} \times \frac{16}{7} = \frac{24}{7}$

Aplikasi

1. Sebuah tegangan geser diberikan dengan rumus $\sigma = \gamma h \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha$. Jika diketahui $\sigma = 5$ N/m^2, h = 10 m, dan $\gamma = 2$ N/m^2, tentukan besar sudut yang dibentuk (α)!

Penyelesaian:

Rumus yang diketahui adalah:

$$
\begin{aligned}
& \sigma = \gamma h \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \\
\Leftrightarrow\ & 5 = 2 \cdot 10 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \\
\Leftrightarrow\ & 5 = 10 \cdot 2 \cos \alpha \cdot \sin \alpha \\
\Leftrightarrow\ & 5 = 10 \cdot \sin 2\alpha \\
\Leftrightarrow\ & \tfrac{1}{2} = \sin 2\alpha \\
\Leftrightarrow\ & \sin 30° = \sin 2\alpha \\
\Leftrightarrow\ & 30° = 2\alpha \\
\Leftrightarrow\ & \alpha = 15°
\end{aligned}
$$

Jadi, besar sudut yang dibentuk 15°.

2. Diketahui $e = \varepsilon_{max} \sin \omega t$ dan $i = I_{max} \sin \omega t$. Tentukan nilai $e \cdot i$!

Penyelesaian:

Rumus yang diketahui sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
e \cdot i &= \varepsilon_{max} \sin \omega t \cdot I_{max} \sin \omega t \\
&= \varepsilon_{max} \cdot I_{max} \cdot \sin \omega t \cdot \sin \omega t \\
&= \varepsilon_{max} \cdot I_{max} \cdot \sin^2 \omega t \\
&= \varepsilon_{max} \cdot I_{max} \cdot \left(\frac{1 - \cos 2\omega t}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Jadi, nilai $e \cdot i$ adalah $\varepsilon_{max} \cdot I_{max} \cdot \left(\frac{1 - \cos 2\omega t}{2}\right)$.

C. Rumus Perkalian Sinus dan Cosinus

a. $2 \sin A \cdot \cos B = \sin (A + B) + \sin (A - B)$
b. $2 \cos A \cdot \sin B = \sin (A + B) - \sin (A - B)$
c. $2 \cos A \cdot \cos B = \cos (A + B) + \cos (A - B)$
d. $-2 \sin A \cdot \sin B = \cos (A + B) - \cos (A - B)$

Contoh:

Nyatakan bentuk berikut sebagai rumus jumlah sinus!

a. $2 \cdot \sin 75° \cos 15°$
b. $\cos 2x \cdot \sin x$

Penyelesaian:

a.
$$
\begin{aligned}
2 \sin A \cos B &= \sin (A + B) + \sin (A - B) \\
2 \sin 75° \cos 15° &= \sin (75° + 15°) + \sin (75° - 15°) \\
&= \sin 90° + \sin 60° \\
&= 1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

b.
$$
\begin{aligned}
2 \cos A \cdot \sin B &= \sin (A + B) - \sin (A - B) \\
\cos A \sin B &= \tfrac{1}{2}\{(\sin (A + B) - \sin (A - B)\} \\
\cos 2x \sin x &= \tfrac{1}{2}\{(\sin (2x + x) - \sin (2x - x)\} \\
&= \tfrac{1}{2}(\sin 3x - \sin x) \\
&= \tfrac{1}{2}\sin 3x - \tfrac{1}{2}\sin x
\end{aligned}
$$

Aplikasi

Pada sebuah batang silinder diketahui besar nilai $e = \varepsilon_m \sin \omega$ dan $i = I_m \sin (\omega + \theta)$ dengan ε_m adalah modulus elastisitas dan I_m adalah momen inersia. Tentukan nilai $e \cdot i$!

Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
e \cdot i &= (\varepsilon_m \cdot \sin \omega)(I_m \cdot \sin(\ \omega + \theta)) \\
&= \varepsilon_m \cdot I_m \cdot \sin \omega\,(\sin \omega + \theta) \\
&= \varepsilon_m \cdot I_m \left(-\tfrac{1}{2}\right)(\cos(\omega + \text{w} + \theta) - \cos(\omega - (\omega + \theta))) \\
&= -\tfrac{1}{2}\,\varepsilon_m \cdot I_m \cdot (\cos(2\omega + \theta) - \cos \theta) \\
&= -\tfrac{1}{2}\,\varepsilon_m \cdot I_m \cdot (\cos \theta - \cos(2\omega + \theta))
\end{aligned}
$$

Jadi, nilai $e \cdot i$ adalah $-\frac{1}{2}\varepsilon_m \cdot I_m(\cos \theta - \cos(2\omega + \theta))$.

D. Rumus Penjumlahan dan Selisih Dua Sudut

a. $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \cdot \cos \frac{1}{2}(A - B)$

b. $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \cdot \sin \frac{1}{2}(A - B)$

c. $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \cdot \cos \frac{1}{2}(A - B)$

d. $\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \cdot \sin \frac{1}{2}(A - B)$

Contoh:

Hitunglah penjumlahan trigonometri berikut!

a. $\cos 75° + \cos 15°$

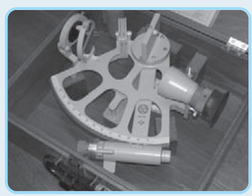
b. $\sin 75° + \sin 15°$

Penyelesaian:

a.
$$
\begin{aligned}
\cos A + \cos B &= 2 \cos \tfrac{1}{2}(A + B) \cdot \cos \tfrac{1}{2}(A - B) \\
\cos 75° + \cos 15° &= 2 \cos \tfrac{1}{2}(75 + 15) \cdot \cos \tfrac{1}{2}(75 - 15) \\
&= 2 \cos \tfrac{1}{2}(90) \cdot \cos \tfrac{1}{2}(60) \\
&= 2 \cos 45 \cdot \cos 30 \\
&= 2 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \tfrac{1}{2}\sqrt{6}
\end{aligned}
$$

b.
$$
\begin{aligned}
\sin A + \sin B &= 2 \sin \tfrac{1}{2}(A + B) \cdot \cos \tfrac{1}{2}(A - B) \\
\sin 75° + \sin 15° &= 2 \sin \tfrac{1}{2}(75 + 15) \cdot \cos \tfrac{1}{2}(75 - 15) \\
&= 2 \sin \tfrac{1}{2}(90) \cdot \cos \tfrac{1}{2}(60) \\
&= 2 \sin 45 \cdot \cos 30 \\
&= 2 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \\
&= \tfrac{1}{2}\sqrt{6}
\end{aligned}
$$

Info



Sumber: *www.wikipedia.org*

Marine Sextants

Alat pada gambar di atas disebut marine sextants. Alat ini digunakan untuk menghitung besar sudut matahari atau bintang yang diukur dari permukaan bumi. Dengan dilengkapi trigonometri dan ketepatan jurusan tiga angka maka posisi suatu kapal dapat ditentukan dengan menggunakan alat ini.

Aplikasi

Sepasang roda gigi memiliki kecepatan putar masing-masing $e_1 = 110\sqrt{2}\ sin\ (\omega t + \frac{\pi}{2})$ dan $e_2 = 110\sqrt{2}\ sin\ \omega t$. Tentukan $e_1 + e_2$!

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 &= 110\sqrt{2}\ sin\ (\omega t + \tfrac{\pi}{2}) + 110\sqrt{2}\ sin\ \omega t \\ &= 110\sqrt{2}\ (sin\ (\omega t + \tfrac{\pi}{2}) + sin\ \omega t) \\ &= 110\sqrt{2}\ [2 \cdot sin\ \tfrac{1}{2}(\omega t + \tfrac{\pi}{2} + \omega t) \cdot cos\ \tfrac{1}{2}(\omega t + \tfrac{\pi}{2} - \omega t)] \\ &= 220\sqrt{2}\ [sin\ \tfrac{1}{2}(2\omega t + \tfrac{\pi}{2}) \cdot cos\ \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{\pi}{2}] \\ &= 220 \cdot sin\ (\omega t + \tfrac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

Jadi, jumlah kecepatan putar sepasang roda gigi tersebut adalah $220 \cdot sin\ (\omega t + \frac{\pi}{4})$.

Latihan 6

Kerjakan soal-soal berikut!

1. Diketahui $tan\ A = -\frac{4}{5}$ dan $tan\ B = \frac{7}{24}$, dengan A sudut tumpul dan B sudut lancip. Tentukan nilai dari bentuk trigonometri berikut!
   a. $cos\ (A - B)$
   b. $sin\ (A + B)$
   c. $tan\ (A - B)$
2. Sederhanakan bentuk trigonometri berikut!
   a. $\dfrac{cos\ 75° - cos\ 15°}{sin\ 75° + sin\ 15°}$
   b. $\dfrac{sin\ 7A - sin\ 3A}{sin\ 9A + sin\ 3A}$
3. Diketahui $sin\ A = \frac{1}{2}$, $cos\ B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, A sudut tumpul, dan B sudut lancip. Tentukan nilai $cos\ (A - B)$!
4. Sebuah motor listrik 3 fase memerlukan arus (I) 50 A pada tegangan jala (U) = 220 volt dan $cos\ \theta$ = 0,8. Apabila pengukuran dilakukan dengan menggunakan 2 buah watt meter, tentukan nilai P_1 dan P_2 apabila diketahui persamaan berikut!
   $$\begin{cases} P_1 = UI\ cos\ (30° - \theta) \\ P_2 = UI\ cos\ (30° + \theta) \end{cases}$$
5. Jika $e = \varepsilon_{max}\ sin\ \omega t$ dan $i = I_{max}\ sin\ \omega t$, buktikan persamaan berikut!
   $p = ei = \dfrac{\varepsilon_{max} \cdot I_{max}}{2}(1 - cos 2\omega t)$

Kegiatan Belajar 6

Persamaan Trigonometri

Jembatan merupakan sarana penghubung antarwilayah yang dipisahkan oleh sungai atau jurang. Seiring bertambahnya waktu, bertambah pula teknologi pembangunan jembatan. Dalam merancang kerangka sebuah jembatan perhitungan yang dilakukan tidaklah mudah. Beban, tegangan, serta gaya yang bekerja pada jembatan menjadi pertimbangan utama para perancang untuk mengkonstruksikan model rancangannya. Proses ini didasarkan atas pengetahuan dari bangsa Romawi bahwa busur dapat menjangkau jarak yang lebih jauh dan menahan berat yang lebih berat daripada *lintel* (bentuk balok yang lurus horizontal). Atas dasar ini semakin banyak pula jembatan berbentuk busur yang dibangun. Penggunaan bentuk busur ini melibatkan kelengkungan yang perlu diperhitungkan kemiringan sudutnya yang diberikan dalam persamaan trigonometri. Lebih lanjut mengenai persamaan trigonometri akan kita pelajari pada uraian berikut.

Sumber: *www.image.tour.com*

Salah satu bentuk jembatan

Uraian Materi

Persamaan trigonometri adalah persamaan yang memuat satu atau beberapa fungsi trigonometri dari beberapa sudut yang belum diketahui.

1. Persamaan Trigonometri Bentuk Sederhana

a. Jika $\sin x = \sin \alpha$ maka himpunan penyelesaiannya

(i) $x = \alpha° + k \cdot 360°$ atau (ii) $x = (180° - \alpha°) + k \cdot 360°$

b. Jika $\cos x = \cos \alpha$ maka himpunan penyelesaiannya

(i) $x = \alpha° + k \cdot 360°$ atau (ii) $x = (-\alpha°) + k \cdot 360°$

c. Jika $\tan x = \tan \alpha$ maka himpunan penyelesaiannya

$x = \alpha + k \cdot 180°$ dengan k adalah bilangan bulat.

Atau

a. Jika $\sin x = \sin \alpha$ maka (i) $x = \alpha + k \cdot 2\pi$ atau
(ii) $x = (\pi - \alpha) + k \cdot 2\pi$

b. Jika $\cos x = \cos \alpha$ maka (i) $x = \alpha + k \cdot 2\pi$ atau
(ii) $x = -\alpha + k \cdot 2\pi$

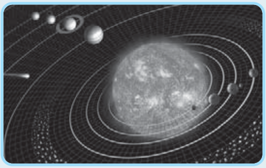
c. Jika $\tan x = \tan \alpha$ maka (i) $x = \alpha + y \cdot k\pi$

dengan k adalah bilangan bulat.

Info

Trigonometri pertama kali digunakan oleh bangsa Babilonia pada 1900 SM. Pemahaman yang dihasilkan berupa tabel secan. Trigonometri digunakan di Sri Lanka pada 6 SM untuk waduk, struktur hidrolik perairan, dan menghitung kemiringan permukaan bumi yaitu 6° untuk setiap mil.

Perlu Tahu



Sumber: *www.wikipedia.org*

Sistem Tata Surya

Trigonometri digunakan dalam berbagai macam bidang kehidupan. Sebagai contoh dalam bidang astronomi untuk menghitung jarak bintang, geografi untuk menghitung jarak antarpulau, dan ilmu fisika sebagai dasar teori fungsi periodik dalam pembahasan gelombang suara dan cahaya.

Contoh:

1. Tentukan himpunan penyelesaian $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ untuk $0 \le x \le 360°$!

   Penyelesaian:

   $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (untuk $0 \le x \le 360°$)
   $\sin x = \sin 60°$ maka berlaku:
   (i) $x = 60° + k \cdot 360°$
   - $k = 0 \rightarrow x = 60° + 0 \cdot 360° = 60°$
   - $k = 1 \rightarrow x = 60° + 1 \cdot 360° = 420°$ (tidak memenuhi karena $0 \le x \le 360°$)

   (ii) $x = (180° – 60°) + k \cdot 360°$
   - $k = 0 \rightarrow x = 120° + 0 \cdot 360° = 120°$
   - $k = 1 \rightarrow x = 120° + 1 \cdot 360° = 480°$ (tidak memenuhi karena $0 \le x \le 360°$)

   Jadi, himpunan penyelesaiannya {60°,120°}.

2. Diketahui $\cos x = \frac{1}{2}$. Tentukan himpunan penyelesaiannya!

   Penyelesaian:

   $\cos x = \frac{1}{2}$ (untuk $0 \le x \le 360°$)
   $\cos x = \cos 60°$ maka:
   (i) $x = 60° + k \cdot 360°$
   - $k = 0 \rightarrow = 60° + 0 \cdot 360° = 60°$
   - $k = 1 \rightarrow = 60° + 1 \cdot 360° = 420°$ (tidak memenuhi)

   (ii) $x = –60° + k \cdot 360°$
   - $k = 0 \rightarrow x = –60° + 0 \cdot 360° = –60°$ (tidak memenuhi)
   - $k = 1 \rightarrow x = –60° + 1 \cdot 360° = 300°$
   - $k = 2 \rightarrow x = –60° + 2 \cdot 360° = 660°$ (tidak memenuhi)

   Jadi, himpunan penyelesaiannya {60°,300°}.

3. Tentukan himpunan penyelesaian dari $\tan x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ untuk $0 \le x \le 2\pi$!

   Penyelesaian:

   $\tan x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ (untuk $0 \le x \le 2\pi$)

   $\Leftrightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{6}$, maka $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$

   $k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 0 \cdot \pi = \frac{\pi}{6}$

   $k = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 1 \cdot \pi = \frac{7\pi}{6}$

   $k = 2 \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2 \cdot \pi = \frac{13}{6}\pi$ (tidak memenuhi)

   Jadi, himpunan penyelesaiannya $\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\}$.

2. Persamaan Bentuk *sin px* = *a*, *cos px* = *a*, dan *tan px* = *a*

Untuk menyelesaikan persamaan trigonometri bentuk $\sin px = a$, $\cos px = a$, dan $\tan px = a$, dengan p dan a merupakan konstanta, terlebih dahulu persamaan harus diubah ke dalam bentuk dasar persamaan trigonometri.

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian persamaan berikut untuk $0 \le x \le 360°$!

a. $2 \sin 2x = \sqrt{3}$

b. $\cos 2x = \frac{1}{2}$

c. $\sqrt{3} \tan 3x = –1$

Penyelesaian:

a. $2 \sin 2x = \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \sin 2x = \sin 60°$.

Diperoleh:

(i) $2x = 60° + k \cdot 360°$

$\Leftrightarrow x = 30° + k \cdot 180°$

- $k = 0 \rightarrow x = 30° + 0 \cdot 180° = 30°$
- $k = 1 \rightarrow x = 30° + 1 \cdot 180° = 210°$
- $k = 2 \rightarrow x = 30° + 2 \cdot 180° = 390°$ (tidak memenuhi)

(ii) $2x = 120° + k \cdot 360°$

$\Leftrightarrow x = 60° + k \cdot 180°$

- $k = 0 \rightarrow x = 60° + 0 \cdot 180° = 60°$
- $k = 1 \rightarrow x = 60° + 1 \cdot 180° = 240°$
- $k = 2 \rightarrow x = 60° + 2 \cdot 180° = 420°$ (tidak memenuhi)

Jadi, himpunan penyelesaiannya {30°, 60°, 210°, 240°}.

b. $\cos 2x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos 2x = \cos 60°$.

Diperoleh:

(i) $2x = 60° + k \cdot 360°$

$x = 30° + k \cdot 180°$

- $k = 0 \rightarrow x = 30° + 0 \cdot 180° = 30°$
- $k = 1 \rightarrow x = 30° + 1 \cdot 180° = 210°$
- $k = 2 \rightarrow x = 30° + 2 \cdot 180° = 390°$ (tidak memenuhi)

(i) $2x = -60° + k \cdot 360°$

$x = -30° + k \cdot 180°$

- $k = 0 \rightarrow x = -30° + 0 \cdot 180° = -30°$ (tidak memenuhi)
- $k = 1 \rightarrow x = -30° + 1 \cdot 180° = 150°$
- $k = 2 \rightarrow x = -30° + 2 \cdot 180° = 330°$
- $k = 3 \rightarrow x = -30° + 3 \cdot 180° = 510°$ (tidak memenuhi).

Jadi, himpunan penyelesaian {30°, 150°, 210°, 330°}.

c. $\sqrt{3} \tan 3x = -1$

$\Leftrightarrow \tan 3x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \tan 3x = \tan 150°$

Diperoleh:

$3x = 150° + k \cdot 180°$

$\Leftrightarrow x = 50° + k \cdot 60°$

- $k = 0 \rightarrow x = 50° + 0 \cdot 60° = 50°$
- $k = 1 \rightarrow x = 50° + 1 \cdot 60° = 110°$
- $k = 2 \rightarrow x = 50° + 2 \cdot 60° = 170°$
- $k = 3 \rightarrow x = 50° + 3 \cdot 60° = 230°$
- $k = 4 \rightarrow x = 50° + 4 \cdot 60° = 290°$
- $k = 5 \rightarrow x = 50° + 5 \cdot 60° = 350°$
- $k = 6 \rightarrow x = 50° + 6 \cdot 60° = 410°$ (tidak memenuhi)

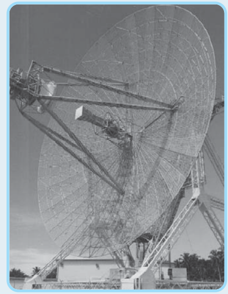
Jadi, himpunan penyelesaiannya {50°, 110°, 170°, 230°, 290°, 350°}

3. Persamaan Bentuk $\cos (x + a) + \cos (x + b) = c$ dan $\sin (x + a) + \sin (x + b) = c$

Untuk menyelesaikan persamaan trigonometri dengan bentuk $\cos (x + a) + \cos (x + b) = c$ dan $\sin (x + a) + \sin (x + b) = c$, kita ingat kembali rumus-rumus berikut.

$$\cos (A + B) + \cos (A - B) = 2 \cos A \cdot \cos B$$
$$\cos (A - B) - \cos (A + B) = 2 \sin A \cdot \sin B$$
$$\sin (A + B) + \sin (A - B) = 2 \sin A \cdot \cos B$$
$$\cos (A + B) - \sin (A - B) = 2 \cos A \cdot \sin B$$

Info

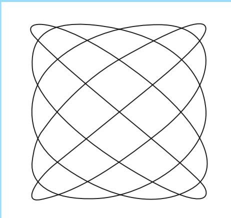


Sumber: *www.wikipedia.org*

Radio satelit

Radio satelit merupakan sarana komunikasi penting bagi para astronom. Dengan alat ini informasi yang diperoleh dari luar angkasa dapat diterima di bumi melalui sistem navigasi satelit. Ilmu trigonometri memiliki peran yang cukup besar dalam perancangan dan penggunaan alat ini.

Info

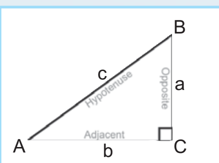


Sumber: *www.wikipedia.org*

Kurva Lissajous

Trigonometri sebagai fungsi dapat disajikan sebagai suatu kurva yang kontinu (selalu terhubung). Salah satunya adalah kurva Lissajous.

Perlu Tahu



Sumber: *Dokumentasi SMK*

Segitiga siku-siku

Trigonometri merupakan dasar bagi ilmu geometri. Hukum sinus dan cosinus dapat digunakan untuk mencari besar sudut dan sisi suatu segitiga. Dengan demikian hukum ini dapat digunakan secara luas pada geometri. Hal ini dikarenakan semua sisi pada bangun datar dapat dibentuk dari kombinasi dan bangun segitiga.

Contoh:

Tentukan penyelesaian persamaan berikut, untuk $0 \le x \le 360°$!

a. $\sin(60° + x) - \sin(60° - x) = 1$

b. $\sin 5x - \sin x = 0$

Penyelesaian:

a. $\sin(60° + x) - \sin(60° - x) = 1$

$\Leftrightarrow \quad 2\cos 60° \sin x = 1$

$\Leftrightarrow \quad 2 \cdot \frac{1}{2} \sin x = 1$

$\Leftrightarrow \quad \sin x = 1$

$\Leftrightarrow \quad \sin x = \sin 90°$

Diperoleh:

(i) $x = 90° + k \cdot 360°$
- $k = 0 \;\rightarrow\; x = 90° + 0 \cdot 360° = 90°$
- $k = 1 \;\rightarrow\; x = 90° + 1 \cdot 360° = 450°$ (tidak memenuhi)

(ii) $x = (180° - 90°) + k \cdot 360°$

$\Leftrightarrow \quad x = 90° + k \cdot 360°$
- $k = 0 \;\rightarrow\; x = 90° + 0 \cdot 360° = 90°$
- $k = 1 \;\rightarrow\; x = 90° + 1 \cdot 360° = 450°$ (tidak memenuhi)

Jadi, himpunan penyelesaiannya $\{90°\}$.

b. $\sin 5x - \sin - x = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin(3x + 2x) - \sin(3x - 2x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\cos 3x \cdot \sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos 3x = 0$ atau $\sin 2x = 0$

Untuk $\cos 3x = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos 3x = \cos 90°$, diperoleh:

(i) $3x = 90° + k \cdot 360°$

$\Leftrightarrow \quad x = 30° + k \cdot 120°$
- $k = 0 \;\rightarrow\; x = 30° + 0 \cdot 120° = 30°$
- $k = 1 \;\rightarrow\; x = 30° + 1 \cdot 120° = 150°$
- $k = 2 \;\rightarrow\; x = 30° + 2 \cdot 120° = 270°$
- $k = 3 \;\rightarrow\; x = 30° + 3 \cdot 120° = 390°$ (tidak memenuhi)

(ii) $3x = 90° + k \cdot 360°$

$\Leftrightarrow \quad x = -30° + k \cdot 120°$
- $k = 0 \;\rightarrow\; x = -30° + 0 \cdot 120° = -30°$ (tidak memenuhi)
- $k = 1 \;\rightarrow\; x = -30° + 1 \cdot 120° = 90°$
- $k = 2 \;\rightarrow\; x = -30° + 2 \cdot 120° = 210°$
- $k = 3 \;\rightarrow\; x = -30° + 3 \cdot 120° = 330°$
- $k = 4 \;\rightarrow\; x = -30° + 4 \cdot 120° = 450°$ (tidak memenuhi)

Untuk $\sin 2x = 0 \;\Leftrightarrow\; \sin 2x = \sin 0$, diperoleh:

(i) $2x = 0° + k \cdot 360°$

$\Leftrightarrow \quad x = k \cdot 180°$
- $k = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \cdot 120° = 30°$
- $k = 1 \;\rightarrow\; x = 1 \cdot 120° = 180°$
- $k = 2 \;\rightarrow\; x = 2 \cdot 120° = 360°$
- $k = 3 \;\rightarrow\; x = 3 \cdot 120° = 540°$ (tidak memenuhi)

(ii) $2x = (180° - 0) + k \cdot 360°$

$\Leftrightarrow \quad 2x = 180° + k \cdot 360°$

$\Leftrightarrow \quad x = 90° + k \cdot 180°$
- $k = 0 \;\rightarrow\; x = 90° + 0 \cdot 180° = 90°$
- $k = 1 \;\rightarrow\; x = 90° + 1 \cdot 180° = 270°$
- $k = 2 \;\rightarrow\; x = 90° + 2 \cdot 180° = 450°$ (tidak memenuhi)

Jadi, himpunan penyelesaiannya $\{0°, 30°, 90°, 150°, 180°, 210°, 270°, 330°, 360°\}$.

4. Persamaan Trigonometri Bentuk *a cos x* + *b sin x* = *c*

Untuk menyelesaikan persamaan $a \cos x + b \sin x = c$, persamaan tersebut harus diubah ke bentuk berikut.

$k \cos (x - \alpha) = c$ dengan $k = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\tan \alpha = \frac{b}{a} \rightarrow \alpha = \text{arc} \tan \frac{b}{a}$

Contoh:

Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan $\cos x - \sin x = 1$ untuk $0 \le x \le 360°$!

Penyelesaian:

Diketahui $\cos x - \sin x = 1$. Berdasarkan persamaan $a \cos x + b \sin x = c$, diperoleh $a = 1$, $b = -1$, dan $c = 1$.

Nilai $k = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

$\tan \alpha = \frac{b}{a} \rightarrow \tan \alpha = \frac{-1}{1} = -1$ (kuadran IV) maka $\alpha = 315°$

Diperoleh $k \cos (x - \alpha) = c$

$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot \cos (x - 315) = 1$

$\Leftrightarrow \cos x - \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \cos (x - 315) = \cos 45°$, maka:

(i) $x - 315° = 45° + k \cdot 360°$

$\Leftrightarrow x = 360° + k \cdot 360°$

- $k = 0 \rightarrow x = 360°$
- $k = 1 \rightarrow x = 360° + 1 \cdot 360° = 720°$ (tidak memenuhi)

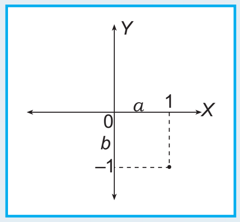
(ii) $x - 315° = -45° + k \cdot 360°$

$\Leftrightarrow x = 270° + k \cdot 360°$

- $k = 0 \rightarrow x = 270° + 0 \cdot 360° = 270°$
- $k = 1 \rightarrow x = 270° + 1 \cdot 360° = 630°$ (tidak memenuhi)

Jadi, himpunan penyelesaiannya {270°,360°}.

Kilas Balik



Nilai α berada di kuadran IV.

5. Persamaan Kuadrat dalam *sin*, *cos*, dan *tan*

Untuk mencari himpunan penyelesaian dari bentuk persamaan kuadrat dalam trigonometri, terlebih dahulu bentuk trigonometri (*sin*, *cos*, *tan*) harus dimisalkan dengan suatu peubah tertentu (misalnya *a*, *x*, *p*, dan sebagainya). Selanjutnya, bentuk persamaan kuadrat dalam bentuk peubah diselesaikan sesuai dengan rumus dasar untuk memperoleh akar-akar penyelesaiannya.

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$ untuk $0 \le x \le 360°$!

Penyelesaian:

Diketahui $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$.

Dimisalkan $\sin x = p$, maka $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow p^2 + p - 2 = 0$

$\Leftrightarrow p^2 + p - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (p + 2)(p - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (p + 2) = 0$ atau $(p - 1) = 0$

$\Leftrightarrow p = -2$ atau $p = 1$

Untuk

- $p = -2 \rightarrow \sin x = -2$ (tidak mungkin, karena $-1 \le \sin x \le 1$)
- $p = 1 \rightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \sin 90°$. Diperoleh:

(i) $x = 90° + k \cdot 360°$

- $k = 0 \rightarrow x = 90° + 0 \cdot 360° = 90°$
- $k = 1 \rightarrow x = 90° + 1 \cdot 360° = 450°$ (tidak memenuhi)

(ii) $x = 180° - 90° + k \cdot 360°$

$x = 90° + k \cdot 360°$

- $k = 0 \rightarrow x = 90° + 0 \cdot 360° = 90°$ (sama dengan (i))

Jadi, himpunan penyelesaiannya {90°}.

Latihan 7

Kerjakan soal-soal berikut!

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan trigonometri berikut!
   a. $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ untuk $0 \le x \le 360°$
   b. $\cos x = -\frac{1}{2}$ untuk $0 \le x \le 360°$
   c. $\tan x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ untuk $0 \le x \le \pi$
   d. $\sin 3x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ untuk $0 \le x \le \pi$
   e. $\sqrt{6}\cos 2x + \sqrt{3} = 0$ untuk $0 \le x \le 2\pi$
   f. $\sin 4x + \sin 2x = 0$ untuk $0 \le x \le 2\pi$
   g. $\cos 5x + \cos x = 0$ untuk $0 \le x \le \pi$
   h. $\tan 5x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ untuk $0 \le x \le 2\pi$
2. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan trigonometri berikut!
   a. $2\sin^2 x - 6\sin x - 4 = 0$ untuk $0 \le x \le 360°$
   b. $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$ untuk $0 \le x \le 360°$
   c. $\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3}$ untuk $0 \le x \le 360°$
   d. $\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x = 1$ untuk $0 \le x \le 360°$

Rangkuman

1. $\sin \alpha = \frac{y}{r}$
2. $\cos \alpha = \frac{x}{r}$
3. $\tan \alpha = \frac{y}{x}$
4. $y = r \, . \, \sin \alpha$
5. $x = r \, . \, \cos \alpha$
6.

Sudut α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

$\sin(90° - a) = \cos a°$
$\sin(180° + a) = -\sin a°$
$\cos(90° - a) = \sin a°$
$\cos(180° + a) = -\cos a°$
$\tan(90° - a) = \text{ctan } a°$
$\tan(180° + a) = \tan a°$

$\sin(180° - a) = \sin a°$
$\sin(360° - a) = \sin(-a) = -\sin a°$
$\cos(180° - a) = -\cos a°$
$\cos(360° - a) = \cos(-a) = \cos a°$
$\tan(180° - a) = -\tan a°$
$\tan(360° - a) = \tan(-a) = -\tan a°$

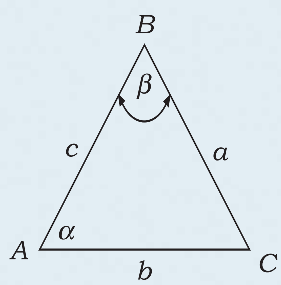
7. Koordinat kutub titik P $(r, \theta°)$ bila dinyatakan dengan koordinat cartesius $P(x, y)$ diperoleh hubungan: $x = r \cdot \cos \theta°$ dan $y = r \cdot \sin \theta°$.
   kutub → cartesius
   $P(r, \theta°) \rightarrow P(r \cdot \cos \theta°, r \cdot \sin \theta°)$

8. Koordinat cartesius titik P (x, y) bila dinyatakan dengan koordinat kutub $P(r, \theta°)$ diperoleh hubungan: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan $\tan \theta° = \frac{y}{x}$ dan nilai $\theta° = arc \cdot \tan \frac{y}{x}$.
   Cartesius → kutub
   $P(x, y) \rightarrow P\left(\sqrt{x^2 + y^2}, arc \cdot \tan \frac{y}{x}\right)$

9. Aturan sinus : $\rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

10. Aturan cosinus:
    a. $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot bc \cdot \cos A \quad \rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$
    b. $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot ac \cdot \cos B \quad \rightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}$
    c. $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot ab \cdot \cos C \quad \rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$

11. Luas segitiga $ABC = \frac{1}{2} c \cdot a \sin \beta$
    $\frac{1}{2} c \cdot b \sin \alpha$
    $\frac{1}{2} a \cdot b \sin \delta$



12. Rumus jumlah dan selisih dua sudut:
    a. $\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
    b. $\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
    c. $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
    d. $\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
    e. $\tan (A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B}$
    f. $\tan (A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \cdot \tan B}$

13. Rumus sudut rangkap:
    a. $\sin 2A = 2 \sin A \cos B$
    b. $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$
       $= 2 \cos^2 A - 1$
       $= 1 - 2 \sin 2 A$
    c. $\tan 2A = \frac{2 \tan \cdot A}{1 - \tan^2 A}$

14. Rumus perkalian sinus dan cosinus:
    a. $2 \sin A \cdot \cos B = \sin (A + B) + \sin (A - B)$
    b. $2 \cos A \cdot \sin B = \sin (A + B) - \sin (A - B)$
    c. $2 \cos A \cdot \cos B = \cos (A + B) + \cos (A - B)$
    d. $-2 \sin A \cdot \sin B = \cos (A + B) - \cos (A - B)$

15. Rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus:
    a. $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$
    b. $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A - B)$
    c. $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \,.\, \cos \frac{1}{2}(A - B)$
    d. $\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \,.\, \sin \frac{1}{2}(A - B)$

16. Identitas trigonometri:
    a. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
    b. $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
    c. $\operatorname{ctan} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$
    d. $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$
    e. $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$
    f. $\operatorname{ctan} \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$
    g. $\tan \alpha = \frac{1}{c \tan \alpha}$
    h. $\tan^2 \alpha + 1 = \operatorname{cosec}^2 \alpha$
    i. $\operatorname{ctan}^2 \alpha + 1 = \operatorname{cosec}^2 \alpha$

17. Rumus dasar penyelesaian persamaan trigonometri:
    a. $\sin x = \sin \alpha$, maka:
        1) $x = \alpha + k \cdot 360°$ atau $x = \alpha + k \cdot 2\pi$
        2) $x = 180° - \alpha + k \cdot 360°$ atau $x = \pi \cdot \alpha + k \cdot 2\pi$
    b. $\cos x = \cos$ a, maka:
        1) $x = \alpha + k \cdot 360°$ atau $x = \alpha + k \cdot 2\pi$
        2) $x = -\alpha + k \cdot 360°$ atau $x = -\alpha + k \cdot 2\pi$
    c. $\tan$ x $= \tan \alpha$, maka:
        $x = \alpha + k \cdot 180°$ atau $x = \alpha + k \cdot \pi$

18. Rumus pengubah bentuk penjumlahan menjadi perkalian trigonometri:
    a. $\cos (A + B) + \cos (A - B) = 2 \cos A \cdot \cos B$
    b. $\cos (A - B) - \cos (A + B) = 2 \sin A \cdot \sin B$
    c. $\sin (A + B) + \sin (A - B) = 2 \sin A \cdot \cos B$
    d. $\sin (A + B) - \sin (A - B) = 2 \cos A \cdot \sin B$

    Untuk menyelesaikan $a \cos x + b \sin x = c$ diubah menjadi $k \cos (x - a)$ $= c$ dengan $k = \sqrt{a^2 + b^2}$ dan $\tan \alpha = \frac{b}{a}$.

Evaluasi Kompetensi

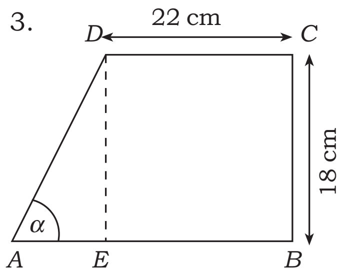
A. ***Pilihlah jawaban yang tepat!***

1. Nilai dari *cos* 135° adalah . . . .

   a. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
   b. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
   c. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
   d. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   e. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

2. Jika $\tan\alpha = -\frac{5}{13}$ (di kuadran IV) maka $\sec\alpha$ = ...

   a. $-\frac{13}{5}$
   b. $-\frac{12}{5}$
   c. $\frac{12}{13}$
   d. $\frac{13}{12}$
   e. $\frac{13}{5}$

3. 

   Selembar triplek seperti gambar dengan α = 60°, *BC* = 18 cm, dan *CD* = 22 cm. Panjang *AB* adalah . . . cm.

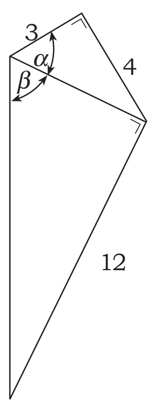
   a. $18\sqrt{3}$
   b. $20\sqrt{3}$
   c. $(22 + 6\sqrt{3})$
   d. $28\sqrt{3}$
   e. 40

4. Koordinat cartesius titik (4,330°) adalah . . . .

   a. $(2\sqrt{3},-2)$
   b. $(2\sqrt{3},2)$
   c. $(-1,-2\sqrt{3})$
   d. $(-2,2\sqrt{3})$
   e. $(2,2\sqrt{3})$

5. Koordinat kutub titik $(-1,-\sqrt{3})$ adalah . . . .

   a. (4,210°)
   b. (2,240°)
   c. (2,225°)
   d. (5,240°)
   e. (2,210°)

6. 

   Nilai *cos* $(\alpha - \beta)$ pada bentuk seperti gambar di samping adalah . . . .

   a. $-\frac{16}{65}$
   b. $\frac{33}{65}$
   c. $\frac{63}{65}$
   d. $-\frac{48}{65}$
   e. $\frac{56}{65}$

7. Jika $\tan^2 x + 1 = a^2$ maka $\sin^2 x$ = ...

   a. $\frac{(1-a^2)}{a^2}$
   b. $-\frac{a^2}{(a^2+1)}$
   c. $\frac{1}{a^2}$
   d. $\frac{a^2}{(a^2+1)}$
   e. $\frac{(a^2-1)}{a^2}$

8. Faktor daya dari suatu motor listrik dinyatakan dengan rumus $(p_1 + p_2)$ $\tan\theta = \sqrt{3}(p_1 - p_2)$. Jika $p_1 = 6$ km dan $p_2 = 3$ km maka besarnya θ adalah . . . .
   a. 15°
   b. 60°
   c. 30°
   d. 90°
   e. 45°

9. Pada segitiga ABC diketahui $a + b = 10$ cm, sudut $A = 30°$ dan $B = 45°$ maka panjang $b = . . .$ cm.
   a. $5(\sqrt{2} - 1)$
   b. $5(2 - \sqrt{2})$
   c. $10(2 - \sqrt{2})$
   d. $10(\sqrt{2} + 2)$
   e. $10(\sqrt{2} + 1)$

10. $\dfrac{(1-\cos x)}{\sin x} = ...$
   a. $\dfrac{(1-\cos x)}{\sin x}$
   b. $\dfrac{-\cos x}{1-\sin x}$
   c. $\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$
   d. $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$
   e. $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

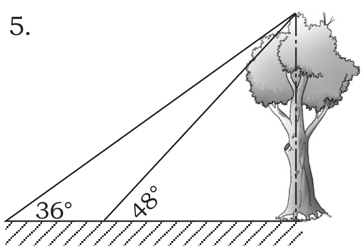
B. ***Kerjakan soal-soal berikut!***

1. Jika $\sin\alpha = \dfrac{8}{17}$ dan $\cos\beta = \dfrac{3}{5}$ untuk α dan β sudut lancip, tentukan nilai dari bentuk trigonometri di bawah ini!
   a. $\sin\alpha\ \cos\beta - \cos\alpha - \sin\beta$
   b. $2\sin\beta\ \cos\beta$
   c. $\dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

2. Tentukan luas $\Delta\ ABC$ jika diketahui unsur-unsurnya sebagai berikut!
   a. $a = 7$ cm, $b = 9$ cm, dan $\delta = 72°$
   b. $b = 24$ cm, $c = 30$ cm, dan $\alpha = 45°$
   c. $c = 40$ cm, $a = 14$ cm, dan $\beta = 60°$

3. Sederhanakanlah!
   a. $\dfrac{\cos 75° - \cos 15°}{\sin 75° + \sin 15°}$
   b. $\dfrac{\sin 7A - \sin 3A}{\sin 9A + \sin 3A}$

4. Buktikan bentuk persamaan berikut!
   a. $\cos A\,(1 - \tan A) = \cos A - \sin A$
   b. $2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$
   c. $\dfrac{\tan A + \cot A}{\tan A - \cot A} = \dfrac{1}{2\sin^2 A - 1}$

5. 

Daffa mengamati puncak sebatang pohon dengan membentuk sudut elevasi 36° dengan permukaan tanah. Daffa bergerak mendekati pohon sejauh 30 m dengan membentuk sudut elevasi yang baru sebesar 48°. Hitunglah tinggi pohon!

Bab II

Fungsi

Sumber: *www.abltechnology.com*

Mesin Frais CNC

Di dalam memroduksi bentuk suatu benda dikenal adanya beberapa jenis mesin produksi, antara lain mesin *milling* CNC, mesin frais, dan mesin bubut. Mesin bubut adalah salah satu alat perkakas yang bersifat universal. Mesin ini digunakan untuk menghasilkan benda-benda berbentuk silindris, ulir, kerucut, dan bola. Sedangkan mesin frais digunakan untuk menghasilkan benda-benda berbentuk bidang-bidang datar atau bengkok sebelah, antara lain alur sambungan, bidang rata, dan roda gigi. Dari penjelasan tersebut dapat diambil kesimpulan bahwa mesin bubut dan mesin frais dapat menghasilkan bermacam-macam benda kerja. Sebaliknya, satu benda kerja hanya dapat dihasilkan oleh satu mesin produksi. Jika hal tersebut dikaitkan dalam matematika, benda kerja diumpamakan sebagai fungsi dari mesin produksi.

Di dalam matematika fungsi terdiri atas berbagai macam, antara lain fungsi linear, fungsi kuadrat, fungsi eksponen, fungsi logaritma, dan fungsi trigonometri. Lebih lanjut mengenai fungsi akan kita pelajari pada bab berikut.

Kegiatan Belajar 1

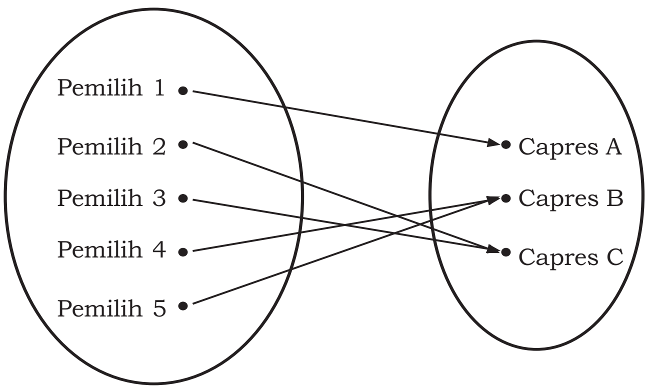
Pengertian Relasi dan Fungsi

Sumber: *www.cetro.go.id*

Proses penghitungan suara di salah satu TPS

Pemilu (Pemilihan Umum) di Indonesia diadakan setiap lima tahun sekali. Pada pesta demokrasi ini para pemilih yang memenuhi syarat berhak untuk memilih salah satu calon presiden (capres) yang akan menjabat sebagai kepala negara Indonesia selama lima tahun ke depan. Di dalam proses pemilu, perhitungan suara dilakukan setelah menyelesaikan pencatatan hasil surat suara yang dinyatakan sah. Salah satu syarat surat suara dinyatakan sah apabila pemilih hanya mencoblos satu gambar calon presiden dan tidak boleh lebih.

Uraian di atas dapat menyatakan hubungan sebagai berikut. Seorang pemilih hanya berhak memilih satu calon presiden, sedangkan satu calon presiden dapat dipilih oleh lebih dari seorang pemilih. Diagram ilustrasi keadaan tersebut sebagai berikut.



Penulisan diagram seperti di atas dan sifat-sifat yang berlaku di dalamnya disebut fungsi dan penghubung antara pemilih dengan capres (ditunjukkan dengan panah) disebut relasi.

Uraian Materi

A. Pengertian Relasi dan Fungsi

1. Relasi

Untuk memahami konsep relasi, perhatikanlah contoh berikut. Diketahui dua buah himpunan, himpunan A yang beranggotakan nama-nama anak, yaitu Nia, Doni, Cica, dan himpunan B beranggotakan jenis-jenis makanan, yaitu bakso, mi, dan soto. Kedua himpunan tersebut apabila ditulis dalam bentuk himpunan, diperoleh:

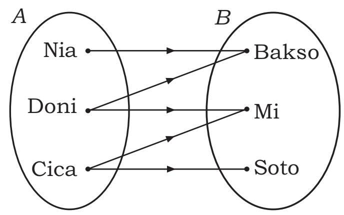
A = {Nia, Doni, Cica}

B = {bakso, mi, soto}

Ketiga anak tersebut diberi pertanyaan tentang makanan kesukaannya dan diperoleh hasil sebagai berikut.

1. Nia suka makan bakso.
2. Doni suka makan bakso dan mi.
3. Cica suka makan mi dan soto.

Hasil tersebut dapat ditulis dalam bentuk diagram sebagai berikut.

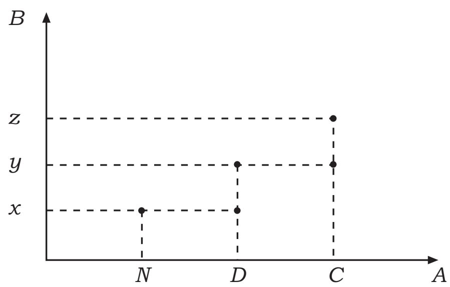


Himpunan A dan himpunan B dalam diagram di atas menggunakan relasi yang dinyatakan dengan **diagram panah**. Diagram panah di atas menyatakan bahwa himpunan *A* berelasi "**suka makan**" dengan himpunan *B*.

Dari uraian tersebut, diperoleh pengertian mengenai relasi sebagai berikut.

Suatu relasi dari himpunan *A* ke himpunan *B* adalah pasangan atau korespondensi anggota *A* dengan anggota *B*. Daerah himpunan *A* disebut **domain (daerah asal)**. Daerah himpunan *B* disebut **kodomain (daerah kawan)**.

Selain dengan diagram panah suatu relasi dapat dinyatakan dalam **pasangan berurutan** dan **grafik** sebagai berikut.
Relasi dalam pasangan berurutan:
R = {(Nia, bakso), (Doni, bakso), (Doni, mi), (Cica, mi), (Cica, soto)}.
Relasi dalam grafik:
Dalam bentuk grafik berikut Nia, Doni, dan Cica dilambangkan dengan N, D, dan C, dan makanan bakso, mi, dan soto dilambangkan oleh x, y, dan z.



Relasi dari dua himpunan ditulis dengan lambang "R" sesuai dengan pengertian berikut.

Relasi dari A ke B adalah himpunan bagian dari "$A \times B$" ditulis $R \subset A \times B$. Apabila $A = B$ maka relasi dari A ke B disebut relasi pada A atau relasi pada B.

Dalam bentuk pasangan berurutan, relasi secara grafik di atas dapat ditulis sebagai berikut.
$R = \{(N, x), (D, x), (D, y), (C, y), (C, z)\}$

Contoh:

Diketahui himpunan $A = \{2, 3, 4\}$ dan himpunan $B = \{2, 3, 4, 6\}$.

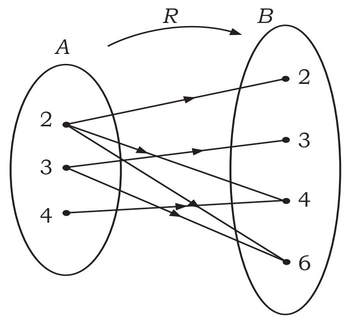
a. Dengan diagram panah, tunjukkan relasi "faktor dari" himpunan A ke himpunan B!
b. Tuliskan relasi di atas dalam bentuk pasangan berurutan!
c. Jika pasangan berurutan dinyatakan sebagai himpunan R maka tentukan $n(R)$! $n(R)$ = banyaknya himpunan anggota R.
d. Gambarkan grafik relasi di atas!

Perlu Tahu

$n(R)$ menyatakan banyaknya anggota dari relasi R.

Penyelesaian:

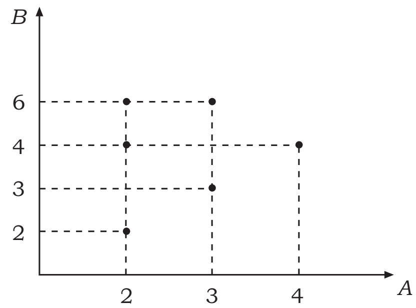
a. $A = \{2, 3, 4\}$
   $B = \{2, 3, 4, 6\}$



b. $R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}$

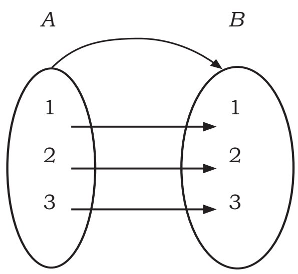
c. $n(R)$ = 6, yaitu banyaknya anggota himpunan R

d.

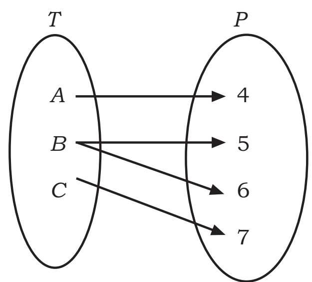


2. Fungsi atau Pemetaan

Untuk memahami pengertian fungsi, perhatikan gambar berikut.



(i)



(ii)

Pada gambar (i) dapat dilihat bahwa setiap anggota himpunan A berpasangan dengan tepat satu anggota himpunan B. Relasi yang memiliki ciri demikian disebut dengan **fungsi** atau **pemetaan**.

Pada gambar (ii) dapat dilihat bahwa sebuah anggota himpunan T berpasangan dengan dua anggota himpunan P. Dalam hal demikian relasi pada gambar (ii) bukan merupakan fungsi. Dari uraian di atas dapat didefinisikan sebagai berikut.

Relasi dari himpunan A ke himpunan B disebut fungsi atau pemetaan jika dan hanya jika setiap anggota himpunan A berpasangan tepat hanya satu dengan anggota himpunan B.
Atau:
Fungsi atau pemetaan dari himpunan A ke himpunan B adalah relasi yang memasangkan setiap $x \in A$ dengan tepat satu $y \in B$.

Jadi, fungsi adalah keadaan khusus dari relasi. Dalam fungsi, setiap anggota daerah hanya memunyai tepat satu pasangan dengan anggota daerah kawan. Fungsi yang memetakan setiap $x \in A$ ke $y \in B$ dinotasikan:

a. $f: x \rightarrow y$ atau
b. $f: x \rightarrow f(x)$

Contoh:

Diketahui fungsi $f(x) = 2x + 5$ dengan $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Tentukan hasil:

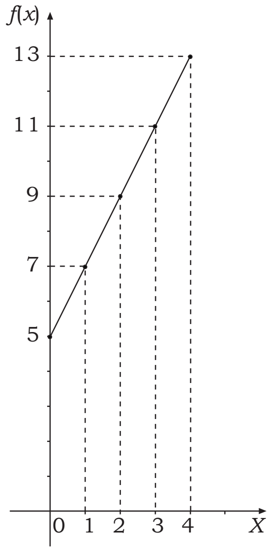
a. daerah asal,
b. daerah hasil, dan
c. grafiknya.

Penyelesaian:

a. Daerah asal $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

b. $f(x) = 2x + 5$
$f(0) = 2 \cdot 0 + 5 = 5$
$f(1) = 2 \cdot 1 + 5 = 7$
$f(2) = 2 \cdot 2 + 5 = 9$
$f(3) = 2 \cdot 3 + 5 = 11$
$f(4) = 2 \cdot 4 + 5 = 13$
Daerah hasil = $\{5, 7, 9, 11, 13\}$

c.



B. Macam-Macam Fungsi

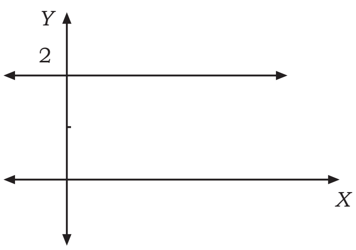
Dalam matematika terdapat bermacam-macam fungsi, dua di antaranya sebagai berikut.

1. Fungsi Konstan

Fungsi konstan dapat dirumuskan $\boxed{f(x) = c}$ untuk setiap $x \in D(f)$.
(c = konstanta, $D(f)$ = domain)

Contoh:

$f(x) = 2$, berapa pun nilai x maka nilai fungsinya tetap 2.

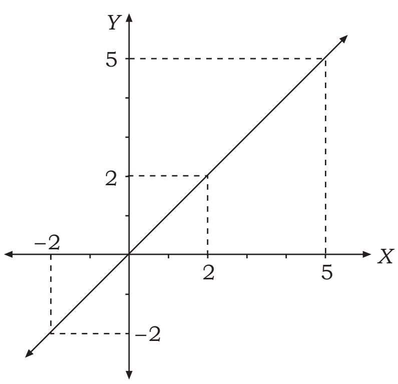


2. Fungsi Identitas

Fungsi identitas memetakan setiap $x \in D(f)$ ke dirinya sendiri dan dirumuskan $\boxed{f(x) = x}$.

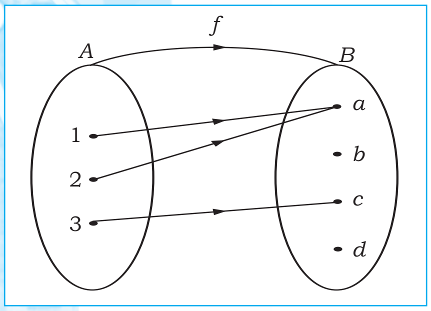
Contoh:

$f(x) = x$, maka $f(2) = 2$, $f(5) = 5$, $f(-2) = -2$, dan seterusnya.



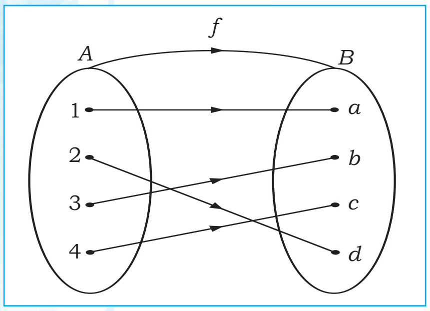
C. Sifat-Sifat Fungsi

Berikut ini beberapa sifat fungsi.



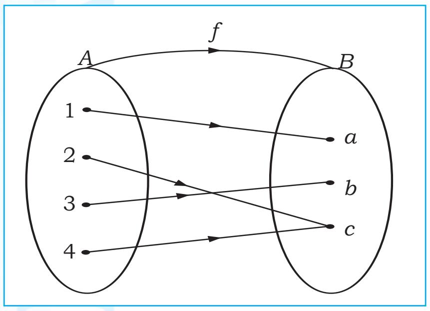
1. Fungsi Onto

Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$.
Fungsi $f: x \in A \rightarrow y \in B$ disebut **fungsi onto** jika ada $y \in B$ bukan pasangan dari $x \in A$.
Perhatikan gambar di samping, dalam himpunan A terdapat b dan d yang bukan merupakan peta dari himpunan A.
$f = \{(1, a), (2, a), (3, c)\}$



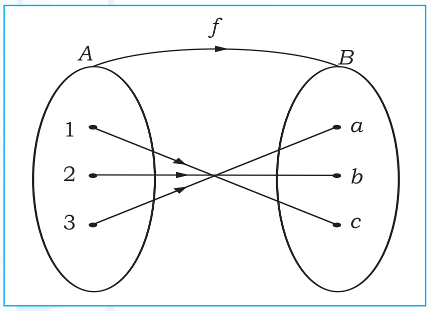
2. Fungsi Injektif

Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$.
Fungsi $f: x \in A \rightarrow y \in B$ disebut **fungsi injektif** jika setiap $y \in B$ memiliki kawan tunggal di $x \in A$. Fungsi injektif disebut juga fungsi satu-satu. Apabila $f(x_1) = f(x_2)$ maka $x_1 = x_2$ atau jika $f(x_1) \neq f(x_2)$ maka $x_1 \neq x_2$.
$f = \{(1, a), (2, d), (3, b), (4, c)\}$



3. Fungsi Surjektif

Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{a, b, c\}$.
Fungsi $f: x \in A \rightarrow y \in B$ disebut **fungsi surjektif** jika setiap $y \in B$ memiliki pasangan $x \in A$ atau setiap anggota himpunan daerah kawan memiliki pasangan di daerah asal.
$f = \{(1, a), (2, c), (3, b), (4, c)\}$



4. Fungsi Bijektif

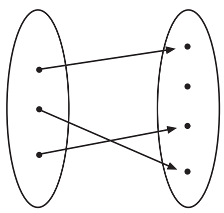
Fungsi $f: x \in A \rightarrow y \in B$ disebut **fungsi bijektif** jika fungsi tersebut injektif sekaligus surjektif (korespondensi satu-satu) dengan ketentuan $n(A) = n(B)$.
$f = \{(1, c), (2, b), (3, a)\}$

Latihan 1

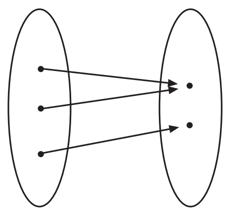
Kerjakan soal-soal berikut!

1. Dari fungsi-fungsi yang disajikan dalam diagram panah berikut, manakah yang merupakan fungsi onto, injektif, atau bijektif?

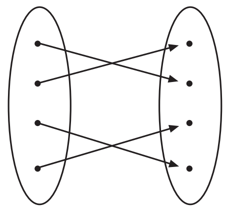
a.



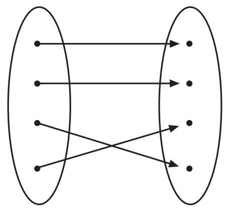
b.



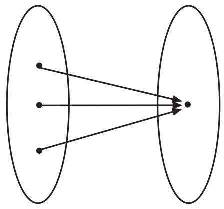
c.



e.

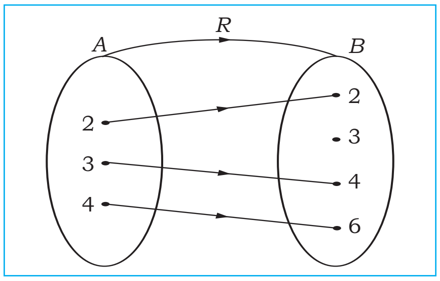


d.



2. Suatu relasi R dinyatakan dalam himpunan pasangan berurutan $R = \{(a, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 2), (a, 6), (d, 7)\}$.
   a. Tentukan domain dari R!
   b. Tentukan kodomain dari R!
   c. Apakah R merupakan fungsi?

3. Suatu relasi R dinyatakan dengan diagram panah di samping.
   a. Apakah R merupakan fungsi?
   b. Jika R fungsi, nyatakan R sebagai rumus $f(x)$.



4. Tuliskan range fungsi dari $f(x) = 4x - 2$ jika diketahui ketentuan sebagai berikut!
   a. Domain fungsi Df; $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
   b. Domain fungsi Df; $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$
   c. Domain fungsi Df; $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

5. Gambarlah grafik fungsi $f(x) = x^2 - 4$ dengan domain fungsi sebagai berikut!
   a. Df; $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
   b. Df; $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$
   c. Df; $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

Kegiatan Belajar 2	Fungsi Linear

Sumber: *www.motogranprix.com*

Pembalap sedang berlaga di arena balap

Di arena balap, setiap pembalap tentunya ingin memacu laju kendaraan dengan secepat-cepatnya. Akan tetapi, ada saat pembalap harus mengurangi kecepatan laju kendaraannya seperti ketika berada di tikungan. Hal ini dilakukan untuk menghindari selip (hilangnya kontrol terhadap kendaraan). Dengan demikian, kecepatan kendaraan yang dipacu oleh pembalap dari detik pertama ia menjalankan kendaraan hingga detik ke-t besarnya berubah-ubah. Hubungan antara kecepatan (v) dengan waktu (t) dapat kita gambarkan dalam koordinat cartesius dengan waktu (t) sebagai sumbu X dan kecepatan (v) sebagai sumbu Y. Apabila titik-titik yang bersesuaian saling dihubungkan maka akan kita peroleh grafik berupa garis lurus yang disebut grafik fungsi linear. Apakah yang dimaksud dengan fungsi linear? Sifat apa sajakah yang dimiliki oleh fungsi linear? Untuk menemukan jawabannya terlebih dahulu kita pelajari uraian berikut.

Uraian Materi

A. Grafik Fungsi Linear

Bentuk umum persamaan fungsi linear ditulis: $y = ax + b$ dengan a dan $b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Grafik fungsi linear berupa garis lurus yang diperoleh dengan menghubungkan titik potong dengan sumbu X dan sumbu Y pada koordinat cartesius. Perhatikan contoh berikut.

Contoh:

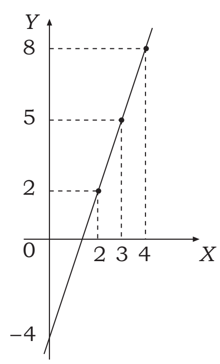
Gambarlah grafik yang persamaannya $y = 3x - 4$.

Untuk menggambar grafik fungsi linear dapat digunakan dua cara, yaitu dengan:

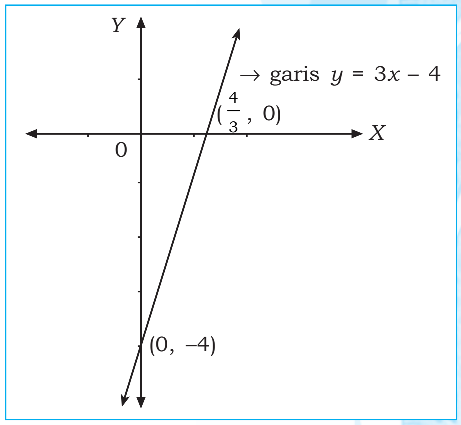
1. Tabel.

   Persamaan garis adalah $y = 3x - 4$.

$y = 3x - 4$		
x	y	Titik
0	–4	(0, –4)
1	–1	(1, –1)
2	2	(2, 2)
3	5	(3, 5)
4	8	(4, 8)



2. Menentukan titik potong dengan sumbu X dan sumbu Y.



a. Perpotongan dengan sumbu X, syaratnya $y = 0$.

$\Leftrightarrow \quad y = 3x - 4$
$\Leftrightarrow \quad 0 = 3x - 4$
$\Leftrightarrow \quad 3x = 4$
$\Leftrightarrow \quad x = \frac{4}{3}$

Jadi, koordinat titik potongnya $(\frac{4}{3}, 0)$.

b. Perpotongan dengan sumbu Y, syaratnya $x = 0$.

$\Leftrightarrow \quad y = 3x - 4$
$\Leftrightarrow \quad y = 3 \cdot 0 - 4$
$\Leftrightarrow \quad y = -4$

Jadi, koordinat titik potongnya (0, –4).

Jika titik potong sumbu X dan titik potong sumbu Y dihubungkan maka terbentuklah garis $y = 3x - 4$.

B. Gradien

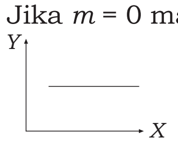
Gradien adalah angka kemiringan grafik atau koefisien arah garis. Gradien disebut juga kemiringan garis terhadap sumbu X positif. Gradien dinotasikan dengan huruf m.

Jika sudut yang dibentuk antara garis terhadap sumbu X positif dinyatakan dengan $\alpha°$ dan gradien dinyatakan m, maka:

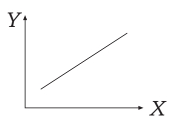
$$m = \tan \alpha° = \frac{komponen\ y}{komponen\ x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Sifat-sifat grafik fungsi linear berdasarkan nilai m sebagai berikut.

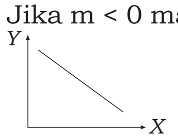
1. Jika $m = 0$ maka grafik sejajar sumbu X.



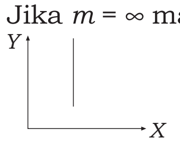
2. Jika $m > 0$ maka grafik condong ke kanan ($0° < \alpha < 90°$).



3. Jika m < 0 maka grafik condong ke kiri ($90° < \alpha < 180°$).



4. Jika $m = \infty$ maka grafik sejajar sumbu Y.



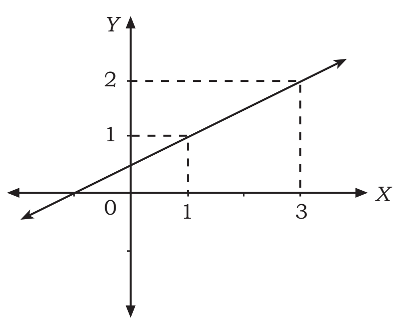
Contoh:

Hitung gradien garis lurus yang melalui titik $A(3, 2)$ dan $B(1, 1)$!

Penyelesaian:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-2}{1-3} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Diperoleh grafik seperti di samping.



C. Menentukan Persamaan Garis Melalui Satu Titik dengan Gradien *m*

Persamaan garis melalui satu titik $A\ (x_1,\ y_1)$ dengan gradien m, dapat ditentukan dengan rumus:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Jika melalui titik $O(0,\ 0)$ dengan gradien m maka persamaannya $y = mx$.

Contoh:

Tentukanlah persamaan garis yang melalui titik $P(-2,\ 1)$ dan memiliki gradien 2!

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow\quad y - y_1 &= m(x - x_1) \\ \Leftrightarrow\quad y - 1 &= 2 \cdot (x - (-2)) \\ \Leftrightarrow\quad y &= 2x + 2 + 1 \\ \Leftrightarrow\quad y &= 2x + 3 \end{aligned}$$

Jadi, persamaan garis yang terbentuk adalah $y = 2x + 3$.

D. Menentukan Persamaan Garis yang Melalui Dua Titik

Persamaan garis yang melalui dua titik $A(x_1,\ y_1)$ dan $B(x_2,\ y_2)$ dapat ditentukan dengan rumus:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \text{ atau } y - y_1 = m(x - x_1) \text{ dengan } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Persamaan garis yang melalui $A(a,\ 0)$ dan titik $B(0,\ b)$ adalah $bx + ay = ab$ atau $y = -\frac{b}{a}x + ab$.

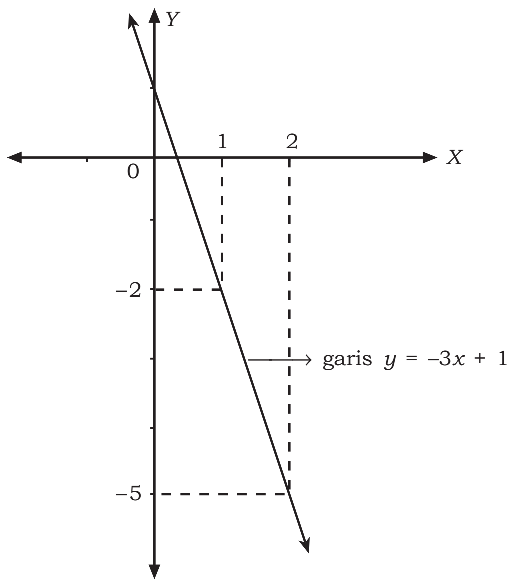
Contoh:

Tentukan persamaan garis yang melalui titik $A(1,\ -2)$ dan $B(2,\ -5)$!

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\ \Leftrightarrow\quad \frac{y - (-2)}{-5 - (-2)} &= \frac{x - 1}{2 - 1} \\ \Leftrightarrow\quad \frac{y + 2}{-3} &= \frac{x - 1}{1} \\ \Leftrightarrow\quad y + 2 &= -3(x - 1) \\ \Leftrightarrow\quad y &= -3x + 3 - 2 \\ \Leftrightarrow\quad y &= -3x + 1 \end{aligned}$$

Jadi, persamaan garis yang terbentuk adalah $y = -3x + 1$ dengan grafik seperti di samping.



E. Menentukan Sudut yang Dibentuk oleh Grafik Fungsi

Besarnya sudut yang dibentuk oleh grafik fungsi linear atau garis terhadap sumbu X positif dapat ditentukan dengan gradiennya.

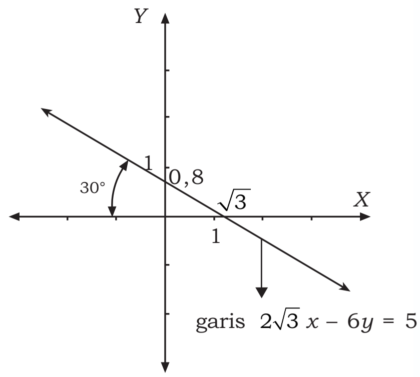
$$\tan \alpha = m \Leftrightarrow \alpha = \text{arc} \tan m$$

Contoh:

Tentukan besarnya sudut yang dibentuk oleh garis $2\sqrt{3}\,x - 6y = 5$!

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3}\,x - 6y &= 5 \\ \Leftrightarrow \quad -6y &= 5 - 2\sqrt{3}\,x \\ \Leftrightarrow \quad y &= \tfrac{1}{3}\sqrt{3}\,x + \tfrac{5}{6} \end{aligned}$$



Dengan melihat hasil akhir persamaan maka

$$\begin{aligned} m &= \tfrac{1}{3}\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \tan\alpha &= \tfrac{1}{3}\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \quad \alpha &= \text{arc } \tan \tfrac{1}{3}\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \quad \alpha &= 30° \end{aligned}$$

F. Menentukan Titik Potong Dua Garis

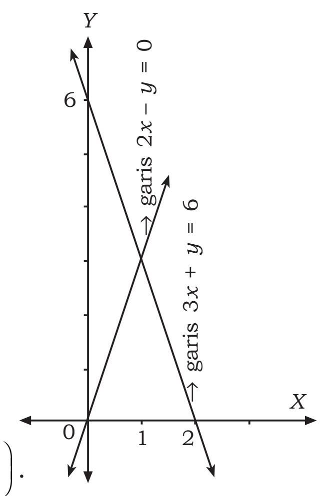
Titik potong dua buah garis dapat ditentukan dengan cara eliminasi dan substitusi.

Contoh:

Tentukan titik potong garis $3x + y = 6$ dengan garis $2x - y = 0$!

Penyelesaian:

$$\begin{array}{rcl|c|rcl} 3x + y &=& 6 & \times 2 & 6x + 2y &=& 12 \\ 2x - y &=& 0 & \times 3 & 6x - 3y &=& 0 \quad - \\ \hline & & & & 5y &=& 12 \\ & & & \Leftrightarrow & y &=& \frac{12}{5} \end{array}$$



Dapat dicari nilai x sebagai berikut.

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x - \left(\frac{12}{5}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad 2x &= \frac{12}{5} \\ \Leftrightarrow \quad x &= \frac{12}{10} \end{aligned}$$

Jadi, kedua garis berpotongan di koordinat $\left(\frac{12}{10}, \frac{12}{5}\right)$.

G. Hubungan Dua Garis

1. Hubungan Dua Garis Berpotongan Tegak Lurus

Dua garis saling berpotongan tegak lurus jika $m_1 \cdot m_2 = -1$ (hasil kali kedua gradien sama dengan –1). Dengan kata lain kedua garis saling membentuk sudut siku-siku (90°).

Contoh:

Tentukanlah persamaan garis yang melalui titik (–1, 2) dan tegak lurus terhadap garis $3y - 6x + 9 = 0$!

Penyelesaian:

Misal garis $3y - 6x + 9 = 0$ dinyatakan dengan garis ℓ.

Menentukan gradien diperoleh dengan mengubah persamaan $3y - 6x + 9 = 0$ ke bentuk umum persamaan garis $y = mx + c$, yaitu:

$$\begin{aligned} 3y - 6x + 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad y &= 2x - 3 \quad (\text{gradien garis } \ell(m_1) = 2) \end{aligned}$$

Dua garis tegak lurus jika:

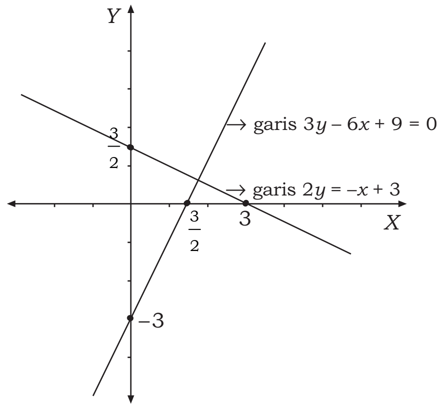
$$\begin{aligned} m_1 \cdot m_2 &= -1 \\ \Leftrightarrow \quad 2 \cdot m_2 &= -1 \end{aligned}$$

diperoleh $m_2 = -\frac{1}{2}$.

Persamaan garis yang dicari dengan gradien $-\frac{1}{2}$ dan melalui titik (–1, 2) sebagai berikut.

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ \Leftrightarrow \quad y - 2 &= -\frac{1}{2}(x - (-1)) \\ \Leftrightarrow \quad y &= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 2 \\ \Leftrightarrow \quad y &= -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad 2y &= -x + 3 \end{aligned}$$

Diperoleh grafik seperti di samping.

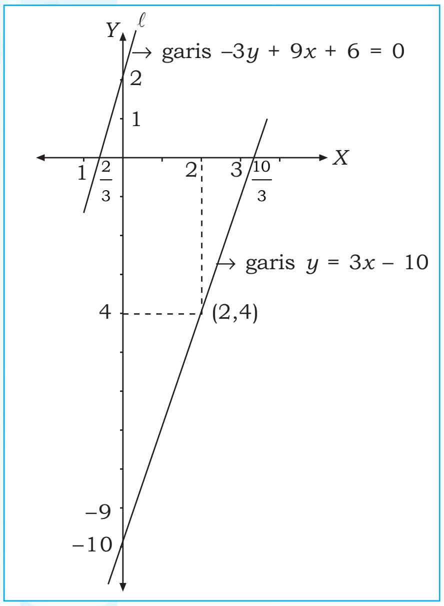


2. Hubungan Dua Buah Garis yang Sejajar

Dua buah garis saling sejajar jika $m_1 = m_2$ (gradiennya sama).

Contoh:

Tentukan persamaan garis yang melalui titik (2, –4) dan sejajar dengan garis $-3y + 9x + 6 = 0$!



Penyelesaian:

Menentukan gradien garis ℓ_1 $-3y + 9x + 6 = 0$ diperoleh dengan mengubah ke bentuk umum persamaan garis $y = mx + c$, yaitu:

$$\begin{aligned} -3y + 9x + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad -3y &= -9x - 6 \\ \Leftrightarrow \quad y &= 3x + 2 \end{aligned}$$

Jadi, gradien garis ℓ_1 adalah 3. Karena disyaratkan sejajar maka gradien garis ℓ_2 juga 3. Diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m_2(x - x_1) \\ \Leftrightarrow \quad y - (-4) &= 3(x - 2) \\ \Leftrightarrow \quad y + 4 &= 3x - 6 \\ \Leftrightarrow \quad y &= 3x - 10 \end{aligned}$$

Jadi, salah satu garis yang sejajar dengan $-3y + 9x \;\; 6 = 0$ adalah $y = 3x - 10$.

Aplikasi

1. Suatu pengangkutan dikerjakan dengan mesin yang memiliki tenaga E dan beban w. Hubungan antarvariabel diberikan dengan $f: w \to aw + b$ atau $E = aw + b$. Diketahui $f(10) = 8{,}9$ kg dan $f(30) = 19{,}1$ kg. Tentukan penyelesaian dari soal-soal di bawah ini.
   a. nilai a dan b
   b. grafik fungsi tersebut

   Penyelesaian:

   a. Diketahui $E = aw + b$

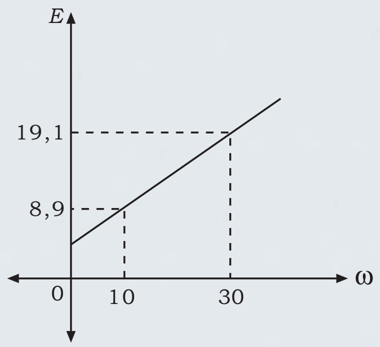
   $$\begin{aligned} w = 10 \to a \cdot 10 + b = 8{,}9 \quad &\Leftrightarrow \quad 10a + b = 8{,}9 \\ w = 30 \to a \cdot 30 + b = 19{,}1 \quad &\Leftrightarrow \quad 30a + b = 19{,}1 \quad - \\ & \qquad\;\; -20a = -10{,}2 \\ &\Leftrightarrow \quad 20a = 10{,}2 \\ &\Leftrightarrow \quad a = 0{,}51 \end{aligned}$$

Nilai $a = 0{,}51$ disubstitusikan ke persamaan

$$\begin{aligned} 10a + b &= 8{,}9 \\ \Leftrightarrow \quad 10(0{,}51) + b &= 8{,}9 \\ \Leftrightarrow \quad 5{,}1 + b &= 8{,}9 \\ \Leftrightarrow \quad b &= 3{,}8 \end{aligned}$$

Jadi, nilai $a = 0{,}51$ dan $b = 3{,}8$

b. Grafik fungsi $E = a\omega + b$



2. Diketahui hubungan antara kecepatan (V) dan waktu (t) tampak seperti pada gambar tabel berikut.

t	1	2	3	6
V	8,9	10,3	11,7	15,9

Hubungan antara V dan t dinyatakan dengan $V = at + b$. Tentukan nilai a dan b.

Penyelesaian:

Diketahui persamaan $V = at + b$.

$$\begin{aligned} t = 1 \rightarrow a \cdot 1 + b = 8{,}9 \quad &\Leftrightarrow \quad a + b = 8{,}9 \\ t = 3 \rightarrow a \cdot 3 + b = 11{,}7 \quad &\Leftrightarrow \quad 3a + b = 11{,}7 \; - \\ & \qquad\;\; -2a = -2{,}8 \\ &\Leftrightarrow \quad a = 1{,}4 \end{aligned}$$

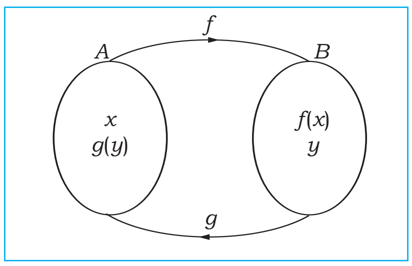
Nilai $a = 1{,}4$ disubstitusikan ke persamaan

$$\begin{aligned} a + b &= 8{,}9 \\ \Leftrightarrow 1{,}4 + b &= 8{,}9 \\ \Leftrightarrow \quad b &= 7{,}5 \end{aligned}$$

Jadi, nilai $a = 1{,}4$ dan $b = 7{,}5$.

H. Invers Fungsi Linear

Perhatikan gambar.



Jika f dan g fungsi bijektif, serta $f: A \rightarrow B$ maka peta setiap $x \in A$ adalah $y \in B$ ditulis $y = f(x)$. Jika $g: B \rightarrow A$ maka peta setiap $y \in B$ adalah $x \in A$ dan ditulis $x = g(y)$. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa f dan g saling invers. Fungsi g merupakan invers dari f ditulis $g = f^{-1}$ dan f merupakan invers dari g ditulis $f = g^{-1}$. Jadi, invers dari f dinotasikan dengan f^{-1}.

Contoh:

1. Diberikan fungsi $f(x) = \frac{3x-2}{2x+4}$, $x \neq -2$, tentukan $f^{-1}(x)$!

Penyelesaian:

$f(x) = \frac{3x-2}{2x+4}$, $x \neq -2$.

Dapat dinyatakan:

$$\begin{aligned} y &= \frac{3x-2}{2x+4} \\ \Leftrightarrow \quad y \cdot (2x+4) &= 3x - 2 \\ \Leftrightarrow \quad 2xy + 4y &= 3x - 2 \\ \Leftrightarrow \quad 2xy - 3x &= -4y - 2 \\ \Leftrightarrow \quad x \cdot (2y - 3) &= -4y - 2 \\ \Leftrightarrow \quad x &= \frac{-(4y+2)}{-(3-2y)} \\ \Leftrightarrow \quad f^{-1}(y) &= \frac{4y+2}{3-2y} \end{aligned}$$

Jadi, $f^{-1}(x) = \frac{4x+2}{3-2x}$.

2. Tentukan $f^{-1}(x)$ dari $f(x) = \frac{1}{x-5}$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{x-5} \rightarrow \quad y &= \frac{1}{x-5} \\ \Leftrightarrow \quad x - 5 &= \frac{1}{y} \\ \Leftrightarrow \quad x &= \frac{1}{y} + 5 \\ \Leftrightarrow \quad f^{-1}(y) &= \frac{1}{y} + 5 \\ \Leftrightarrow \quad f^{-1}(x) &= \frac{1}{x} + 5 \end{aligned}$$

Jadi, $f^{-1}(x) = \frac{1}{x} + 5$.

Latihan 2

Kerjakan soal-soal berikut!

1. Tentukan gradien garis yang melalui dua titik berikut!
   a. (–1, 2) dan (2, 4)
   b. (0, 1) dan (–1, 3)
   c. (–1, –1) dan (2, 1)
2. Tentukan titik potong dua garis dengan persamaan berikut!
   a. $4x + 5y = 14$ dan $x - 3y = -5$
   b. $2x - 5y = -1$ dan $x + 2y = 4$
3. Tentukan persamaan garis lurus yang tegak lurus dengan garis $2x - y = 5$ dan melalui titik potong garis $2x + y - 2 = 0$ dengan sumbu X!
4. Tentukan fungsi invers dari fungsi-fungsi berikut ini!
   a. $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$
   b. $f(x) = 8x - \frac{2}{3}$
   c. $f(x) = 4 - 5x$
   d. $f(x) = 5 - 3x$
   e. $f(x) = 2x - 6$
5. Diberikan $f(x) = 1 + \frac{2}{2-x}$ dan $f^{-1}(m) = 1$. Tentukan nilai m!
6. Rumus kecepatan permukaan gerinda (s) dinyatakan oleh diameter roda gerinda (d) dengan $s = \frac{\pi}{12}\omega d$ dengan ω = 1.200 ppm, d dalam inchi dan s dalam fpm.
   a. Tentukan harga s untuk d = 7,6 dan d = 10,5!
   b. Gambarlah grafiknya!
7. Kecepatan sebuah motor dinyatakan dalam V dengan satuan m/det dan disajikan dengan persamaan $V = mt + n$. Hubungan antara V dan t dinyatakan dalam bentuk tabel sebagai berikut.

t	2	4	6	8
V	19,1	23,1	27,1	35,1

   a. Tentukan nilai m dan n!
   b. Gambarkan grafiknya!
   c. Tentukan harga V, jika t =15 detik!
8. Hambatan pada sebuah penghantar pada suhu t = 100°C diberikan dengan rumus: $R_t = R_r\{1 + a(t_t - t_r)\}$
   dengan R_t = hambatan pada suhu tinggi, R_r = hambatan pada suhu rendah, t_t = suhu tinggi, t_r = suhu rendah, a = koefisien suhu, $R_t = f(t) = f(t_t - t_r)$
   Jika R_r = 100 ohm, t_r = 15°C, dan a = 0,00017°C, tentukan unsur-unsur berikut!
   a. R_t pada suhu (t_t) = 60°C
   b. R_t pada suhu (t_t) = 85°C
9. Pada rangkaian kapasitas dalam arus bolak-balik diperoleh reaktansi kapasitatif yang dirumuskan dengan $x_c = \frac{1}{2F_c}$ dengan c dinyatakan dalam farad (F). Jika kapasitor (c) tetap maka x_c merupakan fungsi dari f (frekuensi). Dengan demikian dapat ditulis $x_c = F(f)$ dengan $c = 70\pi F$. Tentukan operasi berikut!
   a. Nilai X_c untuk f = 10 Hz, f = 15 Hz, dan f = 20 Hz.
   b. Gambar grafik hubungan X_c dan f.
10. Gambarkan grafik fungsi untuk data berikut!

R (ohm)	0,5	0,75	1	2	5	10
I (ampere)	3	1,9	1,4	0,75	0,3	0,15

Kegiatan Belajar 3

Fungsi Kuadrat

Roda adalah piranti kendaraan bermotor yang memegang peranan sangat penting. Roda terdiri atas bagian-bagian yaitu ban, velg atau ”rim”, dan jari-jari. Permukaan roda telah didesain dengan baik dan sesuai dengan permukaan jalan sehingga dapat memberikan gaya traksi (dorong) atau gaya rem yang tepat tanpa terjadi slip pada kendaraan. ”Rim” pada ban dibuat dari baja atau aluminium sehingga memiliki sifat kuat di berbagai kondisi jalan. ”Rim” dihubungkan dengan jari-jari yang berfungsi untuk menahan beban dalam daerah radial, tangential, dan lateral sehingga jari-jari tersebut dapat menampung perubahan-perubahan dari beban tumbukan. Kondisi dari bagian-bagian pada roda perlu dirawat dengan baik sehingga tidak mengganggu perputaran roda. Salah satu rumus perputaran roda yang berputar selama t detik diberikan dengan persamaan berikut.


Sumber: *www.bearperkins.com*
Salah satu penampang roda

$$\theta = 60t - \frac{1}{3}t^2$$

Di dalam matematika, persamaan di atas disebut persamaan kuadrat yang memiliki penyelesaian atas t dan grafiknya berupa parabola. Lebih lanjut mengenai persamaan kuadrat akan kita pelajari pada uraian berikut.

Uraian Materi

A. Grafik Fungsi Kuadrat

Pada matematika kelas X bab 3 telah dipelajari tentang fungsi kuadrat. Bentuk umum fungsi kuadrat adalah $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$, dengan a, b, dan c bilangan real, $a \neq 0$. Grafik yang dibentuk oleh fungsi kuadrat berbentuk parabola. Fungsi $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$ dapat juga ditulis $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$, dengan unsur-unsur sebagai berikut.

Diskriminan $D = b^2 - 4ac$

Sumbu simetri $x = \frac{-b}{2a}$

Nilai ekstrim $y = \frac{-D}{4a}$

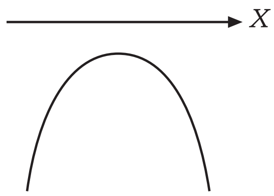
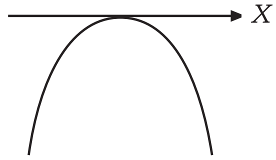
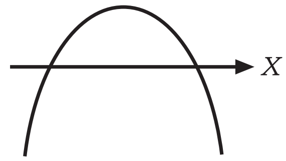
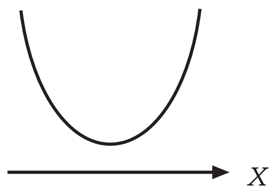
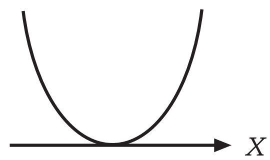
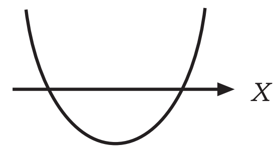
Koordinat titik puncak $P\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$

Bentuk fungsi kuadrat yang lain adalah $y = a(x - x_p)^2 + y_p$ dengan koordinat titik puncak (x_p, y_p).

Tugas Mandiri

Fungsi kuadrat mudah dijumpai dalam bidang teknik. Lebih mudah lagi jika kalian mencari dalam pembahasan tentang gerak parabolik. Coba cari beberapa contoh terapan fungsi kuadrat dengan menggunakan mesin pencari (misalnya www.google.com).

Sifat-sifat grafik fungsi kuadrat berdasarkan nilai a dan D:

	$D < 0$	**$D = 0$**	**$D > 0$**
$a < 0$	Tidak menyinggung sumbu X (definitif negatif) 	Menyinggung sumbu X di satu titik 	Menyinggung sumbu X di dua titik 
$a > 0$	 Tidak menyinggung sumbu X (definitif positif)	 Menyinggung sumbu X di satu titik	 Menyinggung sumbu X di dua titik

B. Langkah-Langkah Menggambar Grafik Fungsi Kuadrat

Berikut diberikan langkah-langkah dalam menggambar grafik fungsi kuadrat.

1. Menentukan sumbu simetri yaitu $x = \frac{-b}{2a}$.
2. Menentukan titik puncak yaitu $P(x, y)$ dengan $x = \frac{-b}{2a}$ dan $y = \frac{-D}{4a}$.
3. Menentukan titik potong dengan sumbu Y (syarat $x = 0$).
4. Bila $D > 0$ tentukan titik potong dengan sumbu X (syarat $y = 0$).
5. Bila $D \leq 0$ tentukan beberapa titik di sekitar sumbu simetri.

Contoh:

1. Gambarlah grafik dari $y = -x^2 + 4x$!

   Penyelesaian:

   Dari persamaan $y = -x^2 + 4x$ diperoleh $a = -1$, $b = 4$, dan $c = 0$.

   - $D = b^2 - 4ac$
     $= (4)^2 - 4(-1)(0)$
     $= 16$
   - Sumbu simetri $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2$
   - $y = \frac{-D}{4a} = \frac{-16}{4(-1)} = 4$

     Nilai balik maksimum adalah 4.

     Jadi, titik puncak (2, 4).
   - Titik potong dengan sumbu X diperoleh jika $y = 0$.

     $\Leftrightarrow \quad -x^2 + 4x = 0$

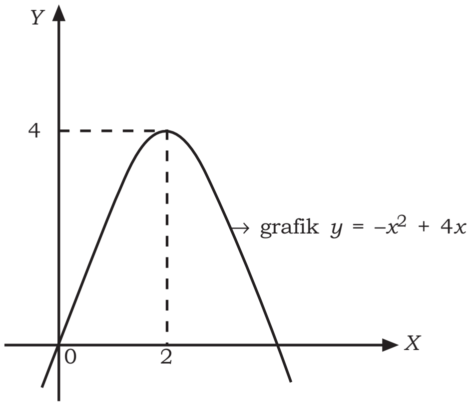
     $\Leftrightarrow \quad x(-x + 4) = 0$

     $\Leftrightarrow \quad x = 0$ atau $x = 4$

     Jadi, titik potong dengan sumbu X adalah (0, 0) dan (4, 0).

- Titik potong dengan sumbu Y diperoleh jika $x = 0$.
  $y = -(0)^2 + 2(0) = 0$
  Jadi, titik potong dengan sumbu Y adalah (0, 0).

Grafik fungsi kuadrat dengan persamaan $y = -x^2 + 4x$ sebagai berikut.



2. Gambarlah grafik dari $y = x^2 - 4x - 5$!

Penyelesaian:

Diketahui persamaan $y = x^2 - 4x - 5$, diperoleh $a = 1$, $b = -4$, $c = -5$.

- Grafik memotong sumbu X, jika $y = 0$.

$$\begin{aligned} x^2 - 4x - 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad (x + 1)(x - 5) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad (x + 1) = 0 &\text{ atau } (x - 5) = 0 \end{aligned}$$

  Jadi, grafik memotong sumbu X di titik (–1, 0) dan (5, 0).

- Sumbu simetri $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$

  Nilai maksimum y

$$\begin{aligned} y &= \frac{-D}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \\ &= \frac{-((4)^2 - 4(-1)(5))}{4 \cdot 1} \\ &= \frac{-(16 + 20)}{4} = -9 \end{aligned}$$

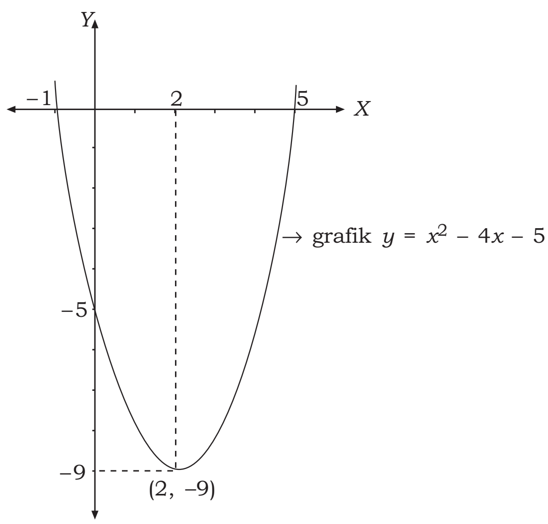
  Jadi, koordinat nilai balik minimum (2, –9).

- Titik potong dengan sumbu Y, jika $x = 0$

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4x - 5 \\ &= (0)^2 - 4(0) - 5 \\ &= -5 \end{aligned}$$

  Jadi, koordinat titik potong dengan sumbu Y adalah (0, –5).

Dari keterangan di atas, diperoleh grafik seperti di bawah.



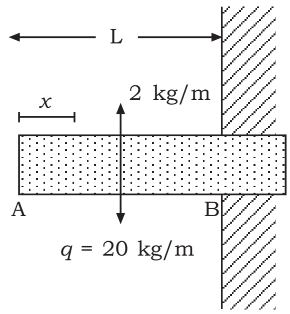
Latihan 3

Kerjakan soal-soal berikut!

1. Diketahui $y = -x^2 - x + 2$ dengan $D(f) = \{x|-4 \le x \le 3)$.
   Tentukan unsur-unsur dari grafik berikut!
   a. Titik potong dengan sumbu X dan Y.
   b. Sumbu simetri.
   c. Koordinat titik puncak.
   d. Gambarlah grafiknya!

2. Tentukan batas-batas nilai m supaya grafik $y = (m - 2)x^2 - 2mx + (m + 6)$ seluruhnya di atas sumbu X!

3. Sebuah balok AB dengan beban terbagi rata q kg/m dijepit pada B. Diperoleh persamaan garis gaya lintang D dan garis momen M dengan $M_x = \frac{1}{2}qx^2$. Gambarlah garis M_x dengan M_x sebagai sumbu tegak, melalui A, dan memiliki arah ke bawah dan x adalah sumbu mendatar!



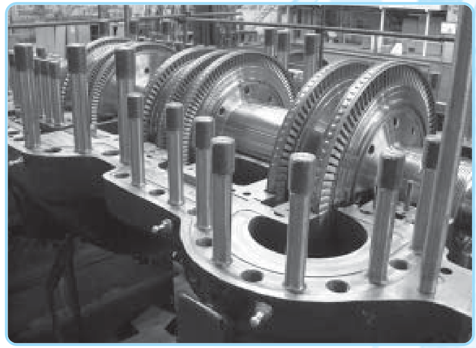
4. Putaran sebuah roda selama t detik menempuh sudut θ radian. Persamaan putaran roda adalah $\theta = 50t - \frac{2}{3}t^2$.
   a. Tentukan besarnya θ untuk t = 3 detik dan t = 6 detik!
   b. Gambarkan grafiknya!

5. Daya yang ditimbulkan oleh suatu turbin diberikan dengan persamaan $P = uv - u^2$. Diketahui v = 40 m/detik.
   a. Tentukan nilai P untuk u = 15 dan u = 20!
   b. Gambarkan grafik dari persamaan $P = 40u - u^2$!

Kegiatan Belajar 4

Menerapkan Konsep Fungsi Kuadrat

Turbin uap adalah salah satu mesin konversi energi jenis mesin fluida yang menghasilkan energi. Turbin uap mendapat pasokan energi uap yang memiliki temperatur dan tekanan yang tinggi. Energi uap tersebut terekspansi melalui sudu-sudu turbin dengan tekanan yang secara drastis diturunkan. Akibatnya terjadi perubahan energi kinetik pada uap. Perubahan energi tersebut memutar poros turbin dan akhirnya menghasilkan tenaga. Salah satu rumus tenaga (daya) yang dihasilkan oleh turbin uap sebagai berikut.



Sumber: *www.skoda.cz*

Penampang belahan turbin

$$P = u(v - u)$$

u = kecepatan sudut

v = kecepatan pancar air dari nozel

Dari persamaan tersebut kita dapat mencari daya maksimum yang dapat dihasilkan oleh turbin uap. Untuk dapat menyelesaikan permasalahan tersebut, terlebih dahulu kita pelajari uraian pada kegiatan belajar berikut.

Uraian Materi

A. Menentukan Persamaan Fungsi Kuadrat

Dari persamaan fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ dapat kita peroleh koordinat titik potong grafik dengan sumbu X dan sumbu Y, persamaan sumbu simetri, titik balik maksimum/minimum, dan bentuk grafiknya. Demikian pula sebaliknya, dari unsur-unsur tersebut dapat kita susun sebuah fungsi kuadrat yang sesuai dengan rumus sebagai berikut.

1. Diketahui Koordinat Titik Potong Grafik dengan Sumbu *X*

Apabila diketahui koordinat titik potong dengan sumbu X yaitu $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$ maka bentuk persamaan kuadratnya adalah:

$$\begin{aligned} (x - x_1)(x - x_2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - (x_1 + x_2)x - x_1x_2 &= 0 \end{aligned}$$

2. Diketahui Koordinat Titik Puncak dan Koordinat yang Lain

Apabila diketahui koordinat titik puncak (x_p, y_p) dan koordinat yang lain maka bentuk fungsi kuadratnya adalah:

$$y = a(x - x_p)^2 + y_p$$

3. Diketahui Grafiknya

Sebuah grafik fungsi kuadrat dilengkapi dengan unsur-unsur pada grafik, antara lain koordinat titik potong grafik dengan sumbu X dan sumbu Y, persamaan sumbu simetri, dan titik maksimum/minimum. Selanjutnya, unsur-unsur yang diketahui tersebut dapat digunakan untuk mencari bentuk fungsi kuadrat seperti pada nomor 1 dan 2.

Contoh:

1. Tentukan persamaan fungsi kuadrat yang memiliki titik puncak $(1, -1)$ dan melalui $(0, 3)$!

Penyelesaian:

Diketahui koordinat titik puncak adalah (1, –1), diperoleh $x_p = 1$ dan $y_p = -1$ serta koordinat titik yang lain (0, 3). Akan dicari nilai a terlebih dahulu.

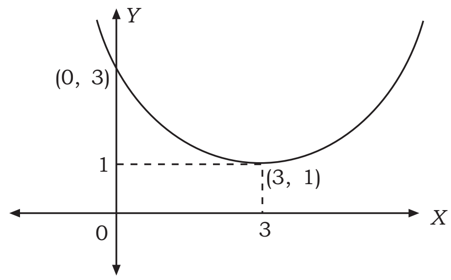
$$\begin{aligned} y_0 &= a(x_0 - x_p)^2 + y_p \\ \Leftrightarrow\ 3 &= a(0 - 1)^2 + (-1) \\ \Leftrightarrow\ 3 &= a - 1 \\ \Leftrightarrow\ 4 &= a \end{aligned}$$

Dengan demikian, bentuk persamaan fungsi kuadratnya adalah:

$$\begin{aligned} y &= a(x - x_p)^2 + y_p \\ \Leftrightarrow\ y &= 4(x - 1)^2 + (-1) \\ \Leftrightarrow\ y &= 4(x^2 - 2x + 1) + (-1) \\ \Leftrightarrow\ y &= 4x^2 - 8x + 4 + (-1) \\ \Leftrightarrow\ y &= 4x^2 - 8x + 3 \end{aligned}$$

Jadi, bentuk persamaan fungsi kuadratnya $y = 4x^2 - 8x + 3$.

2. Tentukan bentuk persamaan fungsi kuadrat yang grafiknya seperti gambar di samping!



Penyelesaian:

Dari grafik diperoleh koordinat titik puncak adalah (3, 1) dan grafik melalui titik (0, 3). Dari contoh pada nomor 2, kita dapat mencari nilai a terlebih dahulu.

$$\begin{aligned} y_0 &= a(x_0 - x_p)^2 + y_p \\ \Leftrightarrow\ 3 &= a(0 - 3)^2 + 1 \\ \Leftrightarrow\ 3 &= 9a + 1 \\ \Leftrightarrow\ 4 &= 9a \\ \Leftrightarrow\ a &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

Bentuk persamaan fungsi kuadratnya

$$\begin{aligned} y &= a(x - x_p)^2 + y_p \\ \Leftrightarrow\ y &= \frac{4}{9}(x - 3)^2 + 1 \\ \Leftrightarrow\ y &= \frac{4}{9}(x^2 - 6x + 9) + 1 \\ \Leftrightarrow\ y &= \frac{4}{9}x^2 - \frac{24}{9}x + \frac{36}{9} + 1 \\ \Leftrightarrow\ y &= \frac{4}{9}x^2 - \frac{24}{9}x + \frac{45}{9} \end{aligned}$$

Jadi, bentuk persamaan fungsi kuadrat dari grafik tersebut adalah $y = \frac{4}{9}x^2 - \frac{24}{9}x + 5$.

B. Menyelesaikan Masalah Program Keahlian yang Berkaitan dengan Fungsi Kuadrat

Di dalam bidang teknik, mengukur merupakan kegiatan yang hampir selalu dilakukan. Selain membutuhkan ketelitian, deskripsi mengenai bentuk maupun hasil dari pengukuran memegang peranan penting dalam proses mengukur. Sebagai contoh dalam membuat talang air. Tentu talang yang dihasilkan dengan menggunakan bahan yang disediakan harus mampu menampung air sebanyak-banyaknya. Di dalam matematika permasalahan tersebut dapat diselesaikan dengan fungsi kuadrat.

Langkah-langkah menyelesaikan terapan yang menggunakan fungsi kuadrat.
1. Tentukan bilangan yang tidak diketahui dalam bentuk variabel.
2. Susunlah sebuah fungsi kuadrat berdasarkan rumus yang digunakan.
3. Tentukan sumbu simetri dari fungsi kuadrat.
4. Tentukan nilai ekstrim fungsi kuadrat.

Perhatikan contoh berikut.

Contoh:

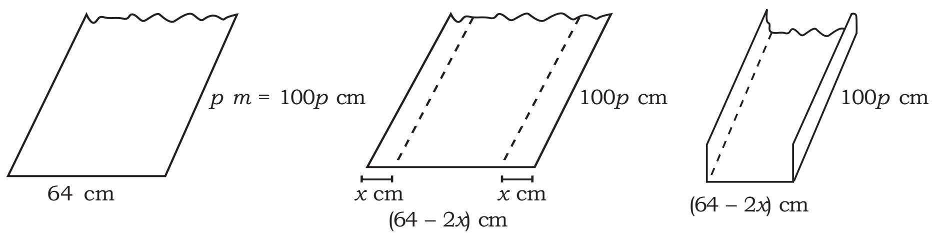
Selembar seng yang panjangnya p meter memiliki lebar 64 cm. Kedua sisi pada panjangnya harus dilipat ke atas sepanjang x cm untuk membuat talang. Tentukan:

a. kapasitas talang dalam x,
b. lebar lipatan pada sisi panjang agar kapasitas maksimum,
c. kapasitas maksimum jika panjang seng adalah 3 cm.

Penyelesaian:

Tentukan bilangan yang tidak diketahui dalam bentuk variabel.

Dimisalkan lebar sisi panjang yang dilipat adalah x cm.



a. Susunlah sebuah bentuk fungsi kuadrat berdasarkan rumus yang digunakan.

Kapasitas talang air = volume talang air

$$\begin{aligned} &= p \times \ell \times t \\ &= p \times (64 - 2x) \times (x) \\ &= (64 - 2x)px \end{aligned}$$

Jadi, bentuk fungsi kuadratnya $y = 64px - 2px^2$.

b. Menentukan sumbu simetri.

Diketahui persamaan kuadrat $y = 64px - 2px^2$. Diperoleh $a = -2p$, $b = 64p$, dan $c = 0$.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(64p)}{2(-2p)} = \frac{-64p}{-4p} = 16$$

Jadi, nilai $x = 16$.

c. Nilai maksimum fungsi kuadrat untuk $p = 3$ dan $x = 16$.

$$\begin{aligned} y = f(x) &= f(16) \\ &= 64 \cdot 3 \cdot 16 - 2 \cdot 3(16)^2 \\ &= 1.536 \end{aligned}$$

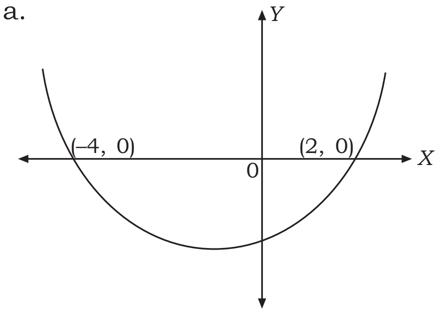
Jadi, untuk $p = 3$ cm talang memiliki kapasitas maksimum 1.536 cm^2.

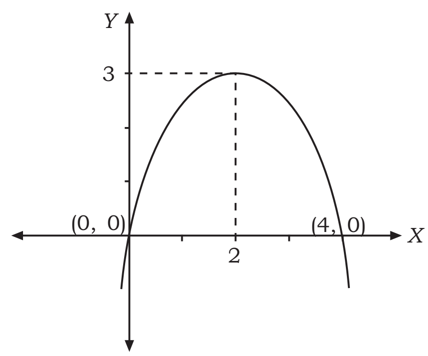
Latihan 4

Kerjakan soal-soal berikut!

1. Tentukan bentuk persamaan kuadrat yang memiliki koordinat titik potong grafik dengan sumbu X di titik-titik berikut!
   a. (–3, 0) dan (5, 0)
   b. $(-2\frac{1}{5}, 0)$ dan $(-\frac{1}{5}, 0)$
   c. (2, 0) dan $(\frac{9}{2}, 0)$

2. Tentukan bentuk persamaan kuadrat yang melalui titik puncak dan koordinat berikut ini!
   a. Puncak (–6, –36) dan melalui (0, 0)
   b. Puncak (–3, –250) dan melalui (2, 0)
   c. Puncak $(\frac{7}{2}, \frac{1}{4}-)$ dan melalui (4, –12)

3. Tentukan bentuk persamaan kuadrat dari grafik-grafik berikut!
   a.


   b.


4. Sebuah pelat baja akan dipotong menjadi bentuk persegi panjang. Jika keliling persegi panjang yang diperoleh adalah 80 mm, tentukan panjang dan lebar pelat tembaga agar diperoleh luas maksimum!

5. Daya (P) yang ditimbulkan oleh sebuah turbin diberikan dengan persamaan $u(v - u)$, dengan u adalah kecepatan sudut dan v adalah kecepatan pancar air dari nozel. Jika v = 40 m/detik, tentukan besarnya kecepatan sudut agar menghasilkan daya maksimum!

Kegiatan Belajar 5

Fungsi Eksponen

Penemuan benda-benda bersejarah oleh para ilmuwan pada abad ke-20 mampu memberikan gambaran kepada kita tentang kehidupan pada masa lalu. Sebagai contoh penemuan besar di dataran Mesir, yaitu piramida beserta patung singa berkepala manusia (sphinx). Menurut para ahli arkeolog, salah satu dari tujuh keajaiban dunia tersebut telah dibangun lebih kurang pada 2500 SM.

Bagaimana para ilmuwan bisa memperkirakan tahun pembuatan kedua peninggalan bersejarah tersebut? Ternyata perhitungan tersebut diperoleh dari perhitungan dengan menggunakan ilmu kimia, yaitu waktu paruh, yang dirumuskan:

Sumber: *www.fyvie.net*

Piramida

$$\frac{N_t}{N_o} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{t_{\frac{1}{2}}}}$$

N_t = jumlah zat yang tersisa
N_o = jumlah zat mula-mula
t = waktu peluruhan
$t_{\frac{1}{2}}$ = waktu paruh

Bentuk rumus di atas menggunakan sistem bilangan berpangkat. Nah, untuk mengetahui lebih lanjut mengenai bilangan berpangkat, akan kita pelajari pada uraian berikut.

Uraian Materi

A. Fungsi Eksponen

Fungsi eksponen adalah fungsi yang mengandung peubah atau variabel sebagai pangkat dari suatu konstanta. Bentuk umum fungsi eksponen:

$f: x \rightarrow a^x$ atau $f(x) = a^x$ atau $y = a^x$ dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$

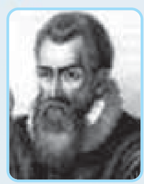
Pada fungsi eksponen yaitu $f(x) = a^x$, berlaku:

1. x disebut peubah dan daerah asal $f(x)$ (domain) dari fungsi eksponen adalah himpunan bilangan real yaitu Df: $\{x \mid -\infty < x < +\infty, x \in \mathbb{R}\}$,
2. a disebut bilangan pokok fungsi dengan syarat $a > 0$ dan $a \neq 1$. Dengan demikian berlaku $0 < a < 1$ atau $a > 1$.

Fungsi eksponen pada umumnya dibentuk dengan menggunakan bilangan pokok e, yaitu konstanta Napier (e = 2,71828 . . .) atau $y = e^x$.

Untuk menyelesaikan permasalahan fungsi eksponen perlu diingat kembali sifat-sifat operasi bilangan berpangkat yang telah kita pelajari pada kelas X bab 1 sebagai berikut.

Info



Sumber: *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia*

John Napier

John Napier (1550–1617) adalah ilmuwan berkebangsaan Skotlandia yang berperan dalam perkembangan ilmu logaritma.

Kilas Balik

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $(a^m)^n = a^{m \times n}$
4. $(a \times b)^m = a^m \times b^m$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
6. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
7. $a^0 = 1$
8. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{b^{-m}}{a^{-m}}$
9. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Contoh:

1. Tentukan bentuk sederhana dari $(32)^{\frac{1}{5}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$!

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}(32)^{\frac{1}{5}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} &= \left(2^5\right)^{\frac{1}{5}} \times \left(2^{-1}\right)^{-2}\\ &= 2^{5\left(\frac{1}{5}\right)} \times 2^{-1 \cdot -2}\\ &= 2 \times 2^2\\ &= 2^3\\ &= 8\end{aligned}$$

2. Tentukan nilai dari $f(x) = 3^{2x-1}$ untuk $x = 2$!

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3^{2x-1}\\ \Leftrightarrow f(2) &= 3^{2 \cdot 2 - 1}\\ \Leftrightarrow f(2) &= 3^{4-1}\\ \Leftrightarrow f(2) &= 3^3\\ \Leftrightarrow f(2) &= 27\end{aligned}$$

B. Menggambar Grafik Fungsi Eksponen

Fungsi eksponen selalu memotong sumbu Y di titik (0, 1) dan tidak memotong sumbu X.

$y = a^x$, untuk $a > 1$ berupa grafik naik
untuk $0 < a < 1$ berupa grafik turun

Untuk menggambar sketsa grafik fungsi eksponen dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut.

1. Menentukan beberapa titik yang mudah.
2. Gambarlah beberapa titik tersebut pada koordinat cartesius.
3. Melalui titik-titik tersebut dibuat kurva yang mulus.

Contoh:

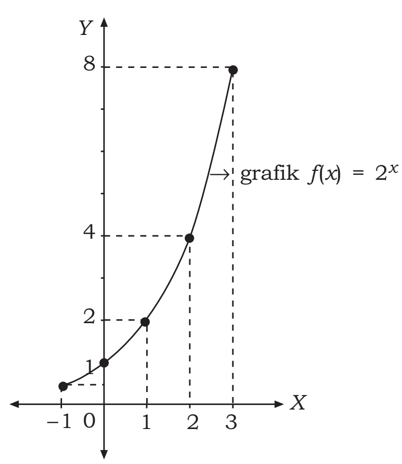
1. Gambarlah grafik fungsi eksponen $f(x) = 2^x$!

Penyelesaian:

Untuk menentukan titik-titik, dapat menggunakan tabel seperti berikut.

x	$f(x) = 2^x$	
–1	2^{-1}	$= \frac{1}{2}$
0	2^0	= 1
1	2^1	= 2
2	2^2	= 4
3	2^3	= 8

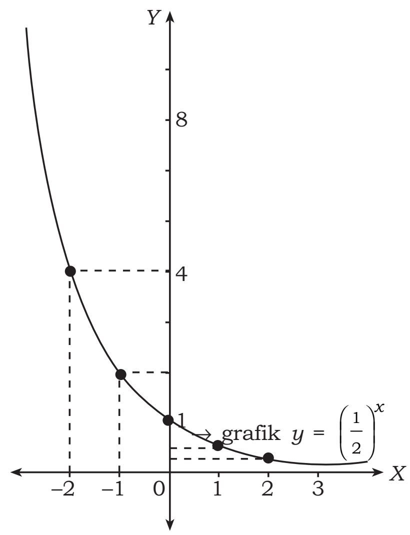
Grafik fungsi eksponen dengan persamaan $f(x) = 2^x$ seperti di samping.



2. Gambarlah grafik fungsi $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$!

Penyelesaian:
Dapat dibuat tabel:

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
–2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$
–1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$



Latihan 5

Kerjakan soal-soal berikut!

1. Gambarlah grafik fungsi eksponen dengan persamaan berikut!

   a. $y = 4^x$
   b. $y = 3^x$
   c. $y = 2 \cdot 3^x$
   d. $y = 2 \cdot 4^x$
   e. $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
   f. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

2. Tentukan nilai dari $f(x) = \sqrt[4]{\frac{25x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{5}}}}$ untuk $x = 5$!

3. Tentukan nilai dari $f(x) = \frac{x^{\frac{1}{4}}\sqrt[5]{x^3}}{x^2}$ untuk $x = 2$!

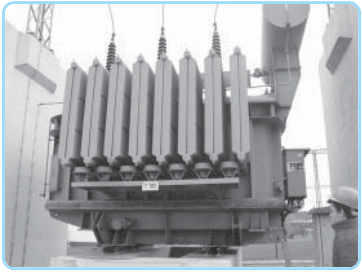
4. Tentukan nilai x yang memenuhi $f(x) = \sqrt[3]{25^{x+4}} = 125$!

5. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan berikut!

   a. $5^{3x-4} = 5^{x+2}$
   b. $2^{x^2-2x} = 16^{x-2}$
   c. $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} = \left(\frac{1}{27}\right)^{x-2}$

Kegiatan Belajar 6

Fungsi Logaritma



Sumber: www.home.zcu.cz

Transformator

Energi listrik yang disalurkan melalui pembangkit listrik dikirimkan dengan cara mengubah-ubah proporsi voltase (tegangan listrik) dan ampere. Voltase yang rendah dapat menghantarkan arus yang kuat dan voltase yang tinggi menghantarkan arus yang lemah.

Perhitungan tegangan listrik pada umumnya dinyatakan dengan rumus:

$$V = V_0 e^{-kt}$$

V = tegangan listrik
V_0 = tegangan awal
t = waktu (detik)
k = konstanta

Apabila persamaan tersebut kita nyatakan dalam bentuk t akan diperoleh:

$$t = \frac{\log V_0 - \log V}{k \log e}$$

Perhatikan penggunaan bentuk logaritma pada rumus di atas. Fungsi logaritma di atas memiliki penyelesaian berbentuk bilangan dan grafik. Lebih lanjut mengenai fungsi logaritma akan kita pelajari pada uraian kegiatan belajar berikut.

Uraian Materi

A. Fungsi Logaritma

Tugas Mandiri

Fungsi logaritma banyak digunakan dalam sains dan teknologi. Coba buka internet. Akseslah situs pencari semacam www.google.com atau www.yahoo.com. Dengan situs pencari ini, carilah contoh terapan dari fungsi logaritma.

Fungsi logaritma merupakan invers dari fungsi eksponen. Fungsi logaritma dapat dicari nilai fungsinya untuk domain $0 < x < \infty$. Bentuk umum fungsi logaritma:

$$f : x \rightarrow {}^a\log x \text{ atau } f(x) = {}^a\log x \text{ atau } y = {}^a\log x$$

dengan $a > 0$, $a \neq 1$, dan $x \in \mathbb{R}$.

Dari bentuk umum di atas dapat diambil pengertian sebagai berikut.

1. Daerah asal (domain) fungsi logaritma adalah $Df : \{x \mid x > 0, x \in \mathbb{R}\}$.
2. a adalah bilangan pokok (basis) logaritma dengan syarat $a > 0$ dan $a \neq 1$ berarti boleh $0 < a < 1$ atau $a > 1$.
3. Daerah hasil (range) dari fungsi logaritma adalah $Rf : \{y \mid -\infty < y < +\infty, y \in \mathbb{R}\}$.

Contoh:

Diketahui $f(x) = {}^3\log (x + 2)$. Tentukan nilai dari fungsi berikut!

a. $f(1)$
b. $f(7)$
c. $f(25)$

Penyelesaian:

a. $f(x) = {}^3\log (x + 2) \rightarrow f(1) = {}^3\log (1 + 2)$
$= {}^3\log (3)$
$= 1$

b. $f(x) = {}^3\log (x + 2) \rightarrow f(7) = {}^3\log (7 + 2)$
$= {}^3\log (9)$
$= {}^3\log (3)^2$
$= 2$

c. $f(x) = {}^3\log (x + 2) \rightarrow f(25) = {}^3\log (25 + 2)$
$= {}^3\log (27)$
$= {}^3\log (3)^3$
$= 3$

B. Menggambar Grafik Fungsi Logaritma

Grafik fungsi logaritma $f(x) = {}^a\log x$ selalu memotong sumbu X di (1, 0) dan tidak pernah memotong sumbu Y. Untuk menggambar grafik fungsi logaritma perhatikan langkah-langkah sebagai berikut.

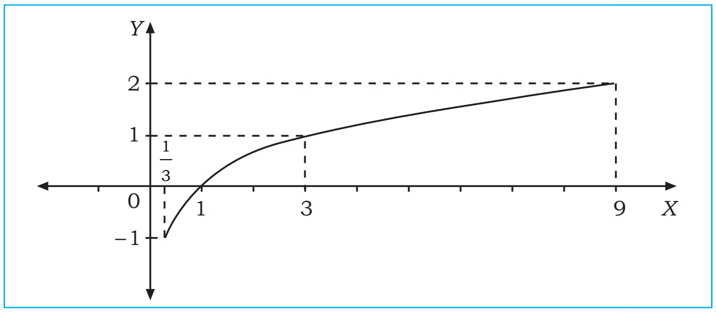
$y = {}^a\log x$ untuk $a > 1$ berupa grafik naik
untuk $0 < a < 1$ berupa grafik turun

Contoh:

1. Gambarlah grafik fungsi logaritma $y = {}^3\log x$.

Penyelesaian:

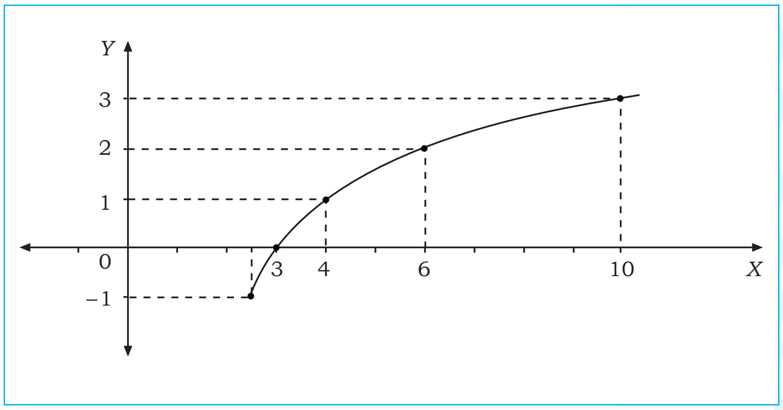
x	$y = {}^3\log x$
$\frac{1}{3}$	${}^3\log \frac{1}{3} = -1$
1	${}^3\log 1 = 0$
3	${}^3\log 3 = 1$
9	${}^3\log 9 = 2$



2. Gambarlah grafik fungsi logaritma $y = {}^2\log (x - 2)$.

Penyelesaian:

x	$y = {}^2\log (x - 2)$
$2\frac{1}{2}$	${}^2\log (2\frac{1}{2} - 2) = -1$
3	${}^2\log (3 - 2) = 0$
4	${}^2\log (4 - 2) = 1$
6	${}^2\log (6 - 2) = 2$
10	${}^2\log (10 - 1) = 3$



Aplikasi

1. Diberikan rumus tegangan $V = V_0e^{-kt}$. Diketahui $V_0 = 100$ volt, $k = 0{,}0075$, $t = 3{,}5$ detik, dan $\log e = 0{,}434$. Tentukan nilai $\log V$ yang memenuhi persamaan berikut!

Penyelesaian:

$$V = V_0e^{-kt}$$
$$\Leftrightarrow \log V = \log 100e^{-(0,0075 \times 3,5)}$$
$$\Leftrightarrow \log V = \log 100e^{-0,02625}$$
$$\Leftrightarrow \log V = \log 100 + \log e^{-0,02625}$$
$$\Leftrightarrow \log V = \log 10^2 + (-0{,}02625) \log e$$
$$\Leftrightarrow \log V = 2 + (0{,}02625)(0{,}434)$$
$$\Leftrightarrow \log V = 2 - 0{,}0114$$
$$\Leftrightarrow \log V = 1{,}9885$$

Jadi, nilai $\log V$ yang memenuhi persamaan adalah 1,9885.

2. Kerja suatu motor (w) dirumuskan dengan $w = \ln V_2 - \ln V_1$. Diketahui $V_1 = 0{,}01$, $V_2 = 0{,}5$, dan log 5 = 0,6989. Tentukan besarnya kerja motor tersebut.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} & w = \ln V_2 - \ln V_1 \\ \Leftrightarrow\ & w = \ln \frac{V_2}{V_1} \\ \Leftrightarrow\ & w = \ln \frac{0{,}5}{0{,}01} \\ \Leftrightarrow\ & w = \ln 50 \\ \Leftrightarrow\ & w = 2{,}303 \log 50 \\ \Leftrightarrow\ & w = 2{,}303(\log 5 + \log 10) \\ \Leftrightarrow\ & w = 2{,}303(0{,}6989 + 1) \\ \Leftrightarrow\ & w = 3{,}9126 \end{aligned}$$

Jadi, besarnya kerja motor adalah 3,9126 joule.

Latihan 6

Kerjakan soal-soal berikut!

1. Diketahui $y = {}^{\frac{1}{2}}\log(2x - 4)$, tentukan nilai fungsi-fungsi berikut!
   a. $f(3)$
   b. $f(6)$
   c. $f(10)$
   d. $f(\frac{17}{4})$
   e. $f(\frac{65}{16})$
2. Tentukan titik potong grafik fungsi $f(x)$ dengan sumbu X jika diketahui nilai fungsi sebagai berikut!
   a. $f(x) = {}^3\log x$
   b. $f(x) = {}^3\log(x + 1)$
   c. $f(x) = {}^2\log x$
   d. $f(x) = {}^2\log(x - 1)$
3. Perhitungan suhu akhir pada akhir langkah kompresi (T_2) dinyatakan dengan rumus $T_2 = T_1 \cdot e^{k-1}$. Diberikan $T_1 = 1.000$, $e = 10$, dan $k = 1{,}4$ dengan antilog 0,4 = 2,511 dan antilog 0,34 = 2,188. Tentukan nilai T_2!
4. Perhitungan tegangan listrik diberikan dengan rumus $V = V_0e^{-kt}$. Tentukan bentuk persamaan dalam t!
5. Hubungan kuat arus (I) yang melalui rangkaian induktansi (L) dan tekanan (R) dinyatakan dengan rumus $T = I_0\, e^{-\frac{Rt}{L}}$. Jika $I_0 = 1.000$ mA, $L = 100$ Henry, $R = 40$ ohm, $t = 15$ m/detik, dan $\log e = 0{,}434$, tentukan nilai $\log T$!

Kegiatan Belajar 7

Fungsi Trigonometri

Sumber: *www.nwk.usace.army.mil*

Bendungan

"Listrik adalah energi kehidupan". Setujukah kalian dengan kalimat ini? Jika mengingat begitu vitalnya listrik bagi kehidupan, kalian tentu akan setuju dengan kalimat itu.

Salah satu sarana penting pembangkit listrik hidroelektrik adalah bendungan. Energi air yang tersimpan selanjutnya diubah menjadi energi listrik. Bendungan menaikkan batas permukaan air agar memiliki jarak jatuh vertikal air yang tinggi. Selanjutnya, air mengalir turun melalui saluran sembari menghimpun energi dan membawanya kepada turbin. Air yang mengalir turun menekan baling-baling turbin dan membuat turbin berputar. Kemudian dihantarkan kepada rotor oleh sebuah poros. Generator menghasilkan listrik dari gerakan rotor di dalam stator dan mengubah tenaga air menjadi listrik dengan arah bolak-balik yang menghasilkan gaya gerak listrik (ggl). Salah satu persamaan ggl diberikan dengan rumus sebagai berikut.

$$e = E_{max} \sin (\omega t)$$

e = ggl dalam volt
E_{max} = nilai tertinggi ggl
ω = $2\pi f$
t = waktu

Perhatikan penggunaan bentuk sinus pada rumus di atas. Sinus merupakan salah satu bentuk trigonometri yang erat hubungannya dengan besar sudut. Lebih lanjut mengenai fungsi trigonometri akan kita pelajari pada uraian berikut.

Uraian Materi

A. Pengertian Fungsi Trigonometri

Fungsi trigonometri didefinisikan pada pengertian-pengertian berikut.

- Untuk setiap x yang dipasangkan tepat satu dengan nilai $\sin x$ atau fungsi yang memetakan himpunan sudut x ke himpunan bilangan real $\sin x$ disebut **fungsi sinus** yang ditulis:

$$f: x \to \sin x \text{ atau } f(x) = \sin x$$

- Untuk f yang memetakan x ke nilai cos x disebut **fungsi cosinus** yang ditulis:

$$f: x \to \cos x \text{ atau } f(x) = \cos x \text{ atau } f(x) = \cos x$$

- Untuk f yang memetakan x ke $\tan x$ disebut **fungsi tangen** dan ditulis:

$$f: x \to \tan x \text{ atau } f(x) = \tan x$$

B. Periode

Fungsi trigonometri merupakan sebuah fungsi periodik (berulang). Jika fungsi $f(x)$ berlaku $f(x) = f(x + p)$ untuk setiap x maka nilai positif terkecil dari p disebut periode fungsi $f(x)$ tersebut.

1. Periode Fungsi *sin*

Jika $f(x) = \sin x^\circ = \sin (x + k \cdot 360^\circ)$ dan dinyatakan sebagai $f(x + p)$ dengan $p = k \cdot 360^\circ$ maka nilai positif terkecil dari p adalah 360° untuk $k = 1$. Jadi periode $f(x) = \sin x$ adalah 360°. Artinya nilai $f(x)$ akan berulang dan memiliki nilai yang sama setiap bertambah 360° atau 2π (dalam satuan radian).

2. Periode Fungsi *cos*

Jika $f(x) = \cos x = \cos (x + k \cdot 360^\circ)$ dinyatakan sebagai $f(x + p)$ dengan $p = k \cdot 360^\circ$ maka nilai positif terkecil dari p adalah 360° untuk $k = 1$. Jadi periode $f(x) = \cos x$ adalah 360°. Artinya nilai $f(x)$ akan berulang dan memiliki nilai yang sama setiap bertambah 360° atau 2π (dalam satuan radian).

3. Periode Fungsi *tan*

Jika $f(x) = \tan x = \tan (x + k \cdot 180^\circ)$ dinyatakan sebagai $f(x + p)$ dengan $p = k \cdot 180^\circ$ maka nilai positif terkecil dari p adalah 180° untuk $k = 1$. Jadi periode $f(x) = \tan x^\circ$ adalah 180°. Artinya nilai $f(x)$ akan berulang dan memiliki nilai yang sama setiap bertambah 180° atau π (dalam satuan radian).

C. Menggambar Grafik Fungsi Trigonometri

Untuk mempermudah menggambar grafik fungsi trigonometri, dapat digunakan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Membuat tabel yang memetakan x dengan $y = f(x)$.
2. Titik-titik yang diperoleh pada langkah 1, digambarkan pada koordinat cartesius. Kemudian titik-titik tersebut dihubungkan sehingga diperoleh grafik yang diinginkan.

Contoh:

1. Gambarlah grafik fungsi $y = \sin x$ dengan $0^\circ \le x \le 360^\circ$!

Penyelesaian:

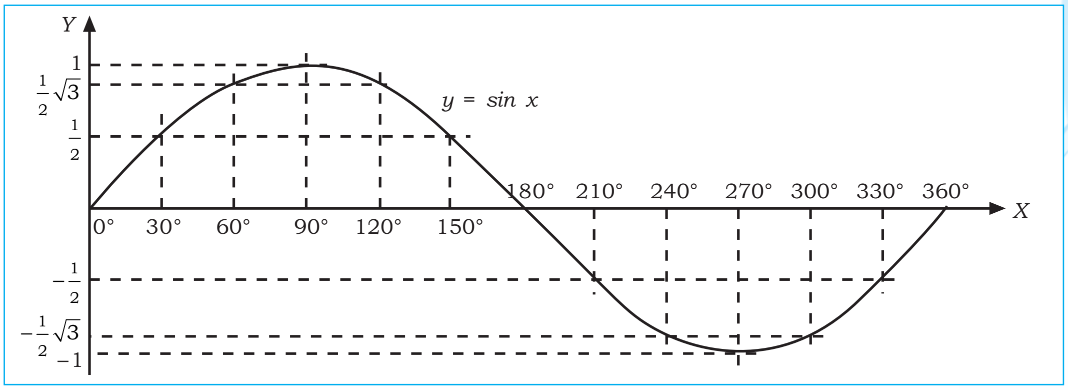
Langkah 1: Menentukan beberapa pasangan titik sebagai koordinat.

x	$y = \sin x$
0°	$\sin 0^\circ = 0$
30°	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$
45°	$\sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
60°	$\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
90°	$\sin 90^\circ = 1$
120°	$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
135°	$\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
150°	$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$
180°	$\sin 180^\circ = \sin 0^\circ = 0$

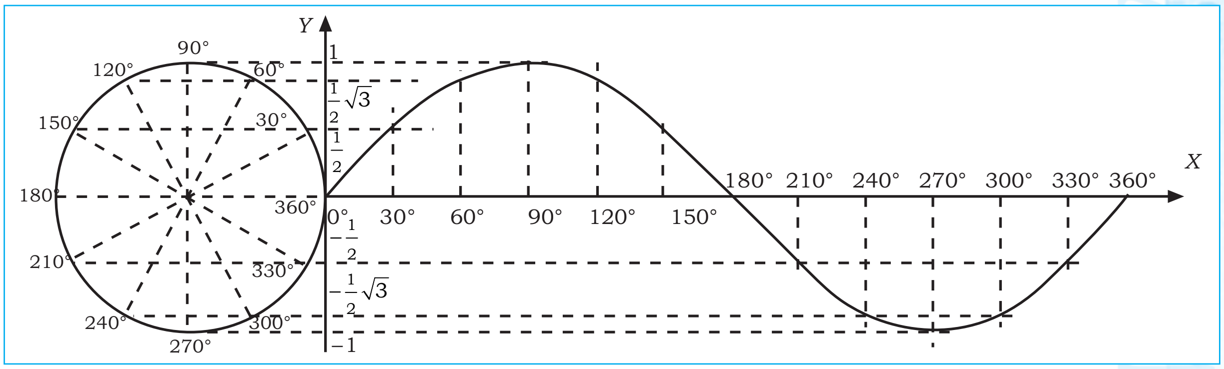
x	$y = \sin x$
210°	$\sin 210^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$
225°	$\sin 225^\circ = -\sin 45^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
240°	$\sin 240^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
270°	$\sin 270^\circ = -\sin 90^\circ = -1$
300°	$\sin 300^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
315°	$\sin 315^\circ = -\sin 45^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
330°	$\sin 330^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$
360°	$\sin 360^\circ = \sin 0^\circ = 0$

Langkah 2:

Cara 1: dengan kurva.



Cara 2: dengan lingkaran satuan.



2. Gambarlah grafik fungsi $y = \cos x$ untuk $0 \le x \le 2\pi$!

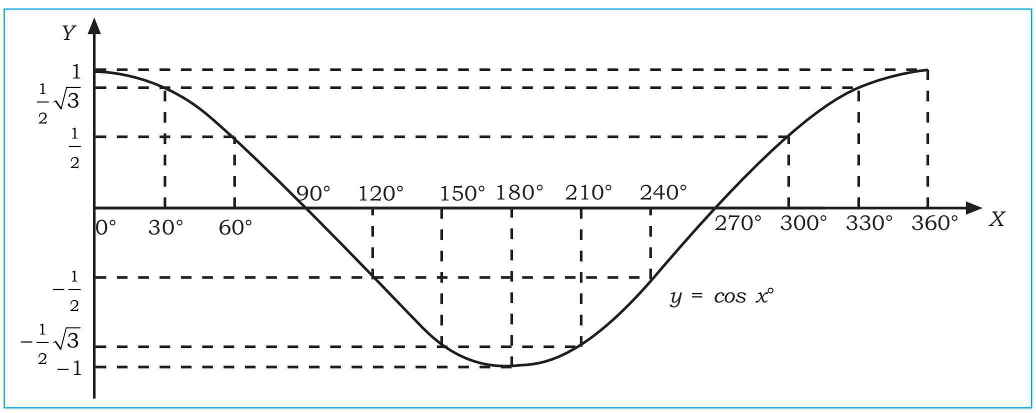
Penyelesaian:

Langkah 1:

x	$y = \cos x$	
0	$\cos 0$	$= 1$
$\frac{1}{6}\pi$	$\cos \frac{1}{6}\pi$	$= \cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{1}{3}\pi$	$\cos \frac{1}{3}\pi$	$= \cos 60° = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}\pi$	$\cos \frac{1}{2}\pi$	$= \cos 90° = 0$
$\frac{2}{3}\pi$	$\cos \frac{2}{3}\pi$	$= \cos 120° = -\frac{1}{2}$
$\frac{5}{6}\pi$	$\cos \frac{5}{6}\pi$	$= \cos 150° = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
π	$\cos \pi$	$= \cos 180° = -1$

x	$y = \cos x$	
$\frac{7}{6}\pi$	$\cos \frac{7}{6}\pi$	$= \cos 210° = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{4}{3}\pi$	$\cos \frac{4}{3}\pi$	$= \cos 240° = -\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}\pi$	$\cos \frac{3}{2}\pi$	$= \cos 270° = 0$
$\frac{5}{3}\pi$	$\cos \frac{5}{3}\pi$	$= \cos 300° = -\frac{1}{2}$
$\frac{11}{6}\pi$	$\cos \frac{11}{6}\pi$	$= \cos 330° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
2π	$\cos 2\pi$	$= \cos 360° = 1$

Langkah 2:



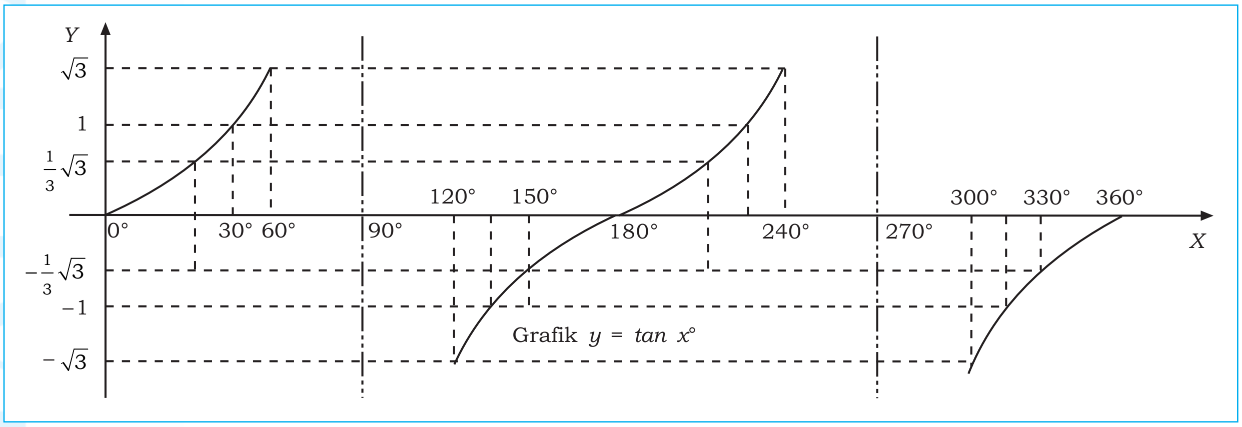
3. Gambarlah grafik $y = \tan x$ untuk $0° \leq x \leq 360°$!

Penyelesaian:

Dengan menggunakan cara tabel.

x	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
y	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
x	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
y	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Gambar grafik $y = \tan x°$ diberikan sebagai berikut.



Aplikasi

Gaya gerak listrik (ggl) yang dibangkitkan oleh arus bolak-balik diberikan dengan rumus:

$e = E_{max} \sin(\omega t)$

dengan e = ggl dalam volt, f = frekuensi dalam Hz

E_{max} = nilai tertinggi dari ggl, t = waktu

$\omega = 2\pi f$

Jika $f = 60$ Hz dan $E_{max} = 165$ volt, tentukan besarnya e dengan waktu yang ditentukan berikut!

a. $t_1 = 3$ μs $= 3 \times 10^{-3}$ detik

b. $t_2 = 11$ μs $= 11 \times 10^{-3}$ detik

Penyelesaian:

a. Untuk $t_1 = 3$ μs $= 3 \times 10^{-3}$ detik

$$
\begin{aligned}
e &= E_{max} \sin(\omega t) \\
&= E_{max} \sin(2\pi f t) \\
&= 165 \cdot \sin(2 \times 3{,}14 \times 60 \times 3 \times 10^{-3}) \\
&= 165 \cdot \sin(1{,}1304 \text{ rad}) \\
&= 165 \cdot \sin(1{,}1304 \times 57{,}3°) \\
&= 165 \cdot \sin 64{,}8° \\
&= 165 \cdot (0{,}905) \\
&= 149{,}3 \text{ volt}
\end{aligned}
$$

Jadi, gaya gerak listrik pada saat $t = 3$ μs sebesar 149,3 volt.

b. Untuk $t_2 = 11$ μs $= 11 \times 10^{-3}$ detik

$$
\begin{aligned}
e &= E_{max} \sin(\omega t) \\
&= E_{max} \sin(2\pi f t \text{ rad}) \\
&= 165 \cdot \sin(2 \times 3{,}14 \times 60 \times 11 \times 10^{-3} \text{ rad})
\end{aligned}
$$

$= 165 \cdot \sin(4{,}1448 \text{ rad})$
$= 165 \cdot \sin(4{,}1448 \times 57{,}3°)$
$= 165 \cdot \sin(-122{,}5°)$
$= 165 \cdot (-\sin 57{,}5°)$
$= 165 \cdot (-0{,}8434)$
$= -139{,}2$ volt

Jadi, gaya gerak listrik pada saat t = 11 μs sebesar –139,2 volt (arah berlawanan).

Latihan 7

Kerjakan soal-soal berikut!

1. Gambarlah grafik fungsi trigonometri berikut untuk nilai x yang diberikan!
   a. $y = 2 \sin x$ untuk $0° \le x \le 360°$
   b. $y = \tan 2x$ untuk $0° \le x \le 180°$
   c. $y = \cos 2x$ untuk $0° \le x \le 180°$
   d. $y = \sin (x + 45°)$ untuk $90° \le x \le 270°$
   e. $y = \cos (2x + 30°)$ untuk $0° \le x \le 180°$
2. Jika $f(x) = 2 \sin (2x + 30°)$, tentukan nilai $f(x)$ jika diketahui fungsi-fungsi berikut!
   a. $f(30°)$
   b. $f(5a)$
   c. $f(x + p)$
3. Tentukan periodesitas dari fungsi trigonometri berikut!
   a. $f(x) = \sin 5x°$
   b. $f(x) = \cos 3x°$
   c. $f(x) = \tan 4x°$
   d. $f(x) = 2 \cdot \sin (3x - 15°)$
   e. $f(x) = 3 \cdot \cos (2x + 45°)$
   f. $f(x) = 5 \cdot \tan (\frac{1}{2}x - 30°)$
4. Tentukan nilai maksimum dan minimum dari fungsi trigonometri berikut!
   a. $f(x) = 4 \cos (4x + 60°)$
   b. $f(x) = 2 \sin x°$
   c. $f(x) = \frac{1}{2} \sin (5x - 40°)$
5. Pada fungsi $y = 600 \sin (52{,}8t + 45°)$, tentukan simpangan sesaat pada waktu $t = 0{,}126$ detik!

Rangkuman

1. Definisi fungsi dapat ditinjau dari dua hal, yaitu:
   a. fungsi sebagai pemetaan, dan
   b. fungsi sebagai pasangan terurut.
2. Sifat-sifat fungsi:
   a. fungsi into,
   b. fungsi injektif,
   c. fungsi surjektif (onto), dan
   d. fungsi bijektif.
3. Grafik fungsi linear dengan persamaan $y = ax + b$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$, untuk menggambar grafik fungsi linear digunakan dua cara:
   a. dengan tabel, serta
   b. dengan menentukan titik potong terhadap sumbu X dan Y.

4. Gradien adalah angka kemiringan grafik yaitu kemiringan terhadap sumbu X positif.

   $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y}{x}$
5. Menentukan persamaan garis melalui satu titik dengan gradien m dengan rumus: $y - y_1 = m(x - x_1)$.
6. Menentukan persamaan garis yang melalui dua titik.

   Rumus: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ atau $y - y_1 = m(x - x_1)$ dengan $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
7. Bentuk umum fungsi kuadrat adalah $f(x) = ax^2 + bx + c$.
   Grafik fungsi kuadrat berbentuk parabola.
   Untuk menggambar parabola dibutuhkan minimal 3 titik, salah satu di antaranya koordinat titik puncak (titik balik).
8. Bentuk umum fungsi eksponen $f : x \to a^x$ atau $f(x) = a^x$, di mana $a > 0$, $a \neq 1$, atau $x \in \mathbb{R}$. Grafik fungsi eksponen $f(x) = a^x$ akan bersifat:
   a. tidak memotong sumbu X,
   b. memotong sumbu Y di titik (0, 1),
   c. untuk $x > 1$, $f(x) = a^x$ akan berupa fungsi naik, dan
   d. untuk $a < 1$, $f(x) = a^x$ akan berupa fungsi turun.
9. Grafik fungsi logaritma $f : x \to {}^a\log x$, dengan $a > 0$, $a \neq 1$, atau $x \in \mathbb{R}$ akan memenuhi atau berlaku:
   a. memotong sumbu X di titik (1, 0),
   b. tidak memotong sumbu Y,
   c. untuk $a > 1$, maka $f(x) = {}^a\log x$ adalah fungsi naik,
   d. untuk $0 < a < 1$, maka $f(x) = {}^a\log x$ adalah fungsi turun, dan
   e. $f(x) = {}^a\log x$ dan $f(x) = {}^{\frac{1}{a}}\log x$ simetris terhadap sumbu X.

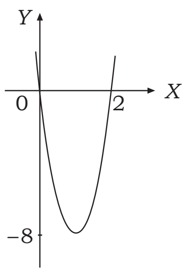
Evaluasi Kompetensi

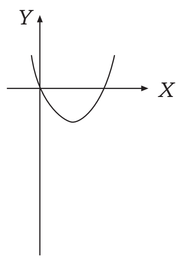
A. *Pilihlah jawaban yang tepat!*

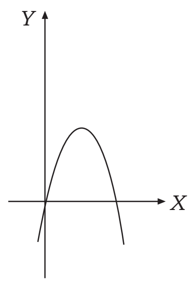
1. Persamaan garis yang melalui titik (–1, 1) dan titik (–2, 6) adalah . . . .
   a. $y = 5x - 4$
   b. $y = 5x + 6$
   c. $y = -5x - 4$
   d. $y = -5x + 4$
   e. $y = -5x - 6$

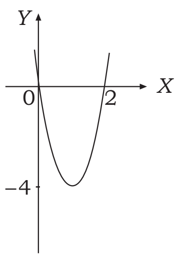
2. Persamaan garis yang melalui titik potong garis dengan persamaan $2x + 5y = 1$ dan $x - 3y = -5$ serta tegak lurus pada garis dengan $2x - y + 5 = 0$ adalah . . . .
   a. $y - x = 0$
   b. $2y + x = 0$
   c. $y = -2x + 2$
   d. $y + 2x + 2 = 0$
   e. $y = -\frac{1}{2}x + 2$

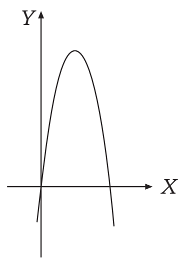
3. Gambar grafik fungsi $y = x^2 - 2x$ adalah . . . .

   a.


   c.


   e.


   b.


   d.


4. Sebuah balok yang kedua ujungnya ditumpu memiliki beban merata sebesar q = 2 ton/m. Persamaan garis momennya adalah $M_x = \frac{1}{2}q\ell x - \frac{1}{2}qx^2$ dengan ℓ = 12 m. Nilai momen (M_x) untuk nilai x = 2, 4, dan 10 adalah . . . .
   a. 20, 32, dan 11
   b. 11, 32, dan 20
   c. 32, 20, dan 11
   d. 11, 20, dan 32
   e. 20, 32, dan 20

5. Koordinat titik balik grafik fungsi $f(x) = x^2 - 6x + 8$ adalah . . . .
   a. 1
   b. –1
   c. –2
   d. 8
   e. –8

6. Nilai m agar grafik fungsi $y = (m - 1)x^2 - 2mx + (m - 3)$ selalu berada di bawah sumbu X (definit negatif) adalah . . . .
   a. $m = 1$
   b. $m > 1$
   c. $m < 1$
   d. $m > \frac{3}{4}$
   e. $m < \frac{3}{4}$

7. Sebuah peluru ditembakkan vertikal dengan persamaan lintasan $h(t) = 150t - 5t^2$. Tinggi maksimum peluru adalah . . . .
   a. 925 m
   b. 1.015 m
   c. 1.025 m
   d. 1.125 m
   e. 1.225 m
8. Nilai x yang memenuhi $9^{3x-4} = 81$ adalah . . . .
   a. 1
   b. 2
   c. 3
   d. 4
   e. 5
9. Himpunan penyelesaian dari $f(x) = {}^2\log x + {}^2\log (x + 2)$ untuk $f(x) = 3$ adalah . . . .
   a. $\{-4, 2\}$
   b. $\{-4\}$
   c. $\{2\}$
   d. $\{2\frac{1}{2}\}$
   e. $\{4\}$
10. Gaya gerak listrik yang dibangkitkan oleh arus bolak-balik diberikan dengan rumus $e = E_{max} \sin 2\pi ft$. Jika $f = 15$ Hz, $E_{max} = 120$ volt, dan $t = \frac{1}{90}$ detik, nilai e adalah . . . .
   a. 60 volt
   b. $60\sqrt{2}$ volt
   c. $60\sqrt{3}$ volt
   d. 90 volt
   e. 120 volt

B. ***Kerjakan soal-soal berikut!***

1. Tentukan persamaan fungsi kuadrat dengan koordinat titik puncak $(-1, -4)$ dan melalui titik $(2, 5)$!
2. Jika rumus $f(x) = \frac{ax-b}{c}$, $f^{-1}(5) = 10$, dan $f^{-1}(2) = \frac{11}{2}$, tentukan rumus fungsi $f(x)$!
3. Suatu massa gas tertentu dipertahankan pada temperatur yang konstan. Diperoleh hasil bahwa variasi tekanan (P) yang diterapkan pada gas tersebut menyebabkan volumenya (V) berubah. Data perubahan diberikan pada tabel berikut.

P (N/m^2)	1,25	1,5	1,8	2,0	2,4	2,5	3,0
V (cm^3)	288	240	200	180	150	144	120

   Jika $P \times V = a$ dengan a konstan, tentukan nilai a dan V agar tekanan P menjadi 4,0!
4. Sebagai jaminan faktor keamanan, dianjurkan untuk menggunakan ukuran diameter poros d sebagai penahan torsi T newton meter. Hasilnya diberikan pada tabel berikut.

d (mm^2)	20	30	40	50	60
T (Nm)	80	270	640	1.250	2.160

   Jika persamaan yang sesuai dengan data pada tabel adalah $T = ad^3$ dengan a konstan, tentukan nilai a!
5. Gaya gerak listrik diberikan dengan rumus $e = E_{max}$ *sin* (ωt). Jika $f = 60$ Hz dan 165 volt, tentukan besarnya e pada saat $t_1 = 18$ µs dan $t_2 = 25$ µs!

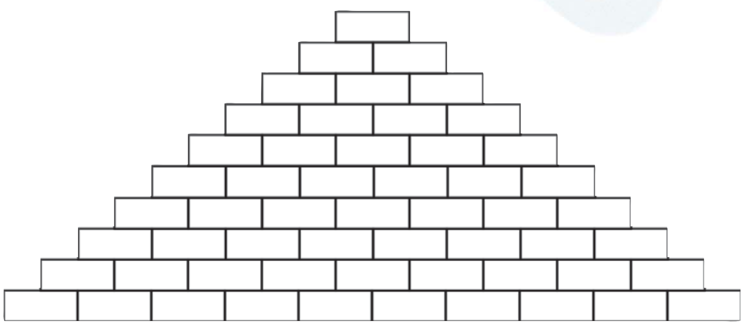
Bab III

Barisan dan Deret

Sumber: *Mesir Kuno*

Piramida Besar "Khufu"

Peradaban bangsa Mesir telah menghasilkan satu peninggalan bersejarah yang diakui dunia sebagai salah satu dari tujuh keajaiban dunia, yaitu piramida. Konstruksi serta keunikan dari piramida membuat bangunan yang dibangun pada 2500 SM menjadi salah satu objek menarik untuk diteliti. Secara sederhana konstruksi bangunan piramida digambarkan sebagai berikut.



Perhatikan perubahan jumlah batu bata pada setiap tingkatan piramida. Batu bata selalu berkurang satu buah pada setiap tingkatan, sehingga banyaknya batu bata yang tersusun dapat dituliskan sebagai urutan bilangan 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Perhatikan bahwa selisih antarsuku yang satu dengan suku sebelumnya besarnya sama.

Selanjutnya, bagaimana dengan barisan yang sukunya merupakan hasil perkalian dari suku-suku sebelumnya? Kemudian, bagaimana menghitung jumlah setiap suku pada suatu barisan? Untuk menjawab pertanyaan tersebut terlebih dahulu kita pelajari uraian materi pada bab berikut.

Kegiatan Belajar 1

Pola, Barisan, dan Deret Bilangan

Sumber: *Ensiklopedia Matematika dan Peradaban Manusia*

Leonhard Euler dan simbol sigma

Ilmu Matematika merupakan ilmu eksakta yang paling banyak menggunakan simbol. Hal ini bertujuan untuk memudahkan penghitungan dan meringkas penulisan angka atau bilangan yang terlalu banyak. Salah satu simbol yang digunakan di dalam matematika adalah **sigma**, yang disimbolkan dengan "Σ". Penggunaan notasi sigma pertama kali dikenalkan oleh seorang ahli matematika dari Swiss bernama *Leonhard Euler* (1701–1783). Notasi yang merupakan huruf Yunani ini banyak berperan di dalam ilmu statistika. Bagaimana melakukan operasi perhitungan dengan menggunakan notasi sigma? Sifat-sifat apa saja yang dimiliki oleh sigma? Untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut terlebih dahulu kita pelajari uraian berikut.

Uraian Materi

A. Pola Bilangan, Barisan, dan Deret

Perlu Tahu

Contoh barisan:
Barisan bilangan ganjil:
1, 3, 5, 7, 11, . . .
Barisan bilangan genap:
2, 4, 6, 8, 10, . . .
Barisan bilangan kuadrat:
1, 4, 9, 16, . . .

1. Barisan

Barisan adalah kumpulan bilangan yang disusun menurut suatu pola tertentu. Suku umumnya dilambangkan dengan $\boldsymbol{U_n}$, dengan $\boldsymbol{n}$ menunjukkan nomor urut suku. Suku-suku suatu barisan merupakan pemetaan dari himpunan bilangan asli ke himpunan suku-suku barisan:

$$f : n \to \boldsymbol{U_n}$$

dengan $U_n = f(n)$ dan $n \in A = \{1, 2, 3 \ldots\}$. Rumus umum untuk mencari suku-suku suatu barisan disebut **pola bilangan**.

Contoh:

Tentukan pola bilangan untuk mencari suku-suku barisan berikut!

a. 0, 1, 2, 3, 4, . . .
b. 1, 3, 9, 27, 81, . . .
c. 4, 9, 16, 25, . . .

Penyelesaian:

a. $U_1 = 0 \to 1 - 1$
$U_2 = 1 \to 2 - 1$
$U_3 = 2 \to 3 - 1$
$\vdots$
Diperoleh $U_n = n - 1$

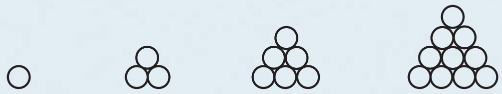
b. $U_1 = 1 \to 3^{1-1}$
$U_2 = 3 \to 3^{2-1}$
$U_3 = 9 \to 3^{3-1}$
$\vdots$
Diperoleh $U_n = 3^{n-1}$

c. $U_1 = 4 \to (1 + 1)^2$
$U_2 = 9 \to (2 + 1)^2$
$U_3 = 16 \to (3 + 1)^2$
$\vdots$
Diperoleh $U_n = (n + 1)^2$

Aplikasi

Perhatikan gambar dan urutan bilangan di bawah ini.

1. Banyaknya lingkaran di bawah: 1, 3, 6, 10, ...



Penyelesaian:

Dari barisan tersebut dapat diperoleh:

$U_1 = 1 \rightarrow \frac{1 \times 2}{2}$ $\qquad$ $U_3 = 6 \rightarrow \frac{3 \times 4}{2}$

$U_2 = 3 \rightarrow \frac{2 \times 3}{2}$ $\qquad$ $U_4 = 10 \rightarrow \frac{4 \times 5}{2}$

Sehingga suku ke-n adalah $U_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Urutan bilangan pada kolom ke-3 kalender bulan Februari 2007: 6, 13, 20, 27.

"Beri Cinta Saja"

PEBRUARI

MINGGU	SENIN	SELASA	RABU	KAMIS	JUM'AT	SABTU
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28			

Penyelesaian:

$U_1 = 6 \rightarrow (7 \cdot 1 - 1)$

$U_2 = 13 \rightarrow (7 \cdot 2 - 1)$

$U_3 = 20 \rightarrow (7 \cdot 3 - 1)$

$U_4 = 27 \rightarrow (7 \cdot 4 - 1)$

Jadi, rumus penanggalan bulan Februari 2007 pada kolom ke-3 adalah $U_n = (7n - 1)$. Rumus ini berlaku juga pada penanggalan bulan-bulan yang lain.

2. Deret

Deret adalah penjumlahan suku-suku suatu barisan bilangan. Dengan kata lain, jika $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n$ adalah barisan bilangan maka bentuk $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$ disebut **deret**. Jumlah n suku pertama dalam suatu deret dinyatakan dengan:

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$$

Contoh:

Nyatakan barisan pada contoh (di halaman 76) dalam bentuk deret!

Penyelesaian:

a. $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$

b. $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \ldots$

c. $4 + 9 + 16 + 25 + \ldots$

Latihan 1

Kerjakan soal-soal berikut!

1. Tulislah lima suku berikutnya dari barisan di bawah ini!
   a. 5, 9, 13, 17, . . .
   b. 80, 76, 72, 68, . . .
   c. 2, 5, 10, 17, 26, . . .
   d. 1, 4, 9, 16, . . .
   e. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

Info

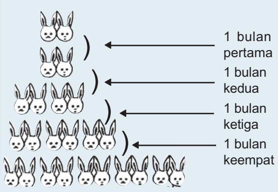
Sumber: *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia*

Leonardo Fibonacci

Leonardo Fibonacci adalah salah satu ahli matematika terbesar pada abad pertengahan yang berasal dari Itali. Pada tahun 1202, Fibonacci menulis buku Aljabar dan Aritmatika yang salah satu isinya merupakan permasalahan menarik sebagai berikut.

Sepasang kelinci pada saat itu dianggap terlalu muda untuk bereproduksi, sehingga satu bulan kemudian banyaknya kelinci tetap berjumlah satu pasang. Satu bulan berikutnya sepasang kelinci tersebut melahirkan satu pasang anak kelinci dan begitu pula pada bulan-bulan berikutnya. Jika ditetapkan bahwa setiap pasang kelinci hanya melahirkan satu kali maka berapa banyak jumlah kelinci pada setiap bulan?

Ilustrasi permasalahan:



Jika disajikan dalam bentuk angka, ilustrasi di atas menjadi:

1 1 2 3 5 8 ....

yang disebut **barisan Fibonacci**.

Pola barisan Fibonacci diperoleh dari aturan berikut.

1 1
1 + 1 = 2
1 + 2 = 3
2 + 3 = 5
3 + 5 = 8
5 + 8 = 13
8 + 13 = 21
. . . dan seterusnya.

2. Tulislah 5 suku pertama dari soal berikut ini!

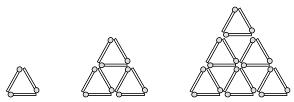
   a. $U_n = 2^n - 1$ b. $U_n = \dfrac{3n-1}{3n+1}$

3. Carilah rumus suku ke-n dari barisan bilangan berikut!

   a. 99, 96, 93, . . . c. $1, \frac{2}{3}, 2, \frac{5}{2}, \ldots$
   b. 3, 9, 27, . . . d. $1, -1, 1, -1, \ldots$

4. Tentukan 5 suku pertama dari barisan berikut!
   a. $U_1 = 5,\ U_n = U_{n-1} + 10$
   b. $U_1 = 5,\ U_2 = 6,\ U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$
   c. $U_1 = 1,\ U_2 = 2,\ U_n = (U_{n-1} - U_{n-2})^2$

5. Batang-batang korek api disusun sehingga membentuk kerangka seperti ditunjukkan pada gambar berikut.



Perhatikan gambar di atas dan lengkapi tabel berikut!

Kerangka	1	2	3	4	5
Banyaknya korek api					

Ada berapa batang korek api yang dibutuhkan untuk membentuk kerangka ke-10?
Ada berapa batang korek api yang dibutuhkan untuk membentuk kerangka ke-n?

B. Notasi Sigma

1. Pengertian Notasi Sigma

Notasi sigma adalah suatu cara untuk menyatakan bentuk penjumlahan yang singkat dan dilambangkan dengan ”Σ” (dibaca: ”sigma”), yaitu huruf Yunani pertama. Selain itu notasi tersebut juga berasal dari kata ”SUM” yang berarti **jumlah**.

Diketahui deret $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$. Jika data tersebut dinyatakan dalam notasi sigma diperoleh:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$$

Contoh:

1. Diberikan barisan $U_n = 2n^2 - 1$.
   a. Nyatakan dalam bentuk deret!
   b. Nyatakan jumlah 6 suku pertama dalam bentuk notasi sigma!

   Penyelesaian:

   a. 1 + 7 + 17 + 31 + 49 + 71 + . . .

   b. $S_6 = \sum_{n=1}^{6} (2n^2 - 1)$

2. Hitunglah!

   a. $\sum_{n=1}^{10} n$ c. $\sum_{n=1}^{4} (2^n - 1)$

   b. $\sum_{n=2}^{5} (n-1)(n+1)$

Penyelesaian:

a. $\sum\limits_{n=1}^{10} n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$

b. $\sum\limits_{n=2}^{5} (n - 1)(n + 1) = (2 - 1)(2 + 1) + (3 - 1)(3 + 1) + (4 - 1)(4 + 1) + (5 - 1)(5 + 1)$

$= 1 \,.\, 3 + 2 \,.\, 4 + 3 \,.\, 5 + 4 \,.\, 6 = 50$

c. $\sum\limits_{n=1}^{4} (2^n - 1) = (2^1 - 1) + (2^2 - 1) + (2^3 - 1) + (2^4 - 1)$

$= (2 - 1) + (4 - 1) + (8 - 1) + (16 - 1)$

$= 1 + 3 + 7 + 15 = 26$

2. Sifat-Sifat Notasi Sigma

Notasi sigma memiliki beberapa sifat sebagai berikut.

a. $\sum\limits_{n=1}^{k} c = \underbrace{c + c + c + \ldots + c}_{\text{sebanyak } k \text{ suku}} = k \times c$, untuk c suatu konstanta.

Contoh:

1. $\sum\limits_{n=1}^{3} 2 = 2 + 2 + 2 = 3 \times 2 = 6$
2. $\sum\limits_{n=1}^{17} 9 = 17 \times 9 = 133$

b. $\sum\limits_{n=1}^{k} c \cdot f(n) = c \sum\limits_{n=1}^{k} f(n)$

Contoh:

1. $\sum\limits_{n=1}^{4} 8n = 8 \sum\limits_{n=1}^{4} n = 8(1 + 2 + 3 + 4) = 8(10) = 80$
2. $\sum\limits_{n=1}^{7} 2(n^2 - 1) = 2 \sum\limits_{n=1}^{7} (n^2 - 1) = 2(0 + 3 + 8 + 15 + 24 + 36 + 48)$

   $= 2(134) = 268$

c. $\sum\limits_{n=1}^{k} f(n) + g(n) = \sum\limits_{n=1}^{k} f(n) + \sum\limits_{n=1}^{k} g(n)$

Contoh:

$\sum\limits_{n=1}^{2} 2n + 2 = \sum\limits_{n=1}^{2} 2n + \sum\limits_{n=1}^{2} 2$

$= ((2 \times 1) + 2 \times 2)) + (2 + 2)$

$= (2 + 4) + (2 + 2) = 6 + 4 = 10$

Sementara itu,

$\sum\limits_{n=1}^{2} 2n + 2 = ((2 \times 1) + 2) + ((2 \times 2) + 2) = (2 + 2) + (4 + 2) = 10$

Jadi, terbukti jawaban benar.

Info

Sumber: *Kompas, 10 Februari 2007*

Kegiatan di Bursa Efek Jakarta

Notasi sigma banyak digunakan dalam ilmu statistika, yaitu cabang ilmu matematika yang mempelajari perhitungan angka-angka guna mengambil suatu keputusan.

d. $$\sum_{n=1}^{k} f(n) = \sum_{n=1}^{r} f(n) + \sum_{n=r+1}^{k} f(n)$$

Contoh:

Buktikan $\sum_{n=1}^{9} 3 = \sum_{n=1}^{4} 3 + \sum_{n=5}^{9} 3$

Ruas kiri:

$$\sum_{n=1}^{9} 3 = 9 \cdot 3 = 27$$

Ruas kanan:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{4} 3 + \sum_{n=5}^{9} 3 &= 4 \cdot 3 + 5 \cdot 3 \\ &= 12 + 15 \\ &= 27 \end{aligned}$$

Diperoleh ruas kiri = ruas kanan (terbukti).

e. $$\sum_{n=r}^{s} f(n) = \sum_{n=r+t}^{s+t} f(n-t)$$

Contoh:

Buktikan $\sum_{n=2}^{7} 2n = \underbrace{\sum_{n=1}^{6} 2(n+1)}_{\text{Bukti 1}} = \underbrace{\sum_{n=3}^{8} 2(n-1)}_{\text{Bukti 2}}$

Bukti 1:

Ruas kiri: $$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{7} 2n &= 2\sum_{n=2}^{7} n = 2(2+3+4+5+6+7) \\ &= 2(27) = 54 \end{aligned}$$

Ruas kanan: $$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{6} 2(n+1) &= 2\sum_{n=1}^{6} (n+1) \\ &= 2(2+3+4+5+6+7) \\ &= 2(27) \\ &= 54 \end{aligned}$$

Diperoleh ruas kiri = ruas kanan (terbukti).

Bukti 2:

Ruas kiri: $$\sum_{n=1}^{6} 2(n+1) = 54$$

Ruas kanan: $$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{8} 2(n-1) &= 2\sum_{n=3}^{8} (n-1) \\ &= 2(2+3+4+5+6+7) \\ &= 2(27) \\ &= 54 \end{aligned}$$

Diperoleh ruas kiri = ruas kanan (terbukti).

f. $$\sum_{n=m}^{k} (f(n) + g(n))^2 = \sum_{n=m}^{k} (f(n)^2 + 2 \cdot f(n) \cdot g(n) + g(n)^2)$$

$$= \sum_{n=m}^{k} f(n)^2 + \sum_{n=m}^{k} 2 \cdot f(n) \cdot g(n) + \sum_{n=m}^{k} g(n)^2$$

$$= \sum_{n=m}^{k} f(n)^2 + 2\sum_{n=m}^{k} f(n) \cdot g(n) + \sum_{n=m}^{k} g(n)^2$$

Perlu Tahu

Perhatikan bahwa:

$\sum_{n=r+t}^{s+t} a(p-t)$, untuk:

$t = 1$ diperoleh:

$\sum_{n=r+1}^{s+1} a(p-1)$

$t = -2$ diperoleh:

$\sum_{n=r-2}^{s-2} a(p+2)$

Contoh:

$$\sum_{x=2}^{5}(x-3)^2 = \sum_{x=2}^{5}x^2 - \sum_{x=2}^{5}6x + \sum_{x=2}^{5}9$$
$$= \sum_{x=2}^{5}x^2 - 6\sum_{x=2}^{5}x + \sum_{x=2}^{5}9$$
$$= (2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) - 6(2 + 3 + 4 + 5) + 4 \times 9$$
$$= (4 + 9 + 16 + 25) - 6(14) + 4 \times 9$$
$$= 54 - 84 + 36$$
$$= 6$$

Kilas Balik

Pada bab 3 telah dipelajari bentuk kuadrat:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$
$$= a(a + b) + b(a + b)$$
$$= a^2 + a \cdot b + b \cdot a + b^2$$
$$= a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2$$
$$= a^2 + 2a \cdot b + b^2$$

3. Menyederhanakan Bentuk Sigma

Dengan menggunakan sifat-sifat pada notasi sigma, kita dapat menyederhanakan bentuk sigma seperti pada contoh berikut.

Contoh:

1. $$\sum_{n=2}^{7}(2n^2 - 2n) + \sum_{n=5}^{10}(n-5) = \sum_{n=2}^{7}(2n^2 - 2n) + \sum_{n=5}^{10}(n-5)$$
$$= \sum_{n=2}^{7}(2n^2 - 2n) + \sum_{n=5-3}^{10-3}(n+3-5)$$
$$= \sum_{n=2}^{7}(2n^2 - 2n) + \sum_{n=2}^{7}(n-2)$$
$$= \sum_{n=2}^{7}(2n^2 - 2n + n - 2)$$
$$= \sum_{n=2}^{7}(2n^2 - n - 2)$$

2. $$\sum_{p=3}^{8}(p^2 + 8p) - \sum_{p=6}^{11}(-31 - 6p) = \sum_{p=3}^{8}(p^2 + 8p) - \sum_{p=6-3}^{11-3}(-31 - 6(p+3))$$
$$= \sum_{p=3}^{8}(p^2 + 8p) - \sum_{p=3}^{8}(-31 - 6p - 18)$$
$$= \sum_{p=3}^{8}(p^2 + 8p) - \sum_{p=3}^{8}(-49 - 6p)$$
$$= \sum_{p=3}^{8}(p^2 + 8p - (-49 - 6p))$$
$$= \sum_{p=3}^{8}(p^2 + 8p + 49 + 6p)$$
$$= \sum_{p=3}^{8}(p^2 + 14p + 49)$$
$$= \sum_{p=3}^{8}(p+7)^2$$

Latihan 2

Kerjakan soal-soal berikut!

1. Nyatakan dalam bentuk penjumlahan!

   a. $\sum_{n=2}^{5} 3 \cdot n$

   b. $\sum_{k=2}^{4} (n - k)^3$

   c. $\sum_{x=5}^{7} (3x + 1)$

   d. $\sum_{k=m}^{n} ak$, dengan a suatu konstanta

2. Nyatakan dengan notasi sigma!

   a. $1 + 4 + 9 + 16 + 25$

   b. $2 + 3 + 4 + 5 + 6$

   c. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}$

   d. $3 - 6 + 12 - 24 + \ldots - 96$

   e. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \ldots + x_n^2$

   f. $4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \ldots + 512$

3. Sederhanakan bentuk berikut menjadi satu notasi sigma!

   a. $\sum_{p=1}^{m} (3p - 2)^2 - \sum_{p=1}^{m} (p^2 + 1)$

   b. $\sum_{p=1}^{3} 3p + p^2 - \sum_{p=3}^{5} p^3 - 2p$

4. Buktikan bahwa:

   $$\sum_{p=-3}^{6} (2p + 3)^2 = 4 \sum_{p=2}^{11} p^2 + 6 \sum_{p=2}^{11} p + 9$$

5. Sebuah tumpukan kaleng pembasmi hama disusun membentuk segitiga sama sisi dengan n buah kaleng pada tiap sisinya. Nyatakan banyaknya kaleng dalam notasi sigma jika terdiri atas n tumpukan!

Kegiatan Belajar 2

Barisan dan Deret Aritmatika

Seorang supir mobil ambulans mencatat jumlah bensin yang telah digunakan dan jarak yang telah ditempuh oleh ambulans. Catatan dari sopir mobil ambulans tersebut yaitu, dengan bensin sebanyak 12 liter maka ambulans dapat menempuh jarak 85 km. Jika pada awal supir mobil ambulans mencatat angka yang ditunjukkan oleh pengukur jarak pada mobil ambulans adalah 23.215 dan bensin yang telah digunakan sebanyak 108 liter, tentukan total jarak yang telah ditempuh oleh mobil ambulans tersebut. Untuk dapat menyelesaikan permasalahan tersebut, terlebih dahulu kita pelajari uraian berikut.

Sumber: *http://www.photobucket.com*

Ambulans

Uraian Materi

A. Barisan Aritmatika

Barisan aritmatika adalah suatu barisan dengan beda antara dua suku yang berurutan selalu tetap. Dengan kata lain, barisan U_1, U_2, U_3, . . ., disebut barisan aritmatika jika:

$$U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = U_4 - U_3 = U_n - U_{n-1} = \textbf{konstanta}$$, yang selanjutnya disebut **beda**.

Misalkan $U_1 = a$ dan beda $= b$ maka barisan aritmatika dapat dinyatakan sebagai:

$a, a + b, a + 2b, \ldots, a + (n - 1)b$

Jadi, rumus suku ke-n barisan aritmatika adalah:

$$U_n = a + (n - 1)b$$

Intisari

Suku awal dinotasikan a.
Selisih dua suku disebut beda, dinotasikan b.
Suku ke-n dinotasikan U_n dengan $U_n = a + (n - 1)b$.

Contoh:

1. Tentukan suku ke-35 dari barisan aritmatika 2, 8, 14, ...

   Penyelesaian:

   $a = 2$, $b = 8 - 2 = 6$, $n = 35$

   $$\begin{aligned} \text{Jadi, } U_{35} &= a + (n - 1)b \\ &= 2 + ((35 - 1) \cdot 6) \\ &= 2 + (34 \times 6) = 2 + 204 = 206 \end{aligned}$$

2. Tentukan suku ke-21 jika diketahui suku ke-5 dan suku ke-9 barisan aritmatika adalah 35 dan 43!

   Penyelesaian:

   Dari $U_n = a + (n - 1)b$, diperoleh:

   $$\begin{aligned} U_5 &= a + 4b = 35 \quad \ldots (1) \\ U_9 &= a + 8b = 43 \quad \ldots (2) \end{aligned}$$

   Eliminasi a dari persamaan (1) dan persamaan (2):

   $$\begin{aligned} a + 4b &= 35 \\ a + 8b &= 43 \quad - \\ \hline -4b &= -8 \\ \Leftrightarrow \quad b &= 2 \end{aligned}$$

Substitusi $b = 2$ pada persamaan (2):

$$\begin{aligned} a + 8b &= 43 \\ \Leftrightarrow \quad a + (8 \times 2) &= 43 \\ \Leftrightarrow \quad a &= 43 - 16 \\ \Leftrightarrow \quad a &= 27 \end{aligned}$$

Jadi, $U_{21} = 27 + (21 - 1)2 = 67$

Aplikasi

Untuk mengolah tanah pertanian disediakan cakram bajak yang ukuran diameternya masing-masing membentuk barisan aritmatika: 12, 18, 24, . . ., 72.

Tentukan banyaknya cakram bajak yang disediakan!

Penyelesaian:

$a = 12$; $b = 18 - 12 = 6$; $U_n = 72$.

$U_n = a + (n - 1)b$

$72 = 12 + (n - 1)b$

$\Leftrightarrow \quad 72 = 12 + (n - 1)6$

$\Leftrightarrow \quad 72 = 12 + 6n - 6$

$\Leftrightarrow \quad 6n = 72 - 12 + 6$

$\Leftrightarrow \quad 6n = 66$

$\Leftrightarrow \quad n = 11$

Jadi, cakram bajak yang disediakan sebanyak 11 buah.

B. Deret Aritmatika

Deret aritmatika adalah jumlah suku-suku barisan aritmatika. Jika $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n$ merupakan barisan aritmatika maka $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$ disebut **deret aritmatika**, dengan U_n adalah suku ke-n dari deret tersebut.

Jika S_n menotasikan jumlah n suku pertama deret aritmatika $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$ maka:

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$$

Sn dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut.

$$\begin{aligned} S_n &= U_n + (U_n - b) + (U_n - 2b) + \ldots + a \\ S_n &= a + (a + b) + (a + 2b) + \ldots + U_n \quad + \\ \hline 2S_n &= (a + U_n) + (a + U_n) + (a + U_n) + \ldots + (a + U_n), \text{ sebanyak } n \text{ suku.} \\ 2S_n &= n(a + U_n) \end{aligned}$$

Jadi, $S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$ atau $S_n = \frac{n}{2}[a + a + (n - 1)\,b] = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)b]$.

Contoh:

1. Hitunglah jumlah 11 suku pertama dari deret 3, 7, 11, 14, ...

   Penyelesaian:

   $a = 3$, $b = 4$, $n = 11$

   $$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}[2a + (n - 1)4] \\ S_n &= \frac{11}{2}[2 \times 3 + (11 - 1)4] \\ &= \frac{11}{2}(6 + 40) \\ &= \frac{11}{2}(46) = 253 \end{aligned}$$

Info

Pada barisan aritmatika, jika banyaknya suku adalah ganjil maka suku tengahnya (dinotasikan U_t) dapat dicari dengan rumus:

$U_t = \frac{1}{2}(U_1 + U_n)$ dengan $n = 2t - 1$.

Contoh:

Tentukan suku tengah dari: 23, 27, 31, . . . 47.

Jawab:

$a = 23$, $b = 4$, $U_n = 47$

$$\begin{aligned} U_n &= a + (n - 1) \cdot 4 \\ 24 &= (n - 1) \cdot 4 \\ 6 &= n - 1 \Leftrightarrow n = 7 \\ n &= 2t - 1 \\ 7 &= 2t - 1 \\ 2t &= 8 \\ t &= 4 \end{aligned}$$

Diperoleh:

$$\begin{aligned} U_t &= \tfrac{1}{2} \cdot (U_1 + U_n) \\ U_t &= \tfrac{1}{2} \cdot (23 + 47) \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot (70) = 35 \end{aligned}$$

Jadi, suku tengahnya adalah U_4 yaitu 35.

2. Hitunglah jumlah deret: 4 + 9 + 14 + . . . + 104!

Penyelesaian:

$a = 4,\ b = 5,\ U_n = 104$

dari $U_n = a + (n-1)b$, diperoleh

$$\begin{aligned}
104 &= 4 + (n-1)5 \\
104 - 4 &= (n-1)5 \\
100 &= 5n - 5 \\
5n - 5 &= 100 \\
5n &= 105 \\
n &= 21
\end{aligned}$$

Jadi, $S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$

$= \frac{21}{2}(4 + 104) = 1.134$

3. Tentukan jumlah semua bilangan asli antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3!

Penyelesaian:

Barisan bilangan asli antara 1 dan 100: 1, 2, 3, 4, 5, ...

Barisan bilangan asli antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3: 3, 6, 9, 12, . . .

Jadi, barisan bilangan asli antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3 ialah 3, 6, 9, 12, . . ., 99.

Sehingga deret yang dimaksud adalah 3 + 6 + 9 + . . . + 99.

$a = 3,\ b = 3,\ U_n = 99$

dari $U_n = a + (n-1)b$

diperoleh:

$$\begin{aligned}
& 99 = 3 + (n-1)3 \\
\Leftrightarrow\ & 99 - 3 = (n-1)3 \\
\Leftrightarrow\ & 96 = 3n - 3 \\
\Leftrightarrow\ & 3n - 3 = 96 \\
\Leftrightarrow\ & 3n = 99 \\
\Leftrightarrow\ & n = 33
\end{aligned}$$

Jadi, $S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$

$= \frac{33}{2}(3 + 99)$

$= 1.683$

Intisari

$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_{n-2} + U_{n-1} + U_n$

$= U_n + U_{n-1} + U_{n-2} + \ldots + U_1$

$= U_n + (U_n - b) + (U_n - 2b) + \ldots + a$

Diperoleh:

$$\begin{aligned}
S_n &= U_n + (U_n - b) + (U_n - 2b) + \ldots + a \\
S_n &= a + (a + b) + (a + b) + \ldots + U_n \quad + \\
\hline
2S_n &= (a + U_n) + (U_n - b + a + b) + (U_n - 2b + a + 2b) + \ldots + (a + U_n) \\
2S_n &= \underbrace{(a + U_n) + (a + U_n) + (a + U_n) + \ldots + (a + U_n)}_{\text{sebanyak } n \text{ suku}}
\end{aligned}$$

Jadi, $2S_n = n(a + U_n)$

$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$

Aplikasi

Sebuah traktor mempunyai 40 liter solar pada tangkinya. Jika pada setiap 3 km solar berkurang 0,125 liter, tentukan sisa solar pada tangki jika traktor telah berjalan sejauh 60 km.

Penyelesaian:

Permasalahan solar pada traktor merupakan deret aritmatika, dengan $a = 0;\ b = 0{,}125;\ n = 60 : 3 = 20$

$$\begin{aligned}
U_{20} &= a + 19 \cdot b \\
&= 0 + 19 \cdot 0{,}125 \\
&= 2{,}375 \\
S_{20} &= 10 + (a + U_{20}) \\
&= 10 + (0 + 2{,}375) \\
&= 12{,}375
\end{aligned}$$

Solar yang digunakan untuk menempuh jarak 60 km adalah 12,375 liter.

Sisa solar = 40 – 12,375

= 27,625

Jadi, sisa solar 27,625 liter.

Info

Mencari Umur Pohon

Sumber: *Ensiklopedia Matematika dan Peradaban Manusia*

Batang pohon yang diiris melintang

Setiap tahun, seiring pohon tumbuh, batangnya membesar dalam lingkaran-lingkaran yang memusat (konsentris). Lapisan yang berurutan ini lebarnya berbeda-beda tergantung dengan cuaca. Keliling batang itu rata-rata bertambah sebesar 2,5 cm (1 inci) setiap tahun. Beberapa pohon tidak mengikuti ketentuan ini. Kayu merah dan cemara tumbuh lebih cepat, sedangkan pohon yes, jeruk, *horse-chestnut* tumbuh lebih lambat. Pohon palem sama sekali tidak mengikuti pola ini.

Latihan 3

Kerjakan soal-soal berikut!

1. Tentukan suku ke-55 dari barisan 5, 9, 13, 17, . . . !
2. Tentukan suku ke-63 dari barisan 10, 7, 4, 1, . . . !
3. Tentukan suku ke-20 jika diketahui suku ke-5 dan suku ke-8 barisan aritmatika adalah masing-masing 27 dan 42!
4. Suku ke-10 barisan aritmatika adalah –60 dan suku ke-3-nya adalah –11, tentukan suku ke-21-nya!
5. Tentukan banyaknya bilangan yang habis dibagi 5 antara 1 sampai dengan 100!
6. Hitunglah jumlah 30 suku pertama dari deret 4 + 7 + 10 + 13 + . . . !
7. Hitunglah jumlah deret 15 + 10 + 5 + . . . + 200!
8. Tentukan suku pertama dan beda dari deret aritmatika jika diketahui S_{15} = 150 dan U_{15} = 24!
9. Sebuah kawat panjangnya 105 cm dipotong menjadi 6 bagian. Apabila potongan kedua 5 cm lebih panjang dari potongan pertama, potongan ketiga 5 cm lebih panjang dari potongan kedua, dan seterusnya, tentukan panjang kawat potongan pertama dan terakhir!
10. Sebuah perusahaan agroindustri menargetkan peningkatan jumlah produksi 750 kg hasil pertanian per bulan. Jika pada bulan Februari 2006 produksinya telah mencapai 45.000 kg, tentukan produksi pada bulan Desember 2006 dan jumlah produksi selama periode tersebut!

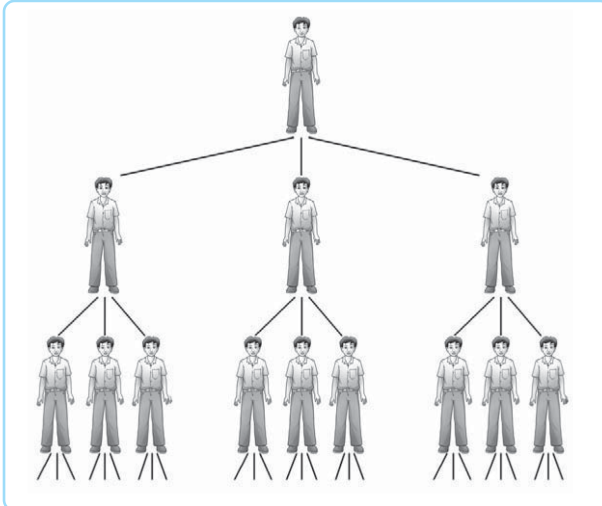
Kegiatan Belajar 3

Barisan dan Deret Geometri

Suatu perusahaan menerapkan sistem pemasaran berjenjang (*Multi Level Marketing*) yang dikembangkan dengan ketentuan bahwa setiap anggota pada suatu jenjang harus memiliki tiga orang anggota pada jenjang di bawahnya. Dengan asumsi semua anggota dapat memenuhi syarat yang ditentukan oleh perusahaan maka banyaknya anggota pada setiap jenjang sebagai berikut.

$$1, 3, 9, 27, 81, 243, \ldots$$

Susunan bilangan di atas adalah sebuah contoh barisan bilangan. Dengan mengetahui pola bilangan dalam barisan tersebut kita dapat menentukan banyaknya anggota pada jenjang-jenjang berikutnya serta jumlah seluruh anggota jaringan sampai jenjang tertentu. Untuk mengetahui cara menghitungnya terlebih dahulu kita pelajari uraian berikut.



Sumber: *Dokumentasi SMK*

Ilustrasi prosedur anggota perusahaan Multi Level Marketing

Uraian Materi

A. Barisan Geometri

Barisan geometri adalah suatu barisan dengan perbandingan antara dua suku yang berurutan selalu tetap. Barisan U_1, U_2, U_3, . . ., disebut **barisan geometri** jika:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{U_4}{U_3} = \ldots = \frac{U_n}{U_{n-1}} = \textbf{konstanta}$$

yang selanjutnya disebut ***rasio***.

Misalkan $U_1 = a$ dan rasio $= r$ maka barisan geometri dapat dinyatakan sebagai:

$a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}$

Jadi, rumus suku ke-n barisan geometri adalah:

$$U_n = a \cdot r^{n-1}$$

Contoh:

1. Tentukan suku ke-6 dari barisan geometri 2, 4, 8, ...

   Penyelesaian:

   Diketahui: $a = 2$, $r = 2$, $n = 6$

   $U_n = ar^{n-1}$

   Jadi, $U_6 = 2 \cdot 2^{6-1} = 2 \cdot 2^5 = 2(32) = 64$

2. Tentukan suku ke-7 dari barisan geometri 27, 9, 3, ...

   Penyelesaian:

   Diketahui: $a = 27$, $r = \frac{1}{3}$, $n = 7$

   $U_n = a \cdot r^{n-1}$

   Jadi, $U_7 = 27 \cdot {\frac{1}{3}}^{7-1} = 27 \cdot {\frac{1}{3}}^{6} = 27 \cdot \frac{1}{729} = \frac{1}{27}$

3. Pada suatu barisan geometri diketahui $U_3 = 2$ dan $U_6 = \frac{1}{4}$. Tentukan suku ke-8!

Penyelesaian:

Dari $U_n = ar^{n-1}$ diperoleh:

$U_3 = ar^2 = 2 \quad . . . (1)$

$U_6 = ar^5 = \frac{1}{4} \quad . . . (2)$

Substitusikan persamaan (1) ke persamaan (2):

$$\begin{array}{llll} \frac{2}{r^2} \cdot r^5 = \frac{1}{4} & & ar^2 & = 2 \\ \Leftrightarrow \quad 2r^3 & = \frac{1}{4} & a(\frac{1}{2})^2 & = 2 \\ \Leftrightarrow \quad r^3 & = \frac{1}{8} & a \cdot \frac{1}{4} & = 2 \\ \Leftrightarrow \quad r & = \frac{1}{2} & a & = 8 \end{array}$$

Jadi, $U_8 = a \cdot r^7 = 8 \cdot (\frac{1}{2})^7 = 8 \cdot (\frac{1}{128}) = \frac{1}{16}$.

Aplikasi

Seorang perawat mencatat penggunaan cairan infus seorang pasien. Saat dicatat, volume cairan infus adalah 8 cm^3. Setelah satu menit volume cairan infus menjadi 7 cm^3. Pada menit kedua volumenya menjadi $\frac{49}{8}$. Tentukan volume cairan infus pada menit ke-4!

Penyelesaian:

Diketahui: $a = 8 \text{ cm}^3$

$r = \frac{7}{8}$

$n = 4$

Diperoleh: $U_4 = a \cdot r^3$

$= 8 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^3$

$= 8 \cdot \left(\frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8}\right) = \frac{343}{64}$

Jadi, volume cairan infus pada menit ke-4 adalah $\frac{343}{64}$ cm^3.

B. Deret Geometri

Deret Geometri adalah jumlah suku dari barisan geometri. Jika suku-suku barisan geometri a, ar, ar^2, . . ., ar^{n-1} dijumlahkan maka diperoleh deret geometri:

$$S_n = a + ar + ar^2 + . . . + ar^{n-1}$$

atau

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (ar^{n-1})$$

Kilas Balik

Operasi pada bilangan berpangkat telah kita pelajari pada bab 1, antara lain:

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

Untuk mendapatkan jumlah n suku pertama deret geometri adalah:

$$
\begin{aligned}
S_n &= a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} \\
rS_n &= ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n \quad - \\
\hline
(1 - r)S_n &= a + 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 - ar^n \\
(1 - r)S_n &= a(1 - r^n)
\end{aligned}
$$

Jadi, $S_n = \dfrac{a \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \rightarrow$ untuk $r \neq 1$ dan $r > 1$

atau

$S_n = \dfrac{a \cdot (1 - r^n)}{1 - r} \rightarrow$ untuk $r \neq 1$ dan $r < 1$

Contoh:

1. Hitunglah jumlah deret geometri 3 + 6 + 12 + . . . + 384!

   Penyelesaian:

   $a = 3$, $r = 2$, $U_n = 384$

   $$
   \begin{aligned}
   U_n &= a \cdot r^{n-1} \\
   a \cdot r^{n-1} &= 384 \\
   \Leftrightarrow \quad 3 \cdot 2^{n-1} &= 384 \\
   \Leftrightarrow \quad 2^{n-1} &= 128 \\
   \Leftrightarrow \quad 2^{n-1} &= 2^7 \\
   \Leftrightarrow \quad n - 1 &= 7 \\
   \Leftrightarrow \quad n &= 8
   \end{aligned}
   $$

   $$S_8 = \frac{3 \cdot (2^8 - 1)}{2 - 1} = 3 \cdot (255) = 765$$

2. Hitunglah jumlah 7 suku pertama dari deret geometri 4 + 2 + 1 + ...

   Penyelesaian:

   $a = 4$, $r = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

   $$S_7 = \frac{4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4\left(1 - \frac{1}{128}\right)}{\frac{1}{2}} = 8 \cdot \frac{127}{128} = \frac{1.016}{128} = 7\frac{15}{16}$$

Aplikasi

Sebuah ban sepeda motor elastis dijatuhkan dari sebuah bukit pada bidang datar dengan ketinggian 15 m. Jika pantulan ban selanjutnya setinggi $\frac{4}{5}$ dari tinggi sebelumnya, tentukan jumlah lintasan ban setelah memantul selama 3 kali!

Penyelesaian:

Permasalahan ban memantul merupakan deret geometri dengan $a = 15$ m; $r = \frac{4}{5}$; $n = 3$.

Diperoleh: $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

$$= \frac{15\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^3\right)}{\left(1-\frac{4}{5}\right)}$$

$$= \frac{15(1-0,512)}{1-\frac{4}{5}}$$

$$= \frac{15(0,488)}{\frac{1}{5}}$$

$= 7{,}32 \times 5$

$= 36{,}6$

Jadi, jumlah lintasan yang dilalui ban setelah memantul selama 3 kali adalah 36,6 m.

C. Deret Geometri Tak Hingga

Deret geometri tak hingga adalah deret geometri yang banyak sukunya tak berhingga. Deret tak hingga ada dua jenis sebagai berikut.

1. Deret Geometri Tak Hingga Konvergen

Deret geometri tak hingga konvergen adalah suatu deret geometri dengan $-1 < r < 1$ atau $|r| < 1$. Jumlah deret geometri tak hingga konvergen dirumuskan dengan nilai pendekatan:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

Info

Di dalam matematika dikenal bilangan tak hingga, dinotasikan ∞ dan bilangan negatif tak hingga, dinotasikan $-\infty$.

Contoh:

Tentukan jumlah deret geometri tak hingga $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$.

Penyelesaian:

$a = 2$, $r = \frac{1}{2}$ (konvergen)

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

$$\infty \quad = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

Perlu Tahu

Sebuah deret dikatakan konvergen jika mempunyai rasio tetap.

2. Deret Geometri Tak Hingga Divergen

Deret geometri tak hingga divergen adalah deret geometri dengan $r > 1$ atau $r < -1$ atau $|r| > 1$.

Jumlah deret geometri tak hingga divergen tidak didefinisikan.

Contoh:

Deret tak hingga divergen

a. $1, -\frac{1}{3}, 2, \frac{-2}{3}, 3, -\frac{4}{3}, \ldots$

b. $10, 5, 3, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots$

Info

Suatu deret tak hingga dikatakan divergen jika antarkedua sukunya tidak mempunyai rasio yang sama.

Contoh:

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}$

Aplikasi

Sebuah bola dijatuhkan dari ketinggian 81 meter. Lalu memantul kembali setinggi $\frac{2}{3}$ dari ketinggian semula, begitu seterusnya. Tentukan jarak lintasan bola sampai bola tersebut berhenti!

Penyelesaian:

Saat bola tersebut turun: 8 + 54 + 36 + . . .

Diketahui: $a = 81$; $r = \frac{2}{3}$

$$S_\infty = \frac{81}{1-\frac{2}{3}} = \frac{81}{\frac{1}{3}} = 243 \text{ m}$$

Diperoleh: saat bola tersebut naik: 54 + 36 + 24 + . . .

Diketahui: $a = 54$; $r = \frac{2}{3}$

$$S_\infty = \frac{54}{1-\frac{2}{3}} = \frac{54}{\frac{1}{3}} = 162 \text{ m}$$

Diperoleh jarak lintasan bola tersebut berhenti adalah panjang lintasan saat bola turun ditambah panjang lintasan saat bola naik.

$S_\infty = 243 + 162 = 405$

Jadi, jarak lintasan bola hingga berhenti sejauh 405 m.

Latihan 4

Kerjakan soal-soal berikut!

1. Tentukan tiga suku berikutnya dari barisan geometri berikut!
   a. 1, –3, 9, –27, . . .
   b. 100, 50, 25, . . .
   c. 5, 15, 45, . . .
   d. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$
2. Tentukan rumus ke-n dari barisan geometri di bawah ini!
   a. 1, 2, 4, . . .
   b. 12, 6, 3, . . .
   c. –1, 2, –4, . . .
   d. $27, -9\sqrt{3}, 9, -3\sqrt{3}, \ldots$
   e. 8, 4, 2, . . .
3. Tentukan suku yang diminta dari barisan geometri di bawah ini!
   a. U_8 dari barisan: 2, 6, 18, . . .
   b. U_5 dari barisan: 1, -2, 4, . . .
   c. U_6 dari barisan: 1, 3, 9, . . .
   d. U_7 dari barisan: 5,-15, 45, . . .
4. Tentukan suku ke-10 dari barisan geometri yang diketahui suku pertamanya 6 dan suku keempatnya –48!

5. Tentukan suku ke-6 dari suatu barisan geometri yang diketahui $U_2 = -20$ dan $U_4 = -5$!
6. Tentukan jumlah 9 suku pertama suatu deret geometri $2 + 4 + 8 + \ldots$!
7. Tentukanlah jumlah tujuh suku pertama dari deret geometri diketahui: $1 - 3 + 9 - 27 + \ldots$!
8. Tentukan jumlah 5 suku pertama suatu deret geometri yang diketahui $U_3 = 16$ dan $U_6 = 1.024$!
9. Suku pertama deret geometri adalah 7 dan rasionya $\frac{2}{7}$, tentukan jumlah sampai tak hingga!
10. Sebuah bola dijatuhkan tegak lurus dari ketinggian 4 meter dan setiap kali memantul tingginya $\frac{3}{4}$ tinggi semula. Tentukan panjang lintasan yang dilalui bola sampai berhenti!

Rangkuman

1. Barisan bilangan adalah urutan bilangan yang diatur mengikuti pola atau formula tertentu.
2. Pola barisan aritmatika suku ke-n dinyatakan $U_n = a + (n - 1)b$, a = suku awal, b = beda.

   Pola barisan geometri suku ke-n dinyatakan $U_n = ar^{n-1}$, a = suku awal, r = pembanding atau ratio.
3. Deret aritmatika dinyatakan $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$

   bila $U_n = a + (n - 1)b$ maka $S_n = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)b)$ atau $S_n = \frac{n}{2}(a + \ell)$, ℓ = suku terakhir.
4. Deret geometri dinyatakan $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$

   $U_n = ar^{n-1}$ maka $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ bila $|r| < 1$ dan deret turun tak hingga

   maka $S_\infty = \frac{a}{1 - r}$.
5. Secara umum jumlah deret S_n maka terdapat hubungan bahwa $S_n - S_{(n-1)} = U_n$ dan untuk deret aritmatika $U_n - U_{(n-1)} = b$ (beda). Untuk deret geometri $U_n = U_{(n-1)} = r$ (ratio).
6. Notasi sigma

   a. $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

   b. $\sum_{k=1}^{n} c = n \times c$ untuk c konstan

   c. $c \times \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} c \times a_k$

   d. $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

   e. $\sum_{k=1}^{n} (1+i)^k = (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \ldots + (1+i)^n$

   f. $\sum_{k=1}^{n} (1+i)^{-k} = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \ldots + (1+i)^{-n}$

Evaluasi Kompetensi

A. *Pilihlah jawaban yang tepat!*

1. Nilai dari $\sum_{n=1}^{5} 2^n$ adalah . . . .
   a. 10
   b. 26
   c. 62
   d. 64
   e. 128

2. Rumus suku ke-n dari barisan bilangan: 3, 8, 15, 24 adalah . . . .
   a. $U_n = n + 2$
   b. $U_n = 2n^2 + 2$
   c. $U_n = n^2 + 2n$
   d. $U_n = 2n^2 + 2$
   e. $U_n = 2n^2$

3. Beda dari barisan $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{8}{6}, \frac{10}{6}$ adalah . . . .
   a. 2
   b. $\frac{3}{5}$
   c. $\frac{2}{3}$
   d. $\frac{1}{2}$
   e. $\frac{1}{3}$

4. Seorang petani jeruk mencatat hasil panennya selama 11 hari pertama. Setiap harinya mengalami kenaikan tetap, yaitu dimulai hari pertama, kedua, ketiga berturut-turut 15 kg, 19 kg, 23 kg, dan seterusnya. Jumlah panen selama 11 hari pertama adalah . . . .
   a. 260 kg
   b. 271 kg
   c. 285 kg
   d. 385 kg
   e. 405 kg

5. Suatu perusahaan pada tahun pertama memproduksi 5.000 unit barang. Pada tahun-tahun berikutnya jumlah produksi turun secara tetap sebesar 80 unit per tahun. Perusahaan tersebut memproduksi 3.000 unit barang pada tahun ke . . . .
   a. 24
   b. 25
   c. 26
   d. 27
   e. 28

6. Rasio dari barisan bilangan 2, $\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}$ adalah . . . .
   a. $\frac{1}{4}$
   b. $\frac{1}{3}$
   c. $\frac{1}{2}$
   d. 1
   e. $\frac{3}{2}$

7. Suku pertama suatu barisan geometri adalah 16 dan suku ke-3 adalah 36, besar suku ke-5 adalah . . . .
   a. 81
   b. –52
   c. –46
   d. 46
   e. 46

8. Diketahui deret geometri dengan suku pertama 4 dan suku ke-5 adalah 324. Jumlah delapan suku pertama deret tersebut adalah . . . .
   a. 6.174
   b. 6.074
   c. 5.974
   d. 3.087
   e. 3.078

9. Jumlah deret tak hingga dari barisan geometri dengan rasio $\frac{1}{2}$ adalah 12. Suku awal barisan tersebut adalah . . . .
   a. 3
   b. 4
   c. 5
   d. 6
   e. 8

10. Diberikan barisan geometri: 18, 12, 8 . . . . Jumlah tak hingga dari barisan geometri tersebut adalah . . . .
   a. 54
   b. 52
   c. 48
   d. 40
   e. 36

B. *Kerjakan soal-soal berikut!*

1. Suku pertama dari barisan aritmatika adalah 4, sedangkan bedanya –3. Tentukan suku ke berapa yang nilainya sama dengan –68!
2. Gaji seorang karyawan rumah sakit setiap bulan dinaikkan sebesar Rp5.000,00. Jika gaji pertama karyawan rumah sakit tersebut Rp100.000,00, hitunglah jumlah gaji selama satu tahun pertama!
3. Tentukan suku ke-8 barisan geometri: 4, 2, 1, . . . !
4. Tentukan U_{n+4}, jika dari suatu barisan geometri diketahui: $U_n = 12$ dan $U_{n+3} = 96$!
5. Seorang nenek yang menjalani terapi medis dalam 1 jam pertama dapat berjalan sejauh 8 km. Dalam 1 jam kedua mampu menempuh 4 km, dan seterusnya. Setiap jam berikutnya ia menempuh jarak $\frac{1}{2}$ dari jarak 1 jam sebelumnya. Hitunglah jarak paling jauh yang dapat ditempuh oleh nenek tersebut!

Bab IV

Geometri Dimensi Dua

Sumber: *www.wikipedia.org*

Letak Suatu Tempat di Permukaan Bumi

Pernahkah kalian mendengar istilah film 3 dimensi? Film ini disukai karena terlihat lebih nyata. Sebenarnya, apa arti kata dimensi? Dimensi berasal dari bahasa Latin yaitu *dimension* yang berarti menentukan ukuran. Dimensi merupakan suatu parameter atau ukuran yang digunakan untuk mendefinisikan karakteristik suatu objek, misalnya panjang, lebar, dan berat objek tersebut. Di dalam matematika, dimensi digunakan untuk menentukan posisi suatu objek terhadap ruang. Besarnya dimensi pada ruang sama dengan banyak parameter yang digunakan pada objek tersebut. Dimensi hampir diterapkan pada berbagai disiplin ilmu dengan parameter dan ruang yang relevan dengan topik yang tengah dibahas. Sebagai contoh, penerapan pada ilmu geografi parameter yang digunakan adalah meter atau kaki. Pada ilmu ekonomi, parameter yang digunakan adalah *cost* (banyak pembelian atau penjualan) dan *price* (harga). Contoh lain adalah menentukan letak suatu tempat di atas permukaan bumi dengan menggunakan pedoman garis lintang dan garis bujur. Artinya, parameter yang digunakan sebanyak 2 buah. Dengan demikian dimensi yang digunakan untuk menentukan letak adalah dimensi dua. Pembahasan lebih lanjut tentang geometri dimensi dua akan kita pelajari pada bab berikut.

Kegiatan Belajar 1

Sudut

Sumber: *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia*

Kapal Monmouth

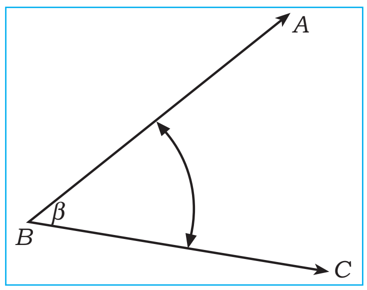
Kedaulatan suatu negara bersifat mutlak. Atas dasar ini, setiap negara memunyai sistem keamanan dengan kelebihannya masing-masing. Sebagai contoh kapal Monmouth yang merupakan kapal pengawal Angkatan Laut Kerajaan Inggris. Kapal ini dilengkapi dengan teknologi paling canggih untuk memperkecil deteksi oleh radar, inframerah, dan sumber-sumber magnetis lainnya. Radar dapat mendeteksi jarak benda-benda dengan mengukur waktu yang diperlukan oleh gelombang radio untuk sampai ke benda, dipantulkan, dan kembali ke radar penangkap sinyal. Semakin banyak permukaan berbentuk vertikal pada benda, semakin mudah pula benda terdeteksi oleh radar. Kemudahan terdeteksinya suatu kapal oleh radar disebut "*signature*". Kapal perang Monmouth mempunyai signature pada semua permukaan vertikalnya yang dibuat miring sebesar 7°.

Uraian Materi

Besar Suatu Sudut

1. Pengertian Sudut

Sudut adalah daerah yang dibatasi oleh dua buah sinar (ruas garis) dan bertemu pada satu titik. Sudut dapat dipahami pula sebagai suatu bangun yang terbentuk oleh dua sinar (dua sinar ini disebut kaki sudut).



Dari gambar di samping disebut sudut B atau sudut β atau sudut ABC dinotasikan $\angle ABC$ yang dibatasi oleh dua buah ruas garis (sinar) $\overline{BA}$ dan $\overline{BC}$ serta satu titik sudut B. Besarnya sudut ditentukan oleh besarnya rotasi yang diperlihatkan oleh arah anak panah.

2. Macam-Macam Satuan Sudut

a. Satuan Derajat (. . . °)

Satuan derajat disebut juga "*satuan sudut sexagesimal*", yaitu keliling lingkaran dibagi dengan 360 bagian yang sama. Diketahui sudut satu keliling lingkaran adalah 360°. Misalkan besar sudut α adalah 1° dan panjang busur $AB = \frac{1}{360}$ keliling lingkaran maka satu derajat adalah $\frac{1}{360}$ keliling lingkaran. Selanjutnya untuk keakuratan pengukuran, satuan derajat dibagi lagi menjadi satuan yang lebih kecil yaitu menit ($'$) dan detik ($''$).

Hubungan antara derajat, menit, dan detik sebagai berikut.

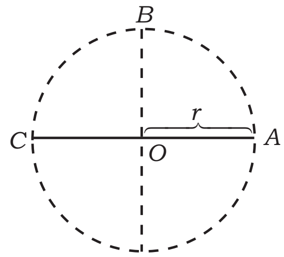
$1° = 60'$

$1' = 60''$

b. Satuan Radian (rad)

Satuan radian disingkat rad. Apabila busur AB ($\cap AB$) sama dengan jari-jari lingkaran (r) maka besar sudut tersebut adalah satu radian.

Perhatikan gambar di samping.



$$\frac{\frac{1}{2}\text{ keliling lingkaran}}{\text{jari-jari}} = \frac{\pi r}{r} = \pi$$

Perbandingan $\frac{\cap AB}{OA} = \frac{r}{r} = 1$, menunjukkan ukuran sudut AOB. Nilai bilangan itu disebut ukuran **radian**.

Busur ABC adalah bangun setengah lingkaran πr, sehingga:

$$\frac{\text{Busur } AB}{OA} = \frac{\pi \cdot r}{r} = \pi \text{ } rad$$

c. Centisimal/gon/grade

Satuan gon ditulis 1^g. Satuan gon menyatakan panjang busur lingkaran = $\frac{1}{400}$ keliling lingkaran tersebut. Jadi, besar sudut pusat lingkaran = 400^g.

3. Konversi Satuan Sudut

Sesuai dengan prosedur mengenai perhitungan besar sudut, satuan sudut dalam derajat dapat dikonversikan ke satuan sudut dalam radian atau sebaliknya.

a. Mengubah Radian ke Derajat atau Sebaliknya

$$\pi \text{ rad} = 180°$$

$$\Leftrightarrow 1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi}, \pi = 3,14$$

$$\Leftrightarrow 1 \text{ rad} = \frac{180°}{3,14}$$

$$1 \text{ rad} = 57,3248408°$$

$$1 \text{ rad} = 57°17'45''$$

$$180° = \pi \text{ rad}$$

$$\Leftrightarrow 1° = \frac{180°}{\pi}, \pi = 3,14$$

$$\Leftrightarrow 1° = \frac{180}{3,14} \text{ rad}$$

$$1° = 0,017 \text{ rad}$$

b. Mengubah Radian ke Gon (1^g) atau Sebaliknya

$$\pi \text{ rad} = 200^g$$

$$\Leftrightarrow 1 \text{ rad} = \left(\frac{200}{\pi}\right)^g, \pi = 3,14$$

$$\Leftrightarrow 1 \text{ rad} = \left(\frac{200}{3,14}\right)^g$$

$$1 \text{ rad} = 63,69^g$$

$$200^g = \pi \text{ rad}$$

$$\Leftrightarrow 1^g = \frac{\pi}{200} \text{ rad}, \pi = 3,14$$

$$\Leftrightarrow 1^g = \frac{3,14}{200} \text{ rad}$$

$$1^g = 0,016 \text{ rad}$$

c. Mengubah Derajat ke Gon atau Sebaliknya

$$180° = 200^g$$

$$\Leftrightarrow 1° = \left(\frac{200°}{180}\right)^g$$

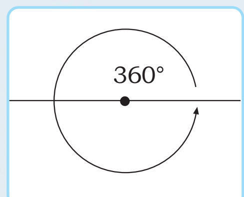
$$1° = 1,11^g$$

$$\Leftrightarrow 200^g = 180°$$

$$\Leftrightarrow 1^g = \frac{180°}{200}$$

$$1^g = 0,9°$$

Perlu Tahu



Sumber: *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia*

Sudut dalam Lingkaran

Satu lingkaran penuh mempunyai sudut sebesar 360°. Lingkaran dibagi ke dalam 360° untuk alasan sejarah, yaitu diambil dari banyaknya hari dalam setahun dalam kalender Babilonia kuno. Astronom Yunani, Hipparchos dikenal karena membagi lingkaran menjadi 360°.

Contoh:

1. Konversikan sudut 31,56° ke bentuk satuan derajat, menit, dan detik!

   Penyelesaian:

   $$\begin{aligned} 31{,}56^\circ &= 31^\circ + 0{,}56' \\ &= 31^\circ + \left(\frac{56}{100} \times 60'\right) \\ &= 31^\circ + 33{,}6' = 31^\circ + 33' + 0{,}6' \\ &= 31^\circ + 33' + \left(\frac{6}{10} \times 60''\right) \\ &= 31^\circ + 33' + 36'' \end{aligned}$$

   Jadi, $31{,}56^\circ = 31^\circ 33' 36''$.

2. Konversikan 5 rad ke bentuk satuan gon!

   Penyelesaian:

   $$\begin{aligned} 5 \text{ rad} &= (5 \times 63{,}69)^g \\ &= 318{,}45^g \end{aligned}$$

   Jadi, 5 rad = $318{,}45^g$.

3. Konversikan 22,6° ke satuan radian!

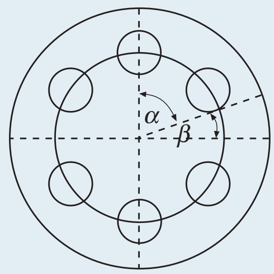
   Penyelesaian:

   $$\begin{aligned} 22{,}6^\circ &= (22{,}6 \times 0{,}017) \text{ rad} \\ &= 0{,}3842 \text{ rad} \end{aligned}$$

   Jadi, 22,6° = 0,3842 rad.

Aplikasi

Gambar di samping adalah sebuah *packing*. Hitung sudut α dan β dari gambar di samping dalam satuan radian!



Penyelesaian:

Sudut antara 2 lubang:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ \\ &= 60^\circ \times 0{,}017 \text{ rad} \\ &= 1{,}02 \text{ rad} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= (90^\circ - \alpha) \times 0{,}017 \text{ rad} \\ &= 30^\circ \times 0{,}017 \text{ rad} \\ &= 0{,}51 \end{aligned}$$

Latihan 1

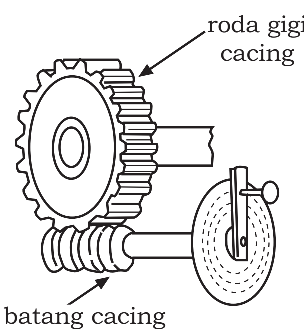
Kerjakan soal-soal berikut!

1. Nyatakan ke dalam satuan radian!
   a. 15,3° b. 60° c. 120^g d. 240^g
2. Nyatakan ke dalam satuan derajat!
   a. $\frac{2}{3}\pi$ rad b. $\frac{1}{2}\pi$ rad c. 25^g d. 100^g
3. Nyatakan ke dalam satuan grade/gon!
   a. 30° b. 42° c. $\frac{1}{6}\pi$ rad d. $\frac{2}{6}\pi$ *rad*
4. Nyatakan derajat berikut ke dalam derajat, menit, dan detik!
   a. 45,5° b. 60,75° c. 60,42° d. 50,36°
5. Pada trasmisi roda gigi pada kepala pembagi, perbandingan roda cacing dan batang cacing adalah 40 : 1.

   Hitunglah hasil berikut!

   a. Sudut yang ditempuh roda cacing bila batang cacing diputar sebanyak 1 putaran.

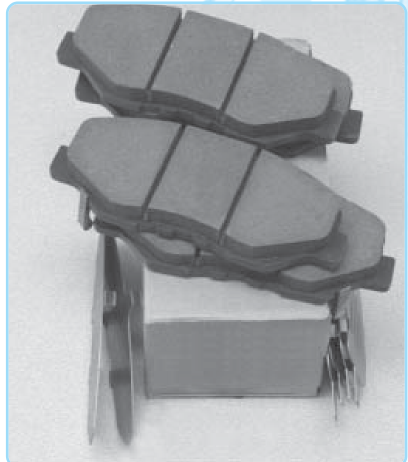
   b. Putaran batang cacing agar roda cacing berputar 1 radian. (jawabannya dalam satuan derajat)



Kegiatan Belajar 2

Keliling dan Luas Bangun Datar

Segala sesuatu di muka bumi ini memunyai bentuk dan ukuran. Di dalam matematika, benda yang memunyai ukuran dapat dilakukan perhitungan terhadap benda tersebut. Ilmu yang mempelajari pengukuran disebut geometri. Geometri berasal dari kata *geo* = *earth* (bumi) dan *metria* = *measure* (ukuran). Geometri merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika selain ilmu bilangan. Ilmu geometri dapat kita jumpai pada kehidupan sehari-hari. Sebagai contoh pada mesin mobil atau motor. Sistem pengereman tromol pada mobil maupun motor menggunakan kampas yang berpenampang segi empat melengkung dan mengikuti kontur sepatu kampas dan tromol rem. Pada permasalahan ini ilmu ukur geometri digunakan untuk menghitung luas permukaan kampas. Secara signifikan semakin luas bidang pengereman maka kemampuan mengerem akan semakin besar. Lebih lanjut mengenai luas dan keliling bangun datar akan kita pelajari pada uraian berikut.



Sumber: *www.abltechnology.com*
Kampas rem

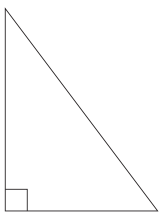
Uraian Materi

A. Macam-Macam Bangun Datar Beraturan

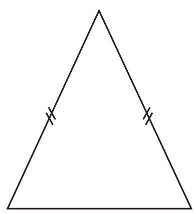
1. Segitiga

a. Macam-Macam Segitiga

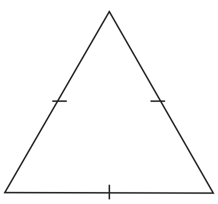
1) Segitiga siku-siku



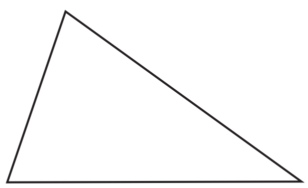
3) Segitiga sama kaki



2) Segitiga sama sisi



4) Segitiga sebarang



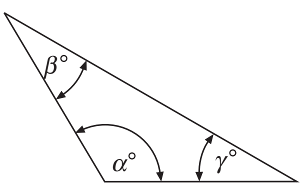
Perlu Tahu

Sumber: *www.wikipedia.org*
Piramida Besar Khufu

Piramida-piramida bangsa Mesir Kuno yang dibangun 4000 tahun yang lalu masih merupakan contoh yang paling kuat dari struktur bangunan yang menggunakan bentuk-bentuk segitiga.

b. Sifat-Sifat pada Segitiga

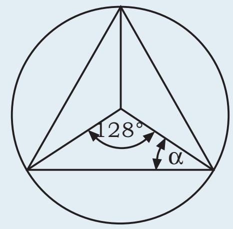
1) Jumlah seluruh sudut di dalam bangun segitiga adalah 180°



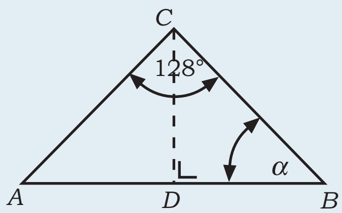
$$\alpha° + \beta° + \gamma° = 180°$$

Aplikasi

Sebuah tarali ventilasi rumah sakit berbentuk seperti gambar di samping. Tentukan besar sudut α!



Penyelesaian:
Segitiga pada tarali dapat digambarkan sebagai berikut.

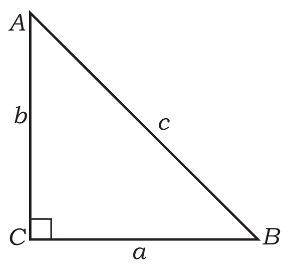


Δ *BCD* merupakan segitiga siku-siku di titik *D*. Dengan menggunakan aturan sudut pada segitiga siku-siku diperoleh:

$$\angle B + \angle C + \angle D = 180°$$
$$\Leftrightarrow \alpha + \left(\frac{1}{2} + 128°\right) + 90° = 180°$$
$$\Leftrightarrow \quad \alpha + 64° + 90° = 180°$$
$$\Leftrightarrow \quad \alpha + 154° = 26°$$

Jadi, besar sudut α adalah 26°.

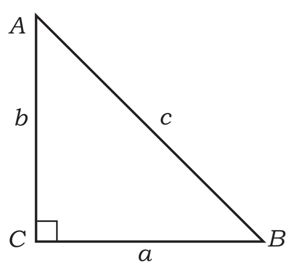
2) *Teorema Pythagoras*



Untuk segitiga siku-siku berlaku Teorema Pythagoras, yaitu: "Kuadrat sisi miring sama dengan jumlah kuadrat sisi siku-sikunya", atau

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Contoh:
Pada segitiga siku-siku berikut panjang *AC* = 4 cm dan *CB* = 8 cm.
Tentukan panjang *AB*!



Penyelesaian:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{AC^2 + CB^2} \\ &= \sqrt{(4)^2 + (8)^2} \\ &= \sqrt{16 + 64} \\ &= \sqrt{80} \\ &= 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

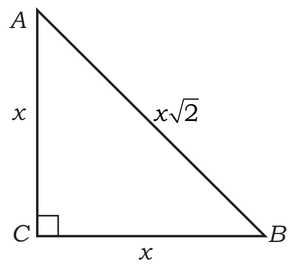
Jadi, panjang AB adalah $4\sqrt{5}$ cm.

3) *Segitiga Istimewa*

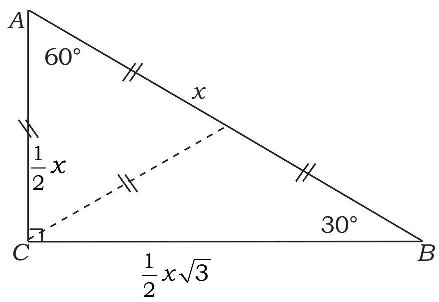
a) *Segitiga Siku-Siku Sama Kaki*

Pada segitiga siku-siku sama kaki jika sisi sikunya adalah *x* satuan maka sisi miringnya adalah $x\sqrt{2}$ satuan. Perhitungan berdasarkan Teorema Pythagoras sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
c^2 &= a^2 + b^2 \\
\Leftrightarrow \quad c &= \sqrt{a^2 + b^2} \\
\Leftrightarrow \quad c &= \sqrt{x^2 + x^2} \\
\Leftrightarrow \quad c &= \sqrt{2x^2} \\
\Leftrightarrow \quad c &= x\sqrt{2}
\end{aligned}
$$



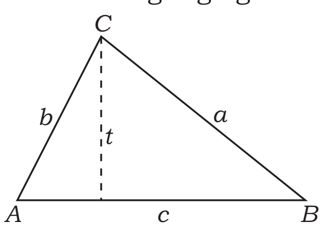
b) Segitiga Siku-Siku Tidak Sama Kaki



Diberikan sebuah segitiga siku-siku yang memunyai besar dua sudut selain sudut siku-siku adalah 30° dan 60°. Jika panjang sisi miring x satuan maka sisi siku-siku di depan sudut 30° yaitu AC besarnya sama dengan setengah sisi miringnya $\left(\frac{1}{2}x\right)$. Untuk sisi siku-siku di depan sudut 60° BC besarnya adalah $\frac{1}{2}x\sqrt{3}$.

c) Keliling dan Luas Segitiga

Diberikan bangun segitiga sebarang ABC dengan panjang sisi-sisinya adalah a, b, c, dan tingginya t. Rumus luas dan keliling segitiga diberikan sebagai berikut.

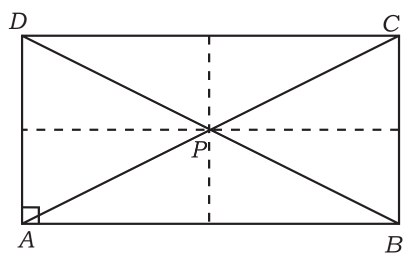


Keliling = $a + b + c$
= jumlah semua sisi-sisinya

Luas = $\frac{1}{2}$ × alas × tinggi
= $\sqrt{S \cdot (S-a) \cdot (S-b) \cdot (S-c)}$
dengan $S = \frac{a+b+c}{2}$

2. Persegi Panjang

Bangun datar persegi panjang memunyai sifat-sifat sebagai berikut.



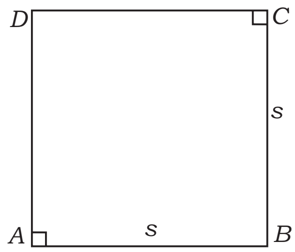
a. Setiap sisi yang berhadapan memunyai panjang yang sama, yaitu $\overline{AB} = \overline{DC}$ dan $\overline{BC} = \overline{AC}$.
b. Memiliki empat buah sudut siku-siku.
c. Memiliki dua buah diagonal yang berpotongan di satu titik, yaitu titik S.
d. Titik S membagi dua diagonal menjadi dua bagian yang sama, yaitu $\overline{AS} = \overline{SC}$ dan $\overline{BS} = \overline{SD}$.
e. Memiliki dua sumbu simetri, dua simetri lipat, dan simetri putar tingkat dua.

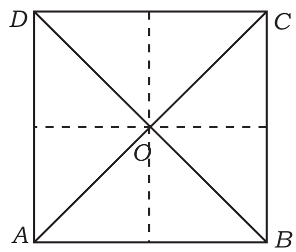
Rumus keliling dan luas persegi panjang diberikan sebagai berikut.

Keliling = $2 \times (p + l)$
Luas = $p \times l$

l = lebar dan p = panjang

3. Persegi





Persegi adalah bangun persegi panjang yang keempat sisinya sama panjang. Persegi disebut juga belah ketupat siku-siku.

Sifat-sifat bangun datar persegi sebagai berikut.

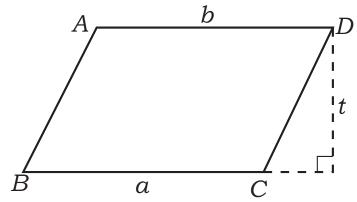
a. Sisi-sisi pada persegi memunyai panjang yang sama, yaitu $AB = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$.
b. Diagonal pada persegi membagi sudut-sudutnya menjadi dua bagian sama besar.
c. Diagonalnya membagi persegi menjadi dua segitiga siku-siku sama kaki yang kongruen.
d. Diagonal-diagonal pada persegi sama panjang dan saling membagi dua sama panjang.
e. Persegi memunyai empat buah sumbu simetri, empat simetri lipat, dan simetri putar tingkat empat.

Rumus keliling dan luas persegi adalah:

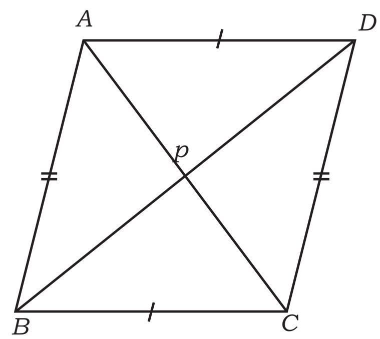
Keliling = $4 \times s$
Luas = $s \times s = s^2$

s = sisi

4. Jajaran Genjang



Jajaran genjang adalah bangun datar yang memunyai empat buah sisi yang saling berhadapan, sejajar, dan sama panjang. Bangun jajaran genjang memunyai sifat-sifat antara lain sebagai berikut.



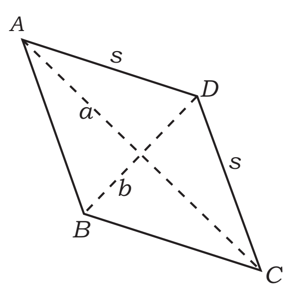
a. Sisi yang berhadapan sama panjang dan sejajar, yaitu $\overline{AB} = \overline{DC}$ dan $\overline{AD} = \overline{BC}$.
b. Sudut-sudut yang berhadapan sama besar, yaitu $\angle A = \angle C$ dan $\angle B = \angle D$.
c. Mempunyai dua diagonal yang berpotongan di satu titik (titik p) dan saling membagi dua sama panjang, yaitu $\overline{AP} = \overline{PC}$ dan $\overline{BP} = \overline{PD}$.
d. Mempunyai simetri putar tingkat dua.
e. Tidak memiliki simetri lipat dan sumbu simetri.

Rumus keliling dan luas jajaran genjang adalah:

Keliling = $2 \times (a + b)$
Luas = $a \times t$

a = alas dan t = tinggi

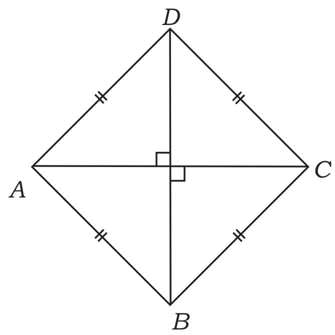
5. Belah Ketupat



Belah ketupat adalah bangun jajar genjang yang memunyai sisi-sisi yang sama panjang. Belah ketupat disusun dari dua buah segitiga yang kongruen dan alasnya berimpit.

Sifat-sifat pada bangun datar belah ketupat antara lain sebagai berikut.

a. Memiliki sisi-sisi sama panjang, yaitu $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$.
b. Sudut-sudut yang berhadapan sama besar, yaitu $\angle ABC = \angle ADC$, $\angle BAD = \angle BCD$ serta dua simetri lipat dan simetri putar tingkat dua.



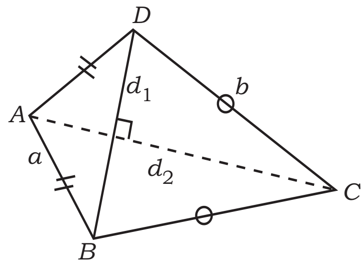
c. Memiliki dua buah diagonal yang saling tegak lurus dan saling membagi dua sama panjang.
d. Mempunyai dua buah sumbu simetri.

Rumus keliling dan luas belah ketupat adalah:

$$\text{Keliling} = 4 \times s$$
$$\text{Luas} = \frac{1}{2} \times a \times b$$

dengan a dan b adalah panjang diagonal-diagonalnya.

6. Layang-Layang



Bangun layang-layang adalah bangun belah ketupat yang memunyai dua pasang sisi yang sama panjang.

Bangun layang-layang memunyai sifat-sifat sebagai berikut.

a. Dua pasang sisinya sama panjang, yaitu $\overline{AB} = \overline{AD}$ dan $\overline{BC} = \overline{CD}$
b. Memiliki satu pasang sudut yang sama besar, yaitu $\angle ABC = \angle ADC$.
c. Diagonal-diagonalnya saling berpotongan dan tegak lurus.
d. Memiliki satu buah sumbu simetri dan satu buah simetri lipat.
e. Tidak memiliki tingkat simetri putar.

Bangun layang-layang mempunyai dua pasang sisi yang sama panjang. Salah satu diagonal membagi sudut menjadi dua bagian yang sama dan tegak lurus dengan diagonal yang lain.

Rumus keliling dan luas layang-layang adalah:

$$\text{Keliling} = 2\,(a + b)$$
$$\text{Luas} = \frac{1}{2} \times p \times q$$

$q = BD$
$p = AC$

7. Trapesium

Trapesium adalah bangun segi empat yang memunyai tepat dua buah sisi sejajar.

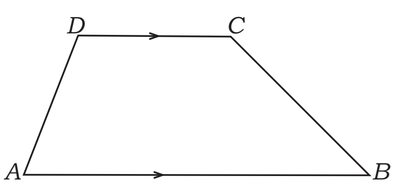
Sifat-sifat pada bangun trapesium sebagai berikut.

a. Memiliki satu pasang sisi sejajar.
b. Sisi-sisi yang tidak sejajar disebut kaki trapesium.
c. Sisi sejajar yang terpanjang dari trapesium disebut alas.

Secara umum trapesium terdiri atas tiga macam, yaitu:

a. Trapesium Sebarang

Trapesium sebarang adalah bangun segi empat yang sepasang sisinya sejajar dan kedua kakinya tidak sama panjang, serta sudut-sudutnya tidak ada yang siku-siku.

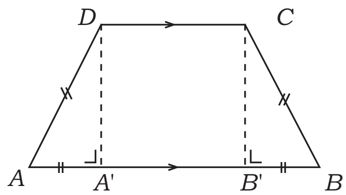


Sifat-sifatnya antara lain $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$ dan $\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$ yang disebut kaki trapesium.

$\overline{AB}$ (sisi terpanjang) dari trapesium disebut alas.

b. Trapesium Sama Kaki

Trapesium sama kaki adalah bangun segi empat yang sepasang sisinya sejajar dan kedua kakinya sama panjang, serta sudut-sudutnya tidak ada yang siku-siku.



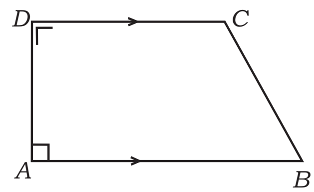
Sifat-sifatnya antara lain:

1) $\overline{AD} = \overline{BC}$
2) $\overline{AA'} = \overline{BB}$
3) $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$
4) atau $\angle A = \angle B$
5) $\angle DAB = \angle CBA$

Trapesium sama kaki memunyai 1 simetri lipat. Sumbu simetri trapesium ini adalah garis vertikal yang memotong tengah-tengah trapesium.

c. Trapesium Siku-Siku

Trapesium siku-siku adalah bangun segi empat yang sepasang sisinya sejajar dan salah satu sudutnya siku-siku.



Sifatnya antara lain:

1) $\overline{AB} \,//\, \overline{DC}$
2) $\angle DAB = \angle ADC = 90°$

Rumus keliling dan luas trapesium adalah:

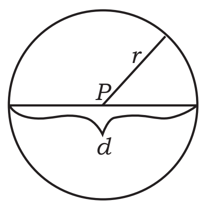
$$\text{Keliling} = 2 \times (AB + CD) + t$$

$$\text{Luas} = \frac{1}{2} \times (AB + CD) \times t$$

8. Lingkaran

Lingkaran adalah sebuah kurva tertutup yang memunyai banyak keistimewaan. Jarak titik-titik pada lingkaran terhadap pusat lingkaran besarnya sama dan disebut jari-jari (radius), dinotasikan r, sedangkan jarak kedua titik pada lingkaran yang melalui titik pusat disebut diameter dan dinotasikan d.

a. Sifat dan Rumus Lingkaran



P = pusat lingkaran
r = jari-jari lingkaran
d = diameter lingkaran

Sifat-sifat bangun datar lingkaran sebagai berikut.

1) Lingkaran hanya memiliki satu sisi.
2) Memiliki simetri lipat dan simetri putar yang banyaknya tak hingga.
3) Sudut pada satu lingkaran penuh sebesar 360°.

Rumus keliling dan luas lingkaran adalah:

$$\text{Keliling} = 2 \times \pi \times r = \pi \times d$$

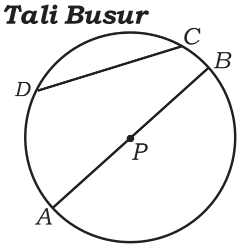
$$\text{Luas} = \pi \times r^2 = \frac{1}{4} \times \pi \times d^2$$

dengan $\pi \approx 3{,}14$ atau $\pi \approx \frac{22}{7}$

b. Unsur-Unsur dalam Lingkaran

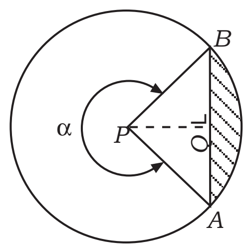
Bangun datar lingkaran memunyai keistimewaan dibanding bangun datar yang lain. Keistimewaan tersebut sebagai berikut.

1) Tali Busur



Perhatikan gambar di samping. Garis yang menghubungkan dua titik pada lingkaran disebut **tali busur**. Tali busur yang melewati titik pusat lingkaran (titik P) disebut garis tengah atau diameter. Tali busur yang tidak melalui titik pusat panjangnya selalu lebih kecil dari diameter.

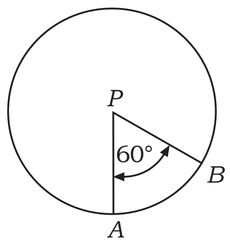
2) ***Tembereng***



Perhatikan gambar di samping.
P adalah pusat lingkaran.

a) Garis lengkung AB dengan sudut pusat $\angle$ merupakan busur kecil.
b) Garis lengkung AB dengan sudut pusat α (sudut refleks) merupakan busur besar.
c) Daerah yang dibatasi oleh jari-jari dan busur kecil disebut juring kecil.
d) Daerah yang dibatasi oleh jari-jari dan busur besar disebut juring besar.
e) Daerah yang dibatasi oleh garis lengkung sepanjang tali busur disebut tembereng (daerah berarsir).
f) Garis yang ditarik dari titik P dan tegak lurus tali busur disebut apotema (PQ).

Contoh:
Perhatikan lingkaran di bawah.



Apabila jari-jari lingkaran 14 cm, tentukan ukuran dari unsur-unsur lingkaran berikut!

a. $\cap AB$
b. Luas juring APB

Penyelesaian:

a. Diketahui jari-jari lingkaran 14 cm, diperoleh diameternya 28 cm.

Keliling lingkaran = $\pi \times d = \frac{22}{7} \times 28 = 88$

Jadi, keliling lingkaran 88 cm.
Untuk menghitung panjang busur AB digunakan perbandingan juring APB dengan satu lingkaran penuh yang memunyai sudut 360°.

$$\frac{\angle APB}{\angle \text{Lingkaran}} = \frac{\cap AB}{\text{Keliling lingkaran}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{\cap AB}{88}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} = \frac{\cap AB}{88}$$

$$\Leftrightarrow \cap \text{AB} = 14,67$$

Jadi, panjang busur AB adalah 14,67 cm.

b. Luas lingkaran $= \pi \times r \times r$

$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14$

$= 616$

Jadi, luas lingkaran adalah 616 cm^2.

Ekuivalen dengan pengerjaan soal pada poin a maka luas juring APB akan dibandingkan dengan luas satu lingkaran penuh.

$$\frac{\angle APB}{\angle \text{Lingkaran}} = \frac{\text{Luas juring } APB}{\text{Luas lingkaran}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{\text{Luas juring } APB}{616}$$

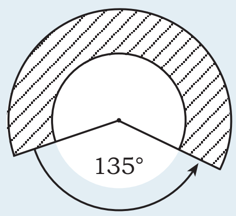
$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} = \frac{\text{Luas juring } APB}{616}$$

$$\Leftrightarrow \text{Luas juring } APB = \frac{616}{6}$$

$$\Leftrightarrow \text{Luas juring } APB = 102{,}67$$

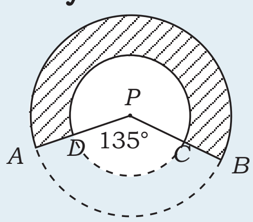
Jadi, panjang juring *APB* adalah 102,67 cm.

Aplikasi



Sebuah tutup pengaman gerinda diberikan seperti pada gambar yang diarsir. Diketahui jari-jari lingkaran kecil (r_1) adalah 7 cm dan jari-jari lingkaran besar (r_2) adalah 10,5 cm. Tentukan luas tutup pengaman gerinda tersebut.

Penyelesaian:



Luas tutup pengaman gerinda merupakan luas daerah yang diarsir. Cara menghitung luasnya sebagai berikut.

L_{arsir} = luas lingkaran besar – luas lingkaran kecil – luas daerah *ABCD*
= luas lingkaran besar – luas lingkaran kecil – (luas juring *ABP* – luas juring *DPC*)

Tiap-tiap unsur dihitung terlebih dahulu.

Luas lingkaran besar $= \pi \times r_2 \times r_2$

$$= \frac{22}{7} \times 10{,}5 \times 10{,}5$$

$$= 346{,}5$$

Jadi, luas lingkaran besar adalah 346,5 cm^2.

Luas lingkaran kecil $= \pi \times r_1 \times r_1$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7$$

$$= 154$$

Jadi, luas lingkaran kecil 154 cm^2.

Selanjutnya dihitung luas daerah *ABCD*. Terlebih dahulu dihitung luas juring *APB*.

$$\frac{\angle APB}{\angle \text{lingkaran}} = \frac{\text{luas juring } APB}{\text{luas lingkaran besar}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{135^\circ}{360^\circ} = \frac{\text{luas juring } APB}{346{,}5}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{8} = \frac{\text{luas juring } APB}{346{,}5}$$

$$\Leftrightarrow \text{ Luas juring } APB = \frac{346{,}5 \times 3}{8} = 129{,}94$$

Jadi, luas juring APB adalah 129,94 cm^2.

Selanjutnya dihitung luas juring DPC sebagai berikut.

$$\frac{\angle DPC}{\angle \text{lingkaran}} = \frac{\text{luas juring } DPC}{\text{luas lingkaran kecil}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{135^\circ}{360^\circ} = \frac{\text{luas juring } DPC}{154}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{8} = \frac{\text{luas juring } DPC}{154}$$

$$\Leftrightarrow \text{ Luas juring } DPC = \frac{154 \times 3}{8}$$

$$\Leftrightarrow \text{ Luas juring } DPC = 57{,}75$$

Jadi, luas juring DPC adalah 57,75 cm^2.

Dengan demikian dapat dihitung luas daerah yang diarsir.

$$\begin{aligned} L_{arsir} &= \text{Luas lingkaran besar} - \text{luas lingkaran kecil} - (\text{luas juring } APB - \text{luas juring } DPC) \\ &= 346{,}5 - 154 - (129{,}94 - 57{,}\ 75) \\ &= 346{,}5 - 154 - 72{,}19 \\ &= 346{,}5 - 154 - 72{,}19 \\ &= 120{,}31 \end{aligned}$$

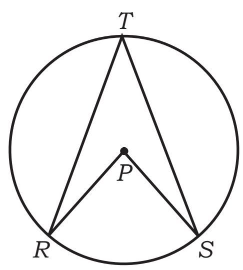
Jadi, luas tutup pengaman gerinda tersebut adalah 120,31 cm^2.

3) *Sudut-Sudut dalam Lingkaran*

Sudut yang dibentuk oleh dua buah jari-jari dengan titik sudut berupa titik di pusat lingkaran disebut **sudut pusat**.

Sudut yang dibentuk oleh dua buah tali busur dengan titik sudut yang terletak pada lingkaran disebut **sudut keliling**.

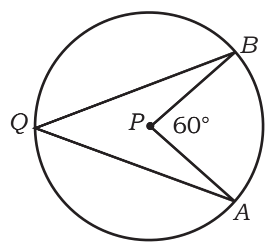
Pada lingkaran di samping yang disebut sudut pusat adalah $\angle RPS$ dan sudut keliling adalah $\angle RTS$. Hubungan antarsudut pusat dan sudut keliling sebagai berikut.



Sudut pusat = 2 × sudut keliling

Contoh:

Pada gambar di samping diketahui $\angle APB = 60^\circ$. Tentukan besar sudut AQB!

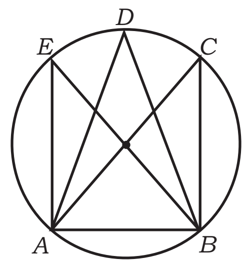


Penyelesaian:

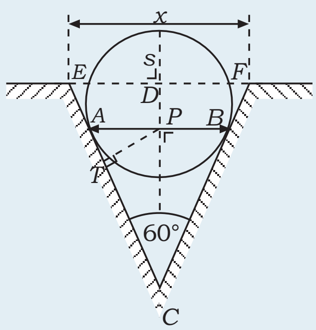
$$\begin{aligned} \angle APB &= 2 \times \angle AQB \\ \Leftrightarrow \quad 60^\circ &= 2 \times \angle AQB \\ \Leftrightarrow \angle AQB &= 60 : 2 \\ \Leftrightarrow \angle AQB &= 30 \end{aligned}$$

Jadi, besar sudut AQB adalah 30°.

Catatan:
Perhatikan gambar di samping!
Sudut-sudut yang menghadap tali busur yang sama memunyai besar sudut yang sama pula.
Pada gambar di samping diperoleh $\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB$. Kesamaan diperoleh karena ketiga sudut menghadap tali busur yang sama yaitu tali busur AB.



Aplikasi



Diketahui panjang AD = 10 cm dan panjang s = 3 cm. Tentukan lebar penampang x!

Penyelesaian:

Diketahui $\angle ACB = 60°$, diperoleh $\angle ACP = 30°$
ΔCPT merupakan segitiga siku-siku di titik T. Dengan menggunakan rumus perbandingan trigonometri maka panjang CP dapat dicari sebagai berikut.

$$\sin 30° = \frac{TP}{CP}$$

$$\Leftrightarrow \quad CP = \frac{TP}{\sin 30} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20$$

Panjang CP dapat digunakan untuk mencari CD yaitu:

$$\begin{aligned} CD &= CD + (AP - S) \\ &= 20 + (20 - 3) \\ &= 20 + 17 \\ &= 37 \end{aligned}$$

Perhatikan ΔCDE Dengan menggunakan panjang AC dan rumus perbandingan trigonometri, panjang ED dapat dicari sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \tan 30° &= \frac{ED}{CD} \\ ED &= \text{CD} \times \tan 30° \\ &= 37\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \\ &= 21{,}36 \end{aligned}$$

Panjang ED dapat digunakan untuk mencari panjang x yaitu:

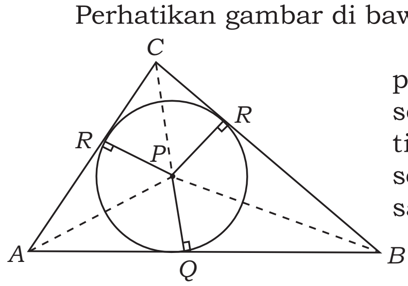
$$\begin{aligned} x &= 2ED \\ &= 2\,(21{,}36) \\ &= 42{,}72 \end{aligned}$$

Jadi, panjang x adalah 42,72 cm.

c. Bangun Lingkaran Terkait dengan Segitiga

1) *Lingkaran dalam Segitiga*

Perhatikan gambar di bawah.



Sebuah lingkaran dengan titik pusat P berada di dalam bangun datar segitiga ABC. Besar $\angle CAB$ dan $\angle CBA$ tiap-tiap dibagi oleh sebuah garis sehingga menjadi dua buah sudut yang sama besar.

Akan diperoleh tiga buah garis yang berpotongan di titik P. Selanjutnya, dari titik P ditarik garis yang tegak lurus dengan ketiga sisi pada ΔABC, masing-masing di titik Q, R, dan S. Dengan demikian diperoleh persamaan berikut.

$$PQ = PR = PS = r$$

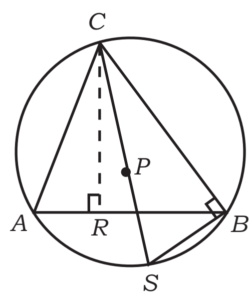
Perhatikan bahwa ΔABC tersusun atas tiga buah segitiga yaitu ΔAPB, ΔBPC, dan ΔAPC. Luas segitiga dapat kita tentukan rumusnya dengan cara sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\text{Luas } \Delta APB &= \tfrac{1}{2} \times AB \times PQ = \tfrac{1}{2} \times AB \times r \\
\text{Luas } \Delta BPC &= \tfrac{1}{2} \times BC \times PR = \tfrac{1}{2} \times BC \times r \\
\text{Luas } \Delta APC &= \tfrac{1}{2} \times AC \times PS = \tfrac{1}{2} \times AC \times r \quad + \\
\hline
\text{Luas } \Delta ABC &= \left(\tfrac{1}{2} \times AB \times r\right) + \left(\tfrac{1}{2} \times BC \times r\right) + \left(\tfrac{1}{2} \times AC \times r\right) \\
&= \tfrac{1}{2} r\ (AB + BC + AC)
\end{aligned}$$

Dengan demikian panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga dirumuskan dengan:

$$r = \frac{\text{Luas } \Delta ABC}{\frac{1}{2}(AB + BC + AC)} = \frac{2 \text{ Luas } \Delta ABC}{(AB + BC + AC)}$$

2) *Lingkaran Luar Segitiga*



Perhatikan gambar di samping! Garis CR adalah garis tinggi segitiga ABC. Dari titik C ditarik garis lurus yang melalui titik pusat lingkaran yang membentuk garis CS. Perhatikan bahwa ΔCBS merupakan segitiga siku-siku di B. Diperoleh hubungan sebagai berikut.

- $\angle CAB = \angle CSB$ (menghadap tali busur yang sama)
- $\angle CRA = \angle CBS = 90°$

Karena dua buah segitiga tersebut memiliki dua unsur yang sama maka ΔABC sebangun dengan ΔCBS.

Dengan demikian diperoleh hubungan sebagai berikut.

$AC : CS = CR : CB$

$$\Leftrightarrow \quad CR = \frac{AC \times CB}{CS} \text{ dan } CS = \frac{AC \times CB}{CR} \qquad \ldots. (*)$$

Karena luas $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times CR \times AB$, diperoleh:

$$CR = \frac{\text{Luas } \Delta ABC}{\frac{1}{2} AB}$$

Nilai CR disubstitusikan ke (*) diperoleh:

$$CS = \frac{AC \times CB \times AB}{2 \text{ luas } \Delta ABC}$$

Karena CS = diameter lingkaran = $2r$ maka:

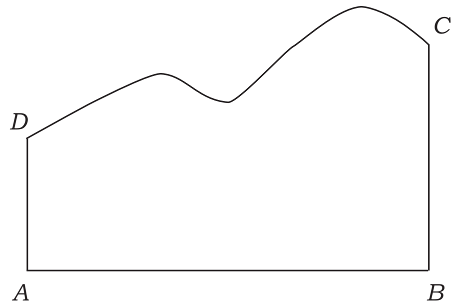
$$\begin{aligned}
2r &= CS \\
\Leftrightarrow \quad 2r &= \frac{AB \times BC \times CA}{2 \times \text{luas } \Delta ABC} \\
\Leftrightarrow \quad 4r &= \frac{AB \times BC \times CA}{\text{luas } \Delta ABC}
\end{aligned}$$

$$r = \frac{AB \times BC \times CA}{4 \text{ luas } \Delta ABC}$$

B. Taksiran Luas Daerah Bidang Tak Beraturan

Di dalam kehidupan sehari-hari, jenis permukaan benda yang kita temui tidak semuanya beraturan. Akan tetapi, ada kalanya bentuk permukaan benda berupa bidang datar yang tak beraturan. Apabila hendak dihitung luasnya tentu akan mengalami kesulitan apabila menggunakan rumus luas bangun datar yang telah diberikan. Berikut diberikan beberapa metode untuk menghitung luas permukaan benda yang tidak beraturan.

1. Aturan Trapesoida



Diberikan bangun datar tak beraturan *ABCD* seperti pada gambar di samping. Akan kita tentukan cara menghitung luasnya.

Langkah-langkah menghitung luas bangun tak beraturan dengan metode trapesoida.

Langkah 1:

Sisi *AB* dibagi menjadi n partisi (bagian) yang sama panjang. Misalnya *AB* dibagi menjadi empat partisi yang sama panjang yaitu t cm. Selanjutnya, tentukan tinggi tiap-tiap partisi (ordinat) yaitu *AD*, *EJ*, *FI*, *GH*, dan *BC*. Kemudian nyatakan tiap-tiap ordinat dengan $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$

Langkah 2:

$$L = L_{AEJD} + L_{EFIJ} + L_{FGHI} + L_{GBCH}$$

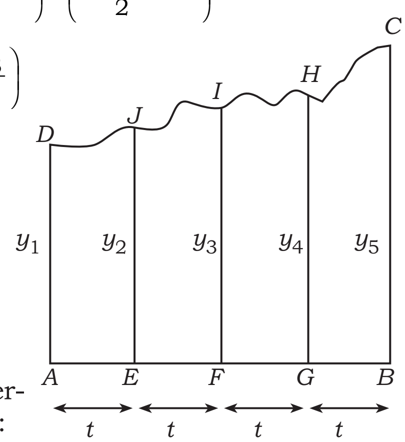
$$= \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \times t\right) + \left(\frac{y_2 + y_3}{2} \times t\right) + \left(\frac{y_3 + y_4}{2} \times t\right) + \left(\frac{y_4 + y_5}{2} \times t\right)$$

$$= t\left(\frac{y_1 + y_2 + y_2 + y_3 + y_3 + y_4 + y_4 + y_5}{2}\right)$$

$$= t\left(\frac{y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5}{2}\right)$$

$$= t\left(\frac{y_1 + y_5}{2} + \frac{2y_2}{2} + \frac{2y_3}{2} + \frac{2y_4}{2}\right)$$

$$= t\left(\frac{y_1 + y_5}{2} + y_2 + y_3 + y_4\right)$$

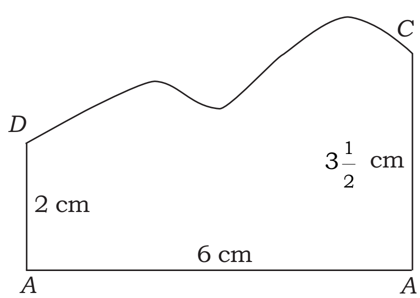


Jadi, rumus mencari luas bangun tak beraturan dengan aturan trapesoida adalah:

$$L = \left(\frac{y_1 + y_5}{2} + y_2 + y_3 + y_4\right)$$ apabila partisi sebanyak 4.

Contoh:

Tentukan luas bangun tak beraturan di samping dengan menggunakan aturan trapesoida!



Penyelesaian:

Luas bangun tak beraturan *ABCD* akan kita hitung luasnya dengan cara sebagai berikut.

Langkah 1:

Bangun *ABCD* kita bagi menjadi enam buah partisi yang tiap-tiap panjangnya 1 cm. Tinggi tiap-tiap partisi yaitu:

$y_1 = AD = 2$ cm

$y_2 = EN = 2\frac{1}{2}$ cm

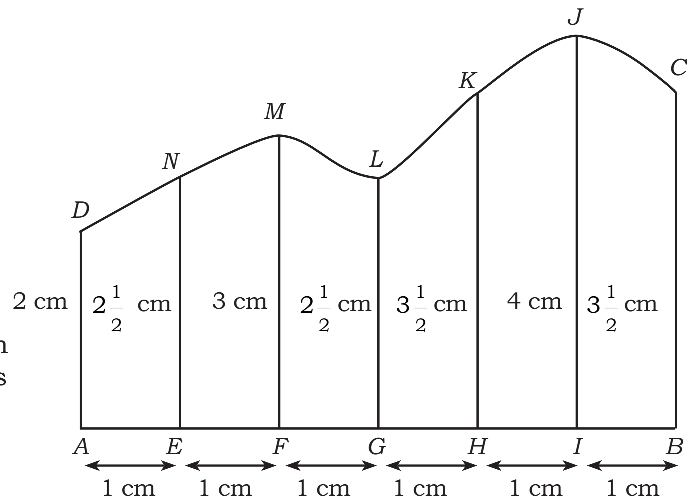
$y_3 = FM = 3$ cm

$y_4 = GL = 2\frac{1}{2}$ cm

$y_5 = HK = 3\frac{1}{2}$ cm

$y_6 = IJ = 4$ cm

$y_7 = BC = 3\frac{1}{2}$ cm



Langkah 2

Dengan demikian dapat dihitung luas bangun *ABCD*.

$$L = t\left(\frac{y_1 + y_7}{2} + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6\right)$$

$$= 1\left(\frac{2 + 3\frac{1}{2}}{2} + 2\frac{1}{2} + 3 + 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} + 4\right)$$

$$= 2\frac{3}{4} + 15\frac{1}{2}$$

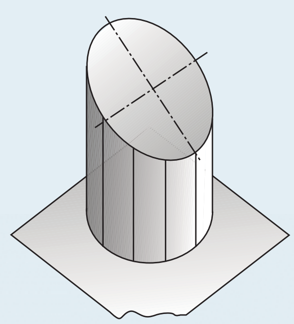
$$= 18\frac{1}{4}$$

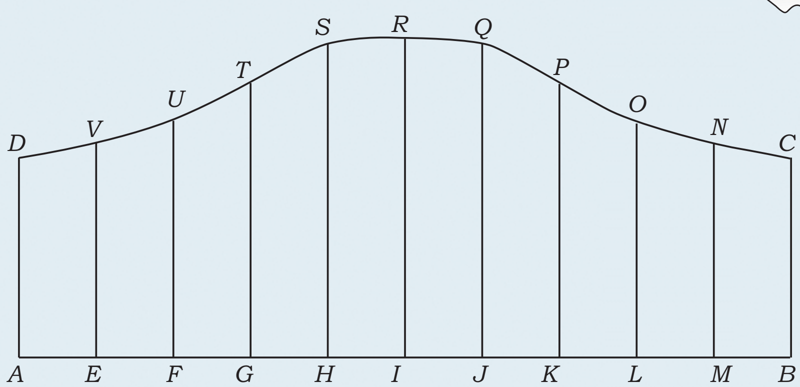
Jadi, luas bangun tak beraturan *ABCD* ialah $18\frac{1}{4}$ cm^2.

Aplikasi

Pada cerobong pembuangan asap mesin pengering padi apabila hanya diambil penampang silinder tanpa tutup dan alas yang terpotong bagian bawah maka diperoleh gambar seperti di samping. Selanjutnya, apabila silinder terpotong tersebut dibuka dan dibentangkan pada bidang datar, akan tampak penampang baru seperti yang digambarkan pada gambar di bawah ini.

Tentukan luas bentangan silinder yang terpotong!





Penyelesaian:

Langkah 1:

Penampang potongan silinder dibagi menjadi 10 partisi dengan $AE = EF = \ldots = MB = t = 2$ cm. Selanjutnya, tinggi tiap-tiap partisi dihitung sebagai berikut.

$y_1 = AD = 2{,}5$ cm
$y_2 = EV = 2{,}6$ cm
$y_3 = FU = 3$ cm
$y_4 = GT = 3{,}5$ cm
$y_5 = HS = 4$ cm
$y_6 = IR = 4{,}1$ cm
$y_7 = JQ = 4$ cm
$y_8 = KP = 3{,}5$ cm
$y_9 = LO = 3$ cm
$y_{10} = MN = 2{,}6$ cm
$y_{11} = BC = 2{,}5$ cm

Langkah 2:

$$\begin{aligned} L &= t\left(\frac{y_1 + y_{11}}{2} + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10}\right) \\ &= 2\left(\frac{2{,}5+2{,}5}{2} + 2{,}6 + 3 + 3{,}5 + 4 + 4{,}1 + 4 + 3{,}5 + 3 + 2{,}6\right) \\ &= 2(2{,}5 + 30{,}3) \\ &= 2\,(32{,}8) \\ &= 65{,}6 \end{aligned}$$

Jadi, luas penampang tabung tanpa tutup dan alas yang terpotong adalah $65{,}6$ cm^2.

2. Aturan Simpson

Menghitung luas daerah tak beraturan dengan menggunakan aturan Simpson diberikan dengan cara sebagai berikut.

Langkah-langkah menghitung luas bangun tak beraturan dengan menggunakan metode Simpson.

Langkah 1:

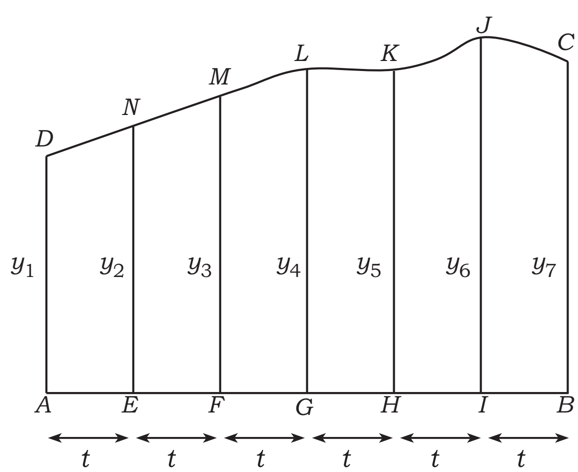
Bangun tak beraturan *ABCD* dibagi menjadi *n* buah partisi sama panjang dengan ketentuan bahwa *n* harus bilangan genap. Selanjutnya, ditentukan panjang tiap-tiap partisi.

Langkah 2:

Rumus mencari luas bangun tak beraturan sebagai berikut.

$$L = \frac{t}{3}\left[y_1 + y_{n+1}\right] + 4E + 2R$$

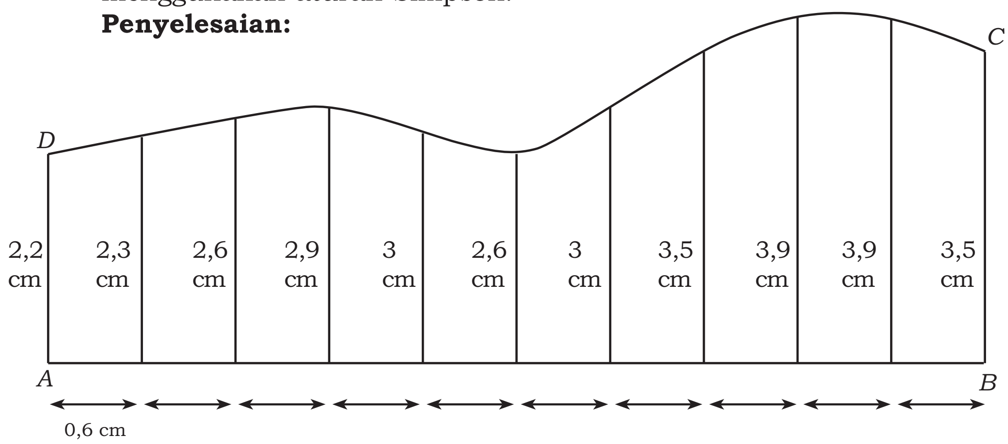
y_1 = ordinat pertama
y_{1+n} = ordinat terakhir
E = jumlah ordinat bernomor genap
R = jumlah ordinat bernomor ganjil



Contoh:

Tentukan luas bangun ABCD pada contoh aturan Trapesoida dengan menggunakan aturan Simpson!

Penyelesaian:



Bangun *ABCD* dibagi menajdi 10 partisi (n = 10, n bilangan genap) dengan panjang tiap-tiap partisi (t) adalah 0,6 cm. Panjang tiap-tiap ordinat diberikan sebagai berikut.

y_1 = 2,2 cm	y_5 = 3 cm	y_9 = 3,9 cm
y_2 = 2,3 cm	y_6 = 2,6 cm	y_{10} = 3,9 cm
y_3 = 2,6 cm	y_7 = 3 cm	y_{11} = 3,5 cm
y_4 = 2,9 cm	y_8 = 3,5 cm	

Luas bidang *ABCD* dihitung dengan menggunakan aturan Simpson yaitu:

$$L = \frac{t}{3}\left[(y_1 + y_{11}) + 4E + 2R\right]$$

$$= \frac{t}{3}\left[(y_1 + y_{11}) + 4(y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10}) + 2(y_3 + y_5 + y_7 + y_9)\right]$$

$$= \frac{0,6}{3}\left[(2,2 + 3,5) + 4(2,3 + 2,9 + 2,6 + 3,5 + 3,9)) + 2(2,6 + 3 + 3 + 3,9)\right]$$

$$= 2\left(\frac{2,5 + 2,5}{2} + 2,6 + 3 + 3,5 + 4 + 4,1 + 4 + 3,5 + 3 + 2,6\right)$$

= 0,2 (5,7 + 60,8 + 25)

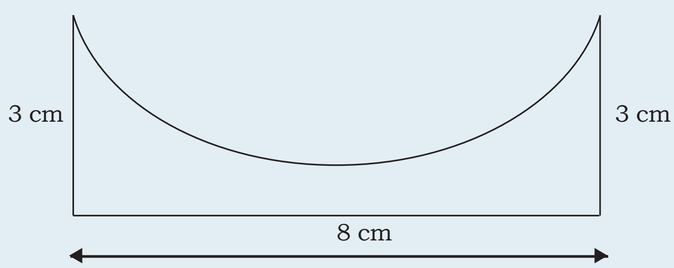
= 0,2 (91)

= 18,3

Jadi, luas bangun tak beraturan ABCD ialah 18,3 cm^2.

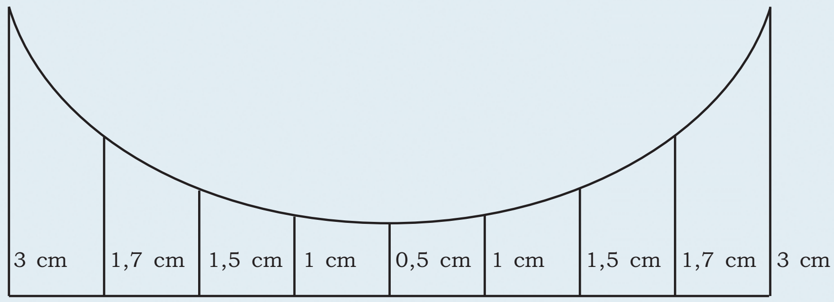
Aplikasi

Sebuah perangkat peralatan pertanian memunyai bentuk sambungan berupa silinder terpotong miring. Apabila silinder tersebut dibentangkan, akan tampak sebuah penampang seperti pada gambar di bawah. Tentukan luas penampang tersebut!



Penyelesaian:

Penampang sambungan dapat digambarkan sebagai berikut.



Dari gambar diperoleh bahwa penampang *ABCD* dibagi menjadi delapan partisi (n = 8, n bilangan genap) dan panjang t = 1 cm dengan panjang tiap-tiap ordinat adalah:

y_1 = 3 cm	y_4 = 1 cm	y_7 = 1,5 cm
y_2 = 1,7cm	y_5 = 0,5 cm	y_8 = 1,7 cm
y_3 = 1,5 cm	y_6 = 1 cm	y_9 = 3 cm

Dengan demikian dapat dihitung nilai L sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\text{L} &= \frac{t}{3}\left[(y_1 + y_9) + 4E + 2R\right] \\
&= \frac{t}{3}\left[(y_1 + y_9) + 4(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 2(y_3 + y_5 + y_7)\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[(3+3) + 4(1{,}7+1+1+1{,}7) + 2(1{,}5+0{,}5+1{,}5)\right] \\
&= \frac{1}{3}(6 + 21{,}6 + 7) \\
&= \frac{1}{3}(34{,}6) \\
&= 11{,}53
\end{aligned}$$

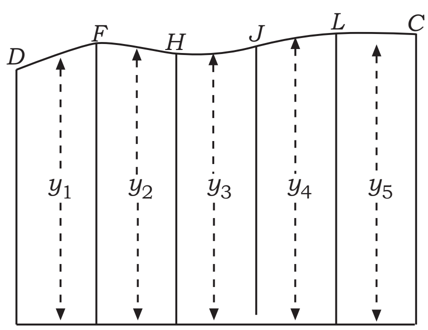
Jadi, luas penampang silinder terpotong tersebut adalah 11,53 cm^2.

3. Aturan Mid-Ordinat

Cara menghitung luas bidang tak beraturan dengan menggunakan aturan mid-ordinat sebagai berikut.

Langkah 1:

Bidang ABCD dibagi menjadi n buah partisi yang sama panjang yaitu t. Selanjutnya, panjang tiap-tiap ordinat dihitung dengan cara sebagai berikut.



$$y_1 = \frac{AD + EF}{2} \qquad y_3 = \frac{GH + IJ}{2}$$

$$y_5 = \frac{KL + BC}{2} \qquad y_2 = \frac{EF + GH}{2}$$

$$y_4 = \frac{IJ + KL}{2}$$

dan seterusnya.

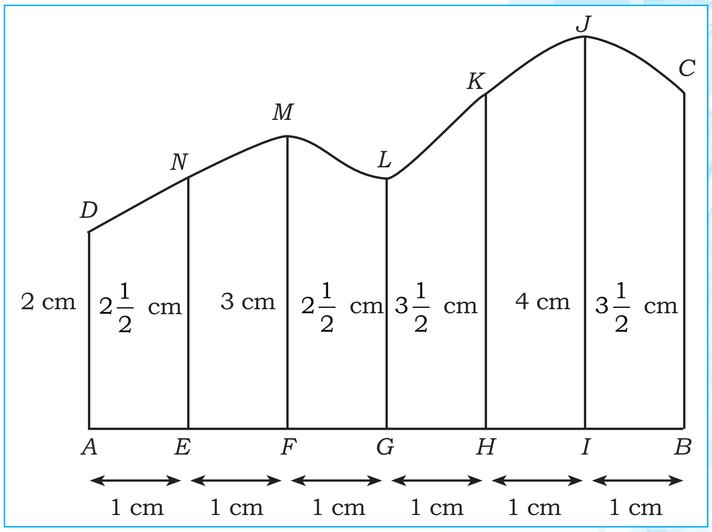
Langkah 2:

Luas bidang tak beraturan *ABCD* dicari dengan menggunakan rumus sebagai berikut.

$$L = t\left(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n+1}\right)$$

Contoh:

Tentukan luas bidang *ABCD* pada contoh aturan trapesoida dengan menggunakan aturan mid-ordinat!



Penyelesaian:

Langkah 1:

Bangun *ABCD* telah dibagi menjadi 6 partisi dengan panjang tiap-tiap partisi 1 cm (t = 1 cm). Selanjutnya panjang tiap-tiap ordinat dihitung dengan cara sebagai berikut.

$$y_1 = \frac{AD + EN}{2} = \frac{2 + 2,5}{2} = \frac{4,5}{2} = 2,25$$

$$y_2 = \frac{EN + FM}{2} = \frac{2,5 + 3}{2} = \frac{5,5}{2} = 2,75$$

$$y_3 = \frac{EN + FM}{2} = \frac{2,5 + 3}{2} = \frac{5,5}{2} = 2,75$$

$$y_4 = \frac{GL + HK}{2} = \frac{2,5 + 3,5}{2} = \frac{5,5}{2} = 2,75$$

$$y_5 = \frac{HK + IJ}{2} = \frac{3,5 + 4}{2} = \frac{7,5}{2} = 3,75$$

$$y_6 = \frac{IJ + BC}{2} = \frac{4 + 3,5}{2} = \frac{7,5}{2} = 3,75$$

Langkah 2:

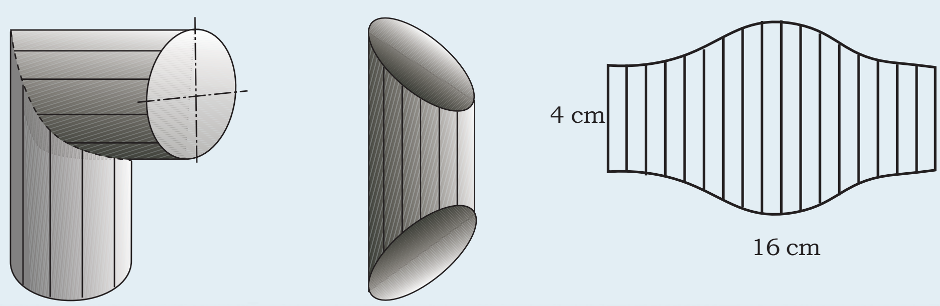
Luas bidang *ABCD* apabila dihitung dengan aturan mid-ordinat sebagai berikut.

L = 1 (2,25 + 2,75 + 2,75 + 3 + 3,375 + 3,75)
  = 18,25

Jadi, luas bangun *ABCD* adalah 18,25.

Aplikasi

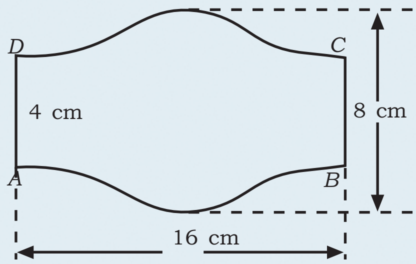
Sebuah pipa sambungan pada saluran AC tampak pada gambar (a). Apabila sambungan tersebut dipisahkan diperoleh salah satu bentuk silinder lingkaran lurus seperti pada gambar (b). Apabila silinder tersebut dipotong secara miring dan kemudian dibentangkan diperoleh penampang berbentuk melintang sebagai berikut.

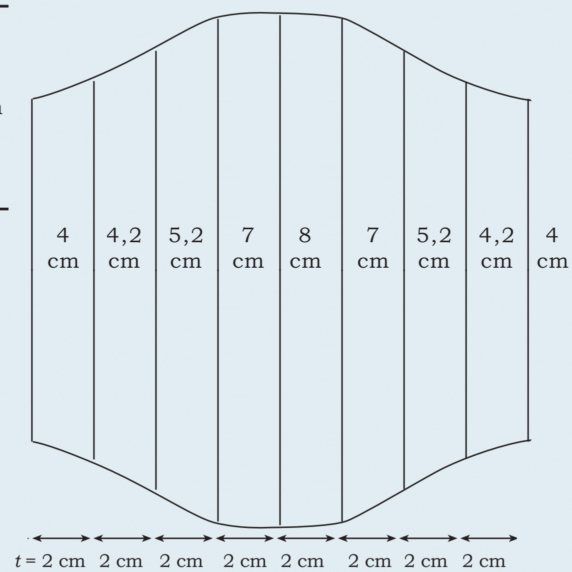


(a) (b) (c)

Tentukan luas penampang melintang dari silinder yang dipotong secara miring tersebut!

Penyelesaian:





Dari gambar di atas dapat kita tentukan panjang tiap-tiap ordinatnya sebagai berikut.

$y_1 = \frac{4+2,2}{2} = \frac{8,2}{2} = 4,1$

$y_2 = \frac{4,2+5,2}{2} = \frac{9,4}{2} = 4,7$

$y_3 = \frac{5,2+7}{2} = \frac{12,2}{2} = 6,1$

$y_4 = \frac{7+8}{2} = \frac{15}{2} = 7,5$

$y_5 = \frac{8+7}{2} = \frac{15}{2} = 7,5$

$y_6 = \frac{7+5,2}{2} = \frac{12,2}{2} = 6,1$

$y_7 = \frac{5,2+4,2}{2} = \frac{9,4}{2} = 4,7$

$y_8 = \frac{4,2+4}{2} = \frac{8,2}{2} = 4,1$

Luas bangun *ABCD* dapat kita tentukan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} L &= t\,(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8) \\ &= 2(4,1 + 4,7 + 6,1 + 7,5 + 7,5 + 6,1 + 4,7 + 4,1) \\ &= 2(418) \\ &= 89,6 \end{aligned}$$

Jadi, luas bangun *ABCD* adalah 89,6 cm^2.

Kegiatan Belajar 3

Transformasi Bangun Datar

Geometri transformasi adalah teori yang menunjukkan bagaimana bangun-bangun berubah kedudukan dan ukurannya menurut aturan tertentu. Contoh transformasi matematis yang paling umum yaitu translasi (pergeseran), refleksi (pencerminan), rotasi (pemutaran), dan dilatasi (memperbesar atau memperkecil). Sebuah bangun dapat direfleksikan terhadap sebuah garis. Bangun dirotasikan dengan diputar pada suatu titik yang berada di luar atau di dalamnya. Saat ditranslasi, bangun tersebut bergeser ke arah tertentu, sedangkan bentuknya tidak berubah. Suatu bangun didilatasi dengan cara memperbesar atau memperkecil ukuran bangun tanpa mengubah bentuk benda seperti tampak pada gambar botol infus di samping. Penjelasan mengenai transformasi bangun datar akan kita pelajari pada uraian berikut.

Sumber: *http://www.alibaba.com*

Botol infus

Uraian Materi

A. Transformasi

1. Pengertian Transformasi

Transformasi adalah aturan secara geometris yang dapat menunjukkan bagaimana suatu bangun dapat berubah kedudukan dan ukurannya berdasarkan rumus tertentu. Secara umum transformasi dibedakan menjadi dua yaitu transformasi isometri dan dilatasi. Transformasi isometri adalah transformasi yang tidak mengubah ukuran, misalnya pergesaran, pencerminan, dan pemutaran, sedangkan dilatasi adalah transfomasi yang mengubah ukuran benda.

Transformasi dapat dipandang sebagai pemetaan dari himpunan titik ke himpunan titik. Biasanya titik yang dipetakan adalah (x, y) dengan titik hasil pemetaan atau bayangannya adalah (x', y').

2. Jenis-Jenis Transformasi

Beberapa jenis transformasi yang akan kita pelajari sebagai berikut.

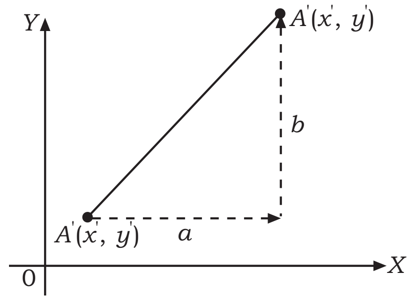
a. Translasi (pergeseran)
b. Refleksi (pencerminan)
c. Rotasi (perputaran)
d. Dilatasi (perkalian)

B. Memahami Jenis-Jenis Transformasi

1. Translasi (pergeseran)

Translasi atau pergeseran adalah suatu transformasi yang memindahkan setiap titik dari suatu posisi ke posisi yang baru sepanjang ruas garis dan arah tertentu. Arah pemindahan translasi yaitu sepanjang ruas garis searah sumbu X dan ruas garis searah sumbu Y.

Translasi $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ memetakan titik A (x, y) ke titik $A'(x', y')$ dengan aturan sebagai berikut.



- titik x digeser sejauh a
- titik y digeser sejauh b

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}$$

Diperoleh $A'(x + a, y + b)$.

Contoh:

1. Titik A (5, 6) ditranslasi oleh $T\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Tentukan titik hasil translasinya!

   Penyelesaian:

   $A' = (5,6) + (2,3)$
   $\quad = A + T_1$
   $\quad = (5 + 2, 6 + 3)$
   $\quad = (7, 9)$

   Hasil translasi adalah $A' = (7, 9)$.

2. Diketahui segitiga ABC dengan titik sudut A (1, 2), B (3, 4), dan C (5, 7). Tentukan koordinat segitiga ABC jika digeser oleh $T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$!

   Penyelesaian:

   $$A' = A + T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   $$B' = B + T = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

   $$C' = C + T = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+1 \\ 7+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

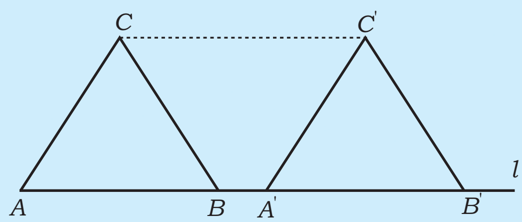
   Jadi, peta segitiga ABC adalah $A'B'C'$ dengan titik sudut A' (2, 4), B' (4, 6), C' (6, 9).

Translasi Suatu Bangun

Translasi juga disebut pergeseran. Untuk menggeser bangun diperlukan jarak dan arah pergeserannya!

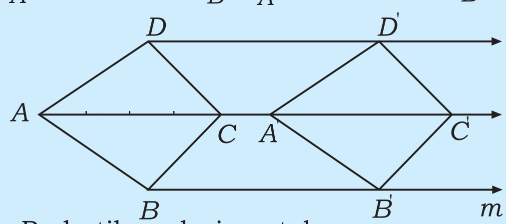
Contoh:

1.



ΔABC digeser menurut garis l sehingga $AA' = 1\frac{1}{2}\ AB$. Dengan demikian, akan diperoleh $\Delta A'B'C'$, sehingga $AA' = BB' = CC'$. Jadi, $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ dan $BC = B'C'$ dan diperoleh bahwa $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

2.



Translasikan segi empat $ABCD$ menurut diagonal AC sehingga $AA' = 1\frac{1}{4}\ AC$.

Perhatikan dari contoh.

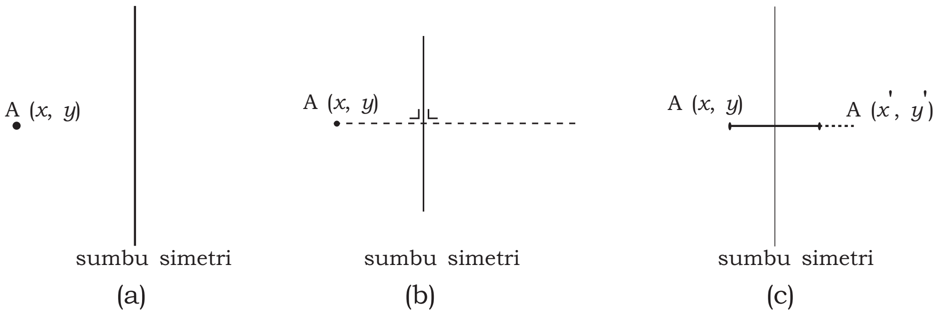
Ukur apakah $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ dan $AC = A'C'$!

Kemudian dengan menggunakan busur apakah $\angle ABC = \angle A'B'C' = \angle A'C'B' = \angle ACB$ dan $\angle BAC = \angle B'A'C'$. Jika semua benar maka segmen garis sebelum dan sesudah digeser sama panjang. Demikian pula sudut sebelum dan sesudah digeser tetap sama besar.

2. Refleksi

Pencerminan adalah cara menggambarkan bayangan cermin suatu bangun. Bayangan cermin diperoleh dengan cara sebagai berikut.

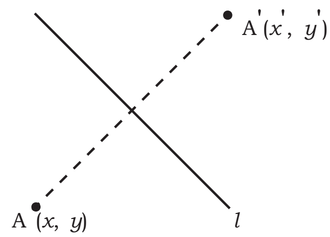
a. Tentukan terlebih dahulu sumbu simetri atau sumbu cerminnya.
b. Dari tiap-tiap titik yang hendak dicerminkan ditarik garis yang tegak lurus dengan sumbu simetri.
c. Perhatikan bahwa jarak titik semula terhadap sumbu simetri harus sama dengan jarak titik bayangan terhadap sumbu simetri.



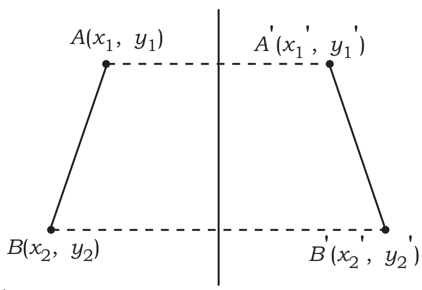
Pencerminan terhadap garis atau sumbu dibedakan menjadi tiga macam yaitu:

1) Bayangan Titik

Titik A (x, y) apabila dicerminkan terhadap suatu garis l atau sumbu l akan menghasilkan bayangan berupa titik A' (x', y').



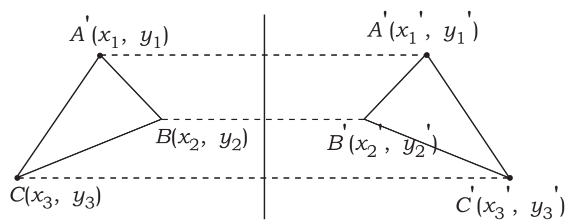
2) Bayangan Garis



Hasil pencerminan ruas garis terhadap garis l atau sumbu l akan menghasilkan bayangan berupa ruas garis.

3) Bayangan Bangun

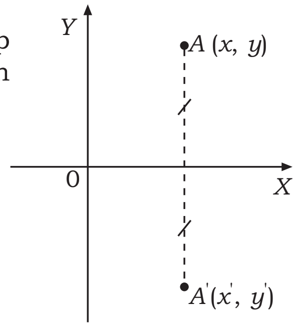
Pencerminan suatu bangun terhadap garis l atau sumbu l dilakukan dengan mencerminkan titik sudut-titik sudutnya terlebih dahulu. Kemudian titik sudut hasil pencerminan dihubungkan menjadi bangun yang merupakan hasil pencerminan.



Sumbu simetri atau sumbu cermin pada refleksi dibedakan menjadi beberapa macam sebagai berikut.

a. Pencerminan terhadap Sumbu *X*

Jika titik A (x, y) dicerminkan terhadap sumbu X dan bayangannya adalah A' (x', y') maka diperoleh persamaan:



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x + 0 \cdot y \\ 0 \cdot x + (-1) \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

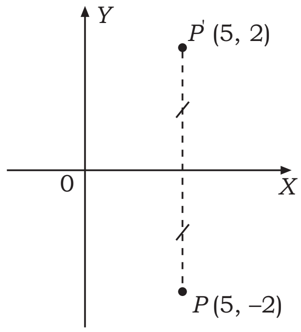
Jadi, matriks $M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ adalah matriks operator pencerminan terhadap sumbu X.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{refleksi terhadap sumbu } x} \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

Contoh:

Tentukan pencerminan titik P $(5, -2)$ terhadap sumbu X!

Penyelesaian:

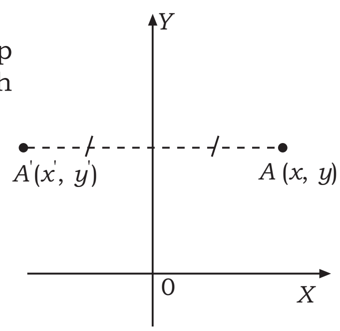


Misalnya hasil pencerminan adalah $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, diperoleh:

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ secara grafik diperoleh seperti pada gambar di samping.

b. Pencerminan terhadap Sumbu *Y*

Jika titik A (x, y) dicerminkan terhadap sumbu Y dan bayangannya adalah A' (x', y') maka diperoleh persamaan:

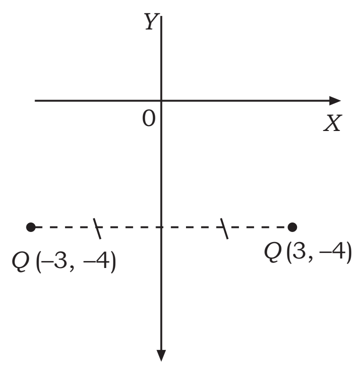


$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1) \cdot x + 0 \cdot y \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Jadi, matriks $M_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ adalah matriks operator pencerminan terhadap sumbu Y.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{refleksi terhadap sumbu } y} \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$



Contoh:

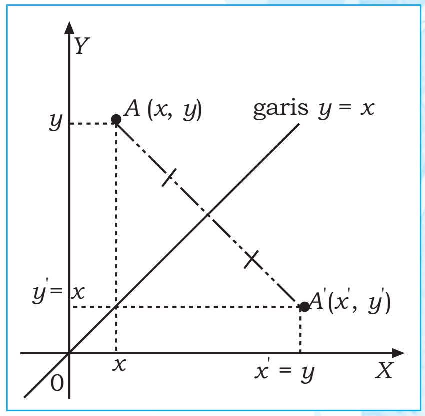
Tentukan pencerminan titik Q $(-3, -4)$ terhadap sumbu Y.

Penyelesaian:

Misalnya hasil pencerminan adalah $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, diperoleh $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ secara grafik diperoleh seperti pada gambar di atas.

c. Pencerminan terhadap Garis $y = x$

Jika titik $A\ (x, y)$ dicerminkan terhadap garis $y = x$ dan bayangannya adalah $A'\ (x', y')$ maka diperoleh persamaan:



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x + 1 \cdot y \\ 1 \cdot x + 0 \cdot y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

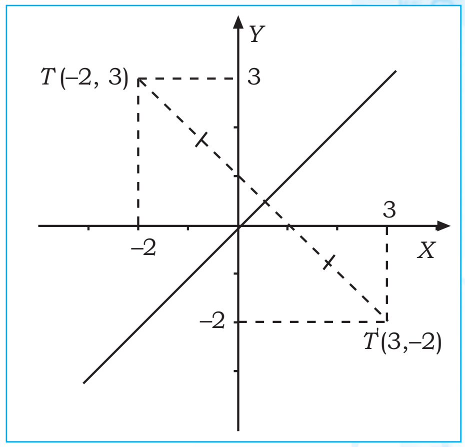
Jadi, matriks $M_y = x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ adalah matriks operator pencerminan terhadap sumbu $Y = x$.

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{sumbu } y = x]{\text{refleksi terhadap}} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}}$$

Contoh:

Tentukan hasil pencerminan titik R (–2, 3) terhadap garis $y = x$!

Penyelesaian:

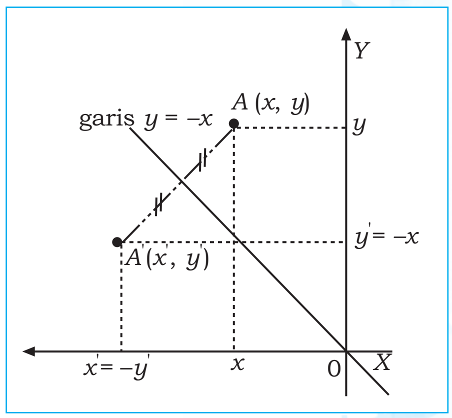


Misalnya hasil pencerminan adalah $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, diperoleh

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ secara grafik diperoleh seperti pada gambar di samping.

d. Pencerminan terhadap Garis $y = -x$

Jika titik $A\ (x, y)$ dicerminkan terhadap garis $y = -x$ dan bayangannya adalah $A'\ (x', y')$ maka diperoleh persamaan:



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x + (-1) \cdot y \\ (-1) \cdot x + 0 \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

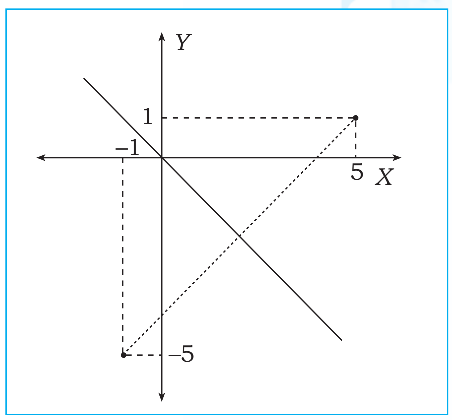
Jadi, matriks $M_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ adalah matriks operator pencerminan terhadap sumbu $y = -x$.

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{sumbu } y = -x]{\text{refleksi terhadap}} \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}}$$

Contoh:

Tentukan hasil pencerminan titik S (5, 1) terhadap garis $y = -x$!

Penyelesaian:

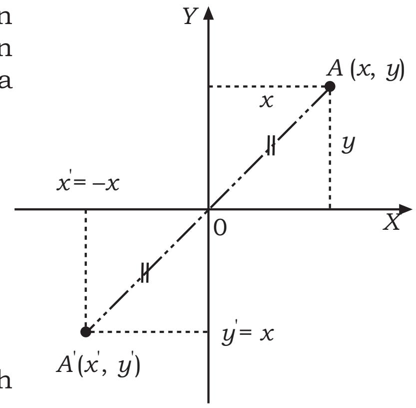


Misalnya hasil pencerminan adalah $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, diperoleh

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ yang secara grafik diperoleh seperti pada gambar di samping.

e. Pencerminan terhadap Titik Asal

Jika titik A (x, y) dicerminkan terhadap titik 0 (0, 0) dan bayangannya adalah A' (x', y') maka diperoleh persamaan:



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot x + \quad 0\cdot y \\ 0\cdot x + (-1)\cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Jadi, matriks $M_O = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ adalah matriks operator pencerminan terhadap titik 0 (0, 0).

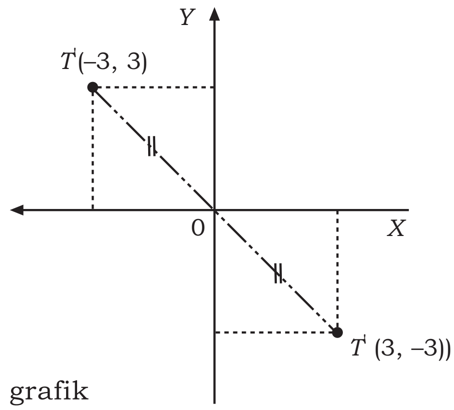
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{sumbu } O = (0,0)]{\text{refleksi terhadap}} \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Contoh:

Tentukan hasil pencerminan titik $T(-3, 3)$ terhadap titik asal!

Penyelesaian:

Misalnya hasil pencerminan adalah $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, diperoleh



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$ secara grafik diperoleh seperti pada gambar di samping:

Contoh:

Diketahui segitiga ABC dengan titik sudut A (1, 2), B (3, 5), dan C (4, 1). Tentukan bayangan segitiga ABC dengan aturan sebagai berikut!

a. pencerminan terhadap sumbu X,
b. pencerminan terhadap sumbu Y, dan
c. pencerminan terhadap titik pusat O (0, 0).

Penyelesaian:

a. Terhadap sumbu X

$$A' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$B' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$C' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b. Terhadap sumbu Y

$$A' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$B' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$C' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c. Terhadap titik pusat O (0, 0)

$$A' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$B' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$C' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Jadi, titik-titik hasil pencerminannya adalah:

a. terhadap sumbu X:
P' (1, –2), Q' (3, –5), dan R' (4, –1)

b. terhadap sumbu Y:
P' (–1, 2), Q' (–3, 5), dan R' (–4, 1)

c. terhadap titik pusat (0, 0):
A' (–1, –2), B' (–3, –5), dan R' (–4, –1)

2. Rotasi

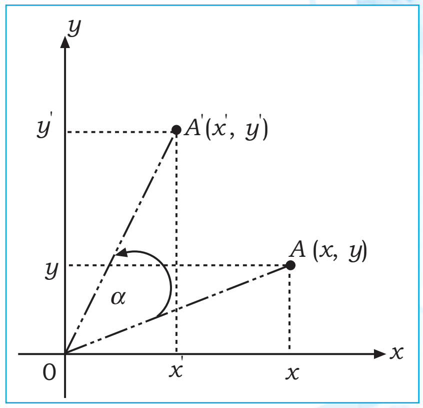
Bayangan akibat rotasi ditentukan oleh pusat dan besar sudut rotasi. **Rotasi positif** atau sudut putar positif (R_α) adalah rotasi yang putarannya berlawanan dengan arah putaran jarum jam dan sebaliknya jika putarannya searah putaran jarum jam maka disebut **rotasi negatif** atau sudut putarannya negatif ($R_{(-\alpha)}$).

a. Rotasi dengan Pusat *O* (0, 0)

Rotasi dengan pusat O (0, 0) dan besar sudut putaran α dituliskan dalam $R\,[0, \alpha]$, dengan matriks rotasi:

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Titik A (x, y) dirotasikan dengan rotasi $R\,[0, \alpha]$, dengan pusat rotasi O (0, 0) menghasilkan titik bayangan A' (x', y'). Dengan memerhatikan gambar di samping diperoleh hubungan:



$$A' = R_\alpha \times A$$

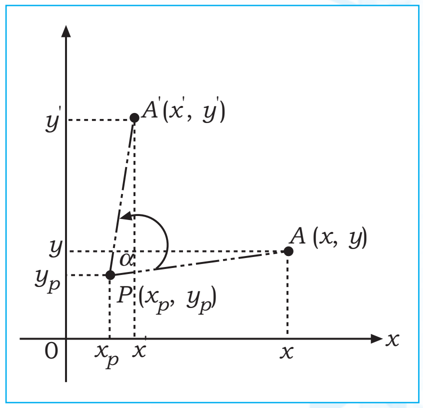
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dari hubungan di atas didapatkan persamaan:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha \\ x \cdot \sin\alpha - y \cdot \cos\alpha \end{pmatrix}$$

b. Rotasi dengan Pusat *P* (x_p, y_p)

Titik A (x, y) dirotasikan dengan rotasi $R\,[P, \alpha]$ menghasilkan titik bayangan A' (x', y'), yang berpusat di titik P (x_p, y_p). Dengan memerhatikan gambar di samping diperoleh hubungan:



$$A' - P = R_\alpha \times (A - P)$$

$$\begin{pmatrix} x' - x_p \\ y - y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - x_p \\ y - y_p \end{pmatrix}$$

Dari hubungan di atas didapatkan persamaan:

$$\begin{aligned} x' &= \{(x - x_p) \cdot \cos\alpha - (y - y_p) \cdot \sin\alpha\} - x_p \\ y' &= \{(x - x_p) \cdot \sin\alpha + (y - y_p) \cdot \cos\alpha\} - y_p \end{aligned}$$

Contoh:

Diketahui titik A (4, 5), tentukan bayangannya akibat rotasi 90° dengan titik pusat O dan dengan titik pusat P (1, 1).

Penyelesaian:

Rotasi dengan titik pusat O (0, 0) dan α = 90°.
dan α = 90°.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Rotasi dengan titik pusat P (1, 1)

$$\begin{pmatrix} x' - 1 \\ y' - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 5 - 1 \end{pmatrix}$$

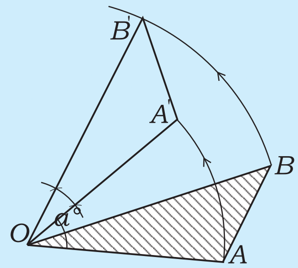
$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 + 1 \\ 3 + 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A (4, 5) akibat rotasi 90° dengan titik pusat O (0, 0)adalah A' (–5, 4), dan bayangan titik A (4, 5) akibat rotasi 90° dengan titik pusat P (1, 1) adalah A' (–3, 4).

Rotasi pada Bangun



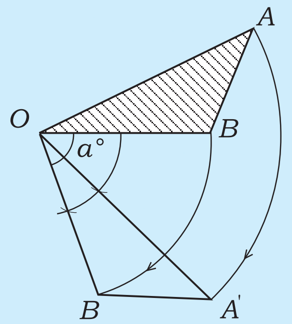
ΔAOB dirotasikan sebesar $a°$, dengan pusat O. Posisinya akan menjadi $A'O'B'$ dengan putaran berlawanan jarum jam.

Untuk merotasikan AOB menjadi $A'O'B'$, dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut.

- Putar OA sejauh $a°$ dengan pusat O.
- Putar OB sejauh $a°$ dengan pusat O.

Maka OAB menjadi $OA'B'$

Diperoleh $\angle AOA' = \angle BOB' = a°$ dan $AB = A'B'$



Bagaimana atau di mana letak $\Delta A'OB'$ bila ΔAOB diputar dengan sudut putaran $a°$ dan pusat O, sedangkan arah putaran searah dengan putaran jarum jam?

- Putar OA sejauh $a°$ dengan pusat O sehingga menempati OA'.
- Putar OB sejauh $a°$ dengan pusat O sehingga menjadi OB'.

Jadi, AB menjadi $A'B'$.

Dari rotasi yang dilakukan daerah OAB menjadi $OA'B'$ maka $AB = A'B'$.

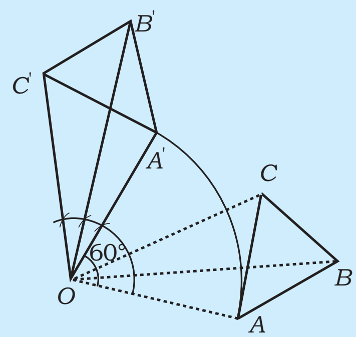
Contoh:

Rotasikan ΔABC dengan sudut putar 60°, dengan pusat di titik O di luar daerah ΔABC dan arah putaran berlawanan dengan putaran jarum jam.

Penyelesaian:

Dalam merotasikan ΔABC, OA dirotasikan 60° dengan pusat O menjadi OA'. Sisi OB dirotasikan 60° dengan pusat O menjadi OB' dan demikian pula OC dirotasikan 60° dengan pusat OC'.

Jadi, $OA = OA'$, $OB = OB'$, dan $OC = OC'$, besar $\angle AOA' = \angle BOB' = \angle COC' = 60°$, dan $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ dan $BC = B'C'$.

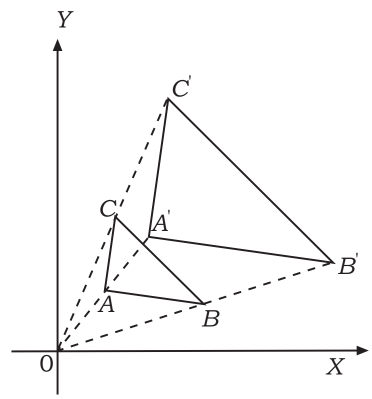


3. Dilatasi (Perkalian)

a. Dilatasi dengan Pusat O (0,0)

Bayangan akibat dilatasi ditentukan oleh titik pusat dan faktor skala (faktor perkalian). Dilatasi dengan pusat O (0, 0) dan faktor skala k, dirumuskan dengan $[O, k]$.

Segitiga ABC didilatasi dengan titik pusat O dan faktor skala k menghasilkan $A'B'C'$. Diperoleh hubungan:



$$x' = k \cdot x$$
$$y' = k \cdot y$$

Dalam hitungan matriks dirumuskan:

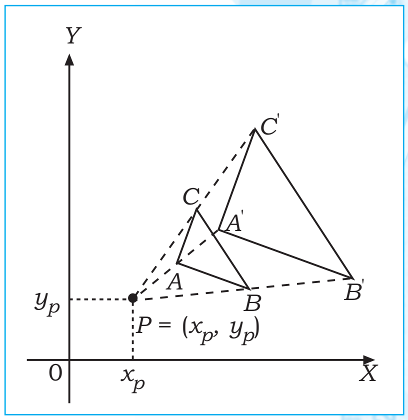
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ atau } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Tugas Mandiri

Salah satu aplikasi dilatasi adalah perancangan mobil. Di bidang ini dilatasi disebut skala. Bukalah internet. Coba carilah informasi serta gambar mengenai replika mobil. Cari pula informasi gambar mobil yang telah jadi. Bandingkan data ukuran replika dan mobil tersebut. Tentukan di mana letak penggunaan dilatasi pada perancangan tersebut.

b. Dilatasi dengan Pusat $P(x_p, y_p)$

Jika titik $A(x, y)$ didilatasikan dengan titik pusat $P(x_p, y_p)$ dan faktor skala k menghasilkan titik $A'(x', y')$ maka diperoleh hubungan:



$$\begin{pmatrix} x' - x_p \\ y' - y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' - x_p \\ y - y_p \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} x - x_p \\ y - y_p \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot (x - x_p) + x_p \\ k \cdot (y - y_p) + y_p \end{pmatrix}$$

Contoh:

Diketahui titik A (5, 9), tentukan hasil bayangannya karena dilatasi $[O, 2]$ dan karena dilatasi $[P, 3]$ dengan titik pusat $P[2, 1]$!

Penyelesaian:

Dilatasi $[O, 2]$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Dilatasi $[P, 3]$

$$\begin{pmatrix} x' - 2 \\ y' - 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 9 - 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + 2 \\ 3 \cdot 8 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 25 \end{pmatrix}$$

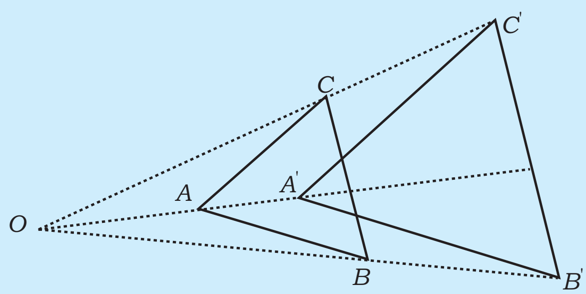
Jadi, titik bayangan hasil dilatasi adalah: A' (10, 18) dan A' (11, 25).

Dilatasi Suatu Bangun

Contoh:

Dilatasikan bangun ΔABC dengan pusat O dengan faktor dilatasi $1\frac{1}{2}$!

Penyelesaian:



$\Delta A'B'C'$ hasil dilatasi ΔABC dengan $(O, 1\frac{1}{2})$ diperoleh hasil sebagai berikut.

$OA' = 1\frac{1}{2}\,OA$, $OB' = 1\frac{1}{2}\,OB$, dan $OC' = 1\frac{1}{2}\,OB$,

$A'B' = 1\frac{1}{2}\,AB$, $A'C' = 1\frac{1}{2}\,AC$, dan $B'C' = 1\frac{1}{2}\,BC$,

$AB // A'B'$, $AC // A'C'$, dan $BC // B'C'$,

$\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, dan $\angle C = \angle C'$.

Jadi, $\Delta A'B'C' \approx \Delta ABC$.

Latihan 3

Kerjakan soal-soal berikut!

1. Diketahui segitiga ABC dengan titik-titik A (1, 1), B (3, 5), dan C (5, 2). Tentukanlah bayangan segitiga tersebut setelah digeser oleh $T\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$!
2. Diketahui segi empat ABC dengan titik-titik sudut A (1, 2), B (1, 5), C (3, 4), dan D (5, 1). Tentukanlah bayangan segi empat $ABCD$ tersebut akibat pencerminan terhadap sumbu X!
3. Diketahui segitiga ABC dengan titik-titik sudut A (0, 1), B (3, 0), dan C (5, 4). Tentukanlah bayangan segitiga tersebut akibat pencerminan terhadap titik asal!
4. Tentukanlah bayangan titik A (6, 3) akibat diputar dengan aturan sebagai berikut!
   a. 90° dengan pusat O (0, 0)
   b. 180° dengan pusat O (0, 0)
   c. 90° dengan pusat P (1, 2)
   d. –90° dengan pusat P (1, 2)
5. Dengan menggunakan matriks operator, tentukan bayangan segitiga PQR dengan titik sudut P (2, 3), Q (–1, 5), dan R (2, 2) akibat pencerminan!
   a. Terhadap sumbu x.
   b. Terhadap sumbu y.
   c. Terhadap garis $y = x$.
   d. Terhadap garis $y = -x$.
   e. Terhadap titik asal.
6. Diberikan segitiga sama kaki ABC dengan AB = 6 cm dan AC = 5 cm. Titik O di tengah AC. Tentukan hasil dilatasi ΔABC dengan pusat O dan faktor dilatasi 2!
7. Diberikan persegi $ABCD$ dengan sisi 10 cm. Titik O perpotongan AC dan BD. Tentukan hasil dilatasi persegi $ABCD$ dengan pusat O dan faktor dilatasi $\frac{3}{4}$!
8. Segitiga ABC siku-siku di A, AB = 6 cm dan AC = 8 cm. Titik O di tengah BC. Gambarkan hasil dilatasi ΔABC dengan pusat O dan faktor dilatasi 3!
9. Jajaran genjang $ABCD$ dengan AB = 8 cm dan AD = 6 cm. Gambarkan hasil dilatasi jajaran genjang tersebut apabila memunyai pusat A dan faktor dilatasi 2!
10. Layang-layang $PQRS$ dengan diagonal PR dan QS berpotongan di O sehingga $OP = OR$ = 2 cm, OQ = 4 cm, dan OS = 2 cm. Tentukan hasil dilatasi layang-layang $PQRS$ dengan pusat O dan faktor dilatasi 2!

Rangkuman

1. Sudut
   a. Sudut adalah bangun yang dibentuk oleh dua sinar garis yang bersekutu pada titik pangkal.
   b. Menurut besarnya sudut dibedakan sudut lancip besarnya kurang dari 90°, sudut siku-siku besarnya tepat 90° dan sudut tumpul sudut yang besarnya lebih dari 90°.
   c. Bila ada sudut A yang besarnya tertentu maka kita memperoleh:
      1) penyiku sudut A = $90° - \angle A$
      2) pelurus sudut A = $180° - \angle A$
      3) pemutar sudut A = $360° - \angle A$

d. Satuan sudut
   1) Satuan sudut 1° (satu derajat) adalah satuan sudut pusat lingkaran yang menghadap busur sepanjang $\frac{1}{360}$ keliling lingkaran. 1° = 60' (menit) : 1' = 60'' (detik).
   2) Satuan sudut 1 radial 1 radian adalah besar sudut pusat lingkaran yang menghadap busur sepanjang jari-jari lingkaran.
      π radian = π rad = 180°. 1° = $\frac{\pi}{180}$ rad; 1 rad = 57, 324° atau 1 rad = 57°19'26''.
   3) Satuan sudut 1 Gon = $\frac{180°}{200}$ = 0,9°.

e. Macam-macam bangun
   1) Segi banyak adalah kurva tertutup bersisi *n*.
   2) Segi banyak beraturan adalah segi banyak yang semua sisinya sama panjang dan besar setiap sudut dalam tidak sama besar.
   3) Segi banyak tak beraturan adalah segi banyak semua sisi tidak sama panjang begitu pula besar sudut dalam tidak sama besar.
   4) Macam-macam segitiga
      a) Segitiga lancip sembarang.
      b) Segitiga siku-siku sembarang.
      c) Segitiga tumpul sembarang.
      d) Segitiga lancip sama kaki.
      e) Segitiga siku-siku sama kaki.
      f) Segitiga tumpul sama kaki.
      g) Segitiga sama sisi.

f. Macam-macam segi empat
   1) Segi empat sembarang
   2) Trapesium sembarang, trapesium siku-siku, dan trapesium sama kaki.
   3) Layang-layang
   4) Jajar genjang, persegi, persegi panjang, belah ketupat.
   5) Luas daerah bangun yang dimaksud adalah luas daerah di dalam bangunan tersebut dengan formula atau rumus sebagai berikut.

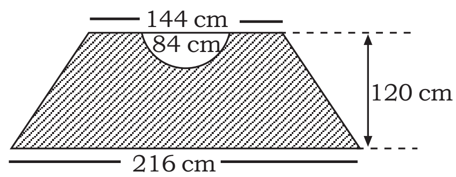
No.	Nama Bangun	Luas Daerah	Keliling
1.	Segitiga	L = $\frac{1}{2}$ alas × tinggi	K = $S_1 + S_2 + S_3$
2.	Persegi panjang	L = panjang × lebar	K = $2(p + \ell)$
3.	Persegi	L = sisi × sisi	K = 4s
4.	Jajar genjang	L = alas × tinggi	K = $2S_1 + 2S_2$
5.	Belah ketupat	L = $\frac{1}{2}$ × diagonal × diagonal	K = $2S_1 + 2S_2$
6.	Layang-layang	L = $\frac{1}{2}$ × diagonal × diagonal	K = $2S_1 + 2S_2$
7.	Trapesium	L = $\frac{1}{2} \times (AB + CD) \times t$	K = $2 \times (AB + CD) + t$
8.	Lingkaran	L = πR^2	K = $2\pi R$

2. Transformasi Bangun
   Suatu bangun dapat berubah tempat atau besarnya dengan cara:
   a. Pencerminan: bangun diceminkan terhadap garis tertentu. Besar bangun tetap, letaknya simetri terhadap cermin.
   b. Translasi : bangun digeser dengan arah dan jarak tertentu. Bangun tetap, jarak menurut jauh penggeseran.
   c. Dilatasi : bangun diperbesar atau diperkecil dari pusat titik dilatasi. Besar bangun berubah, ukuran sisi-sisinya berubah sesuai dengan faktor dilatasi.
   d. Rotasi : bangun berpindah tempat sesuai dengan pusat rotasi, besar sudut rotasi, dan arah rotasi.

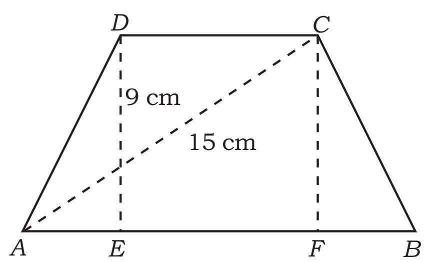
Evaluasi Kompetensi

A. *Pilihlah jawaban yang tepat!*

1. Sebuah jarum berputar 7,5 putaran/menit. Waktu yang diperlukan oleh jarum tersebut untuk menempuh waktu selama $90°30'$ adalah. . . .
   a. 1,95 detik
   b. 2,00 detik
   c. 2,01 detik
   d. 2,11 detik
   e. 2,11 detik

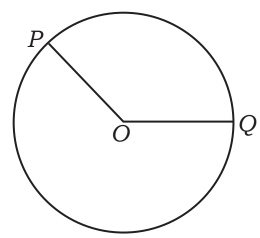
2. 

   Luas daerah yang diarsir pada gambar di atas adalah . . . .
   a. 21.336 cm^2
   b. 21.024 cm^2
   c. 18.828 cm^2
   d. 16.422 cm^2
   e. 10.512 cm^2

3. 

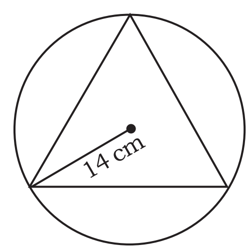
   Diketahui trapesium *ABCD* dengan ukuran seperti pada gambar di atas. Jika *AE* = 4 cm maka luas daerah trapesium *ABCD* adalah . . . .
   a. 126 cm^2
   b. 252 cm^2
   c. 108 cm^2
   d. 540 cm^2
   e. 552 cm^2

4. Pada gambar di samping *O* adalah pusat lingkaran dan panjang *OP* = 7 cm. Jika $\angle POQ$ = 135° dan $\pi = \frac{22}{7}$ maka luas juring lingkaran *POQ* adalah . . . .



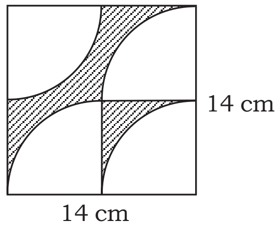
   a. $16\frac{1}{2}$ cm^2
   b. 44 cm^2
   c. $61\frac{1}{2}$ cm^2
   d. $57\frac{3}{4}$ cm^2
   e. $115\frac{1}{2}$ cm^2

5. Panjang maksimum tiap segitiga sama sisi yang dapat masuk ke dalam lingkaran dengan diameter 28 cm adalah . . . .



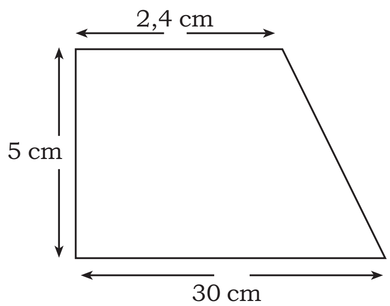
   a. $7\sqrt{3}$ cm
   b. $(28 - 7\sqrt{3})$ cm
   c. 21 cm
   d. $14\sqrt{3}$ cm
   e. $14\sqrt{6}$ cm

6. Luas daerah yang diarsir pada gambar di samping adalah . . . .



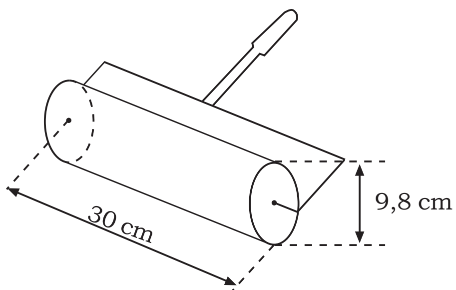
a. 10,5 cm^2
b. 16 cm^2
c. 24,5 cm^2
d. 28 cm^2
e. 29,8 cm^2

7.



Bagian atap rumah mempunyai bentuk dan ukuran seperti pada gambar di atas. Jika tiap 1 m^2 atap memerlukan 20 genting maka banyaknya genting yang diperlukan adalah . . . genting.
a. 5.800
b. 3.000
c. 2.700
d. 2.400
e. 1.350

8. Sebuah kuas rol yang memiliki ukuran seperti pada gambar di samping berputar sebanyak 15 kali. Luas tembok yang telah dicat adalah . . . .



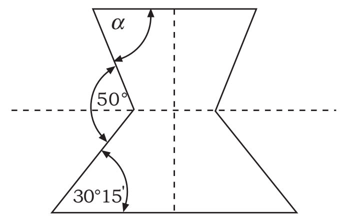
a. 138.600 cm^2
b. 13.860 cm^2
c. 4.620 cm^2
d. 1.386 cm^2
e. 462 cm^2

9. Bayangan segitiga *ABC* dengan titik sudut *A* (2, 3), *B* (8, 4), *C* (6, 5) jika didilatasi [0, 2] adalah . . . .
a. $A'(4, 6)$, $B'(8, 8)$, $C'(12, 10)$
b. $A'(4, 6)$, $B'(8, 8)$, $C'(6, 10)$
c. $A'(4, 3)$, $B'(16, 8)$, $C'(12, 10)$
d. $A'(4, 3)$, $B'(12, 8)$, $C'(12, 10)$
e. $A'(4, 6)$, $B'(16, 8)$, $C'(12, 10)$

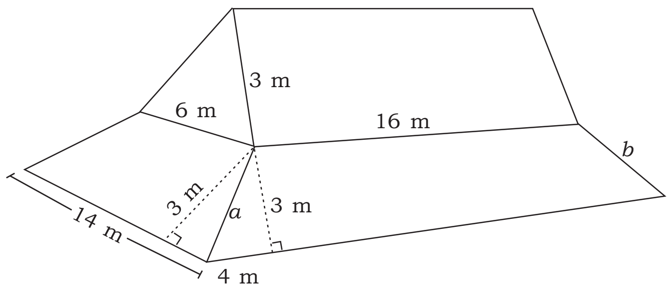
10. Bayangan titik *R* (10, 14) setelah ditranslasi $T\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ kemudian dicerminkan terhadap sumbu *X* adalah . . . .
a. $R'(12, 17)$
b. $R'(12, -17)$
c. $R'(-12, 17)$
d. $R'(-12, -17)$
e. $R'(17, 12)$

B. *Kerjakan soal-soal berikut!*

1. Tentukan besarnya sudut α pada gambar di bawah!



2. Perhatikan gambar permukaan atap genting rumah kaca di bawah. Apabila kebutuhan genting kaca per m^2 adalah 25 buah, tentukan banyaknya genting yang dibutuhkan!

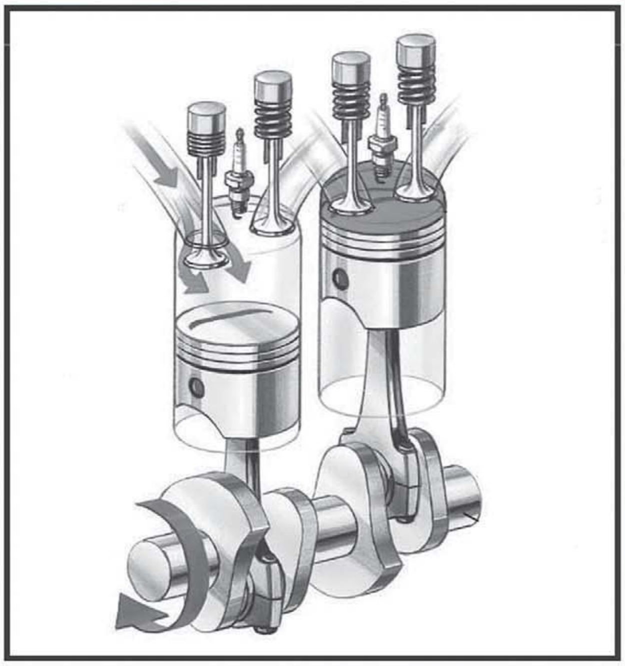


3. Tentukan bayangan segi empat *PQR* dengan *P* (–2, –1), *Q*(5, –2), dan *R* (–2, 4) setelah didilatasi dengan pusat di (2, –1) dan skala $k = 3$!

4. Lingkaran yang berpusat di (2, 3) dan menyinggung garis $3x - 4y + 5 = 0$ dicerminkan terhadap sumbu *y*. Tentukan persamaan bayangannya!

5. Tentukan bayangan $y^2 = 16 - x^2$ pada putaran sejauh 90° dengan pusat *P* (1, 1)!

Bab V Geometri Dimensi Tiga



Sumber: *www.aeroflight.com*

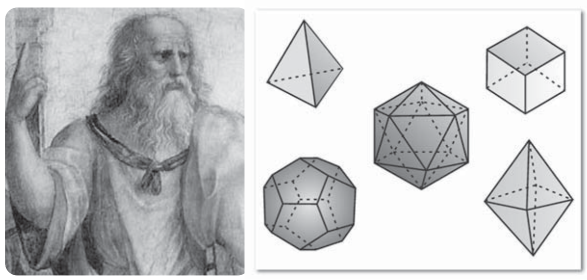
Piston

Mungkin tanpa sadar kita selalu dekat dengan ilmu geometri. Tahukah kalian, dimana letak kedekatan itu? Salah satu kedekatan ini adalah penggunaan geometri untuk merancang mesin kendaraan.

Pada mesin mobil maupun motor, besarnya tenaga yang dapat dihasilkan dinyatakan dalam satuan *cc* (*centimeter cubic*). Pada dasarnya prinsip kerja mesin maupun mobil bergantung pada kemampuan piston dalam mengonversikan pembakaran campuran antara bahan bakar dan udara yang terjadi di dalam ruang pembakaran. Secara signifikan, semakin besar dimensi ruang pembakaran maka tabung tempat terjadinya pembakaran akan semakin besar. Akibatnya semakin banyak campuran udara dan bahan bakar yang dapat masuk untuk diproses. Akhirnya tenaga yang dapat dihasilkan cukup besar. Gambar di atas menunjukkan piston pembakaran tempat bahan bakar dan udara diproses menjadi tenaga. Di dalam matematika, bangun tabung yang pada uraian di atas merupakan tempat pembakaran termasuk salah satu bahasan di dalam geometri dimensi tiga. Pembahasan lebih lanjut mengenai geometri dimensi tiga akan kita pelajari pada uraian berikut.

Kegiatan Belajar 1

Bangun Ruang dan Unsur-unsurnya



Sumber: *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia*

Plato dan macam-macam bangun ruang sempurna

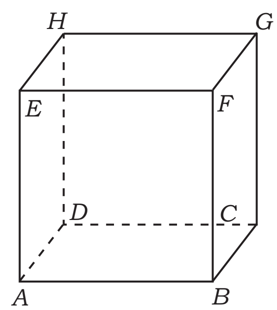
Ilmuwan matematika menyebut bangun ruang dengan istilah 'polihedron' yang terdiri atas kata *poly* = banyak dan *hedron* = bentuk. Hal ini dikarenakan bangun-bangun ruang mempunyai sisi yang seluruhnya berupa bangun beraturan. Bagi para ilmuwan, bangun ruang yang paling sempurna adalah kubus, karena struktur sisi, rusuk, dan sudut yang teratur. Bangun-bangun ruang sempurna lainnya adalah *tetrahedron* (bidang empat), *oktahedron* (bidang delapan), *dodekahedron* (bidang dua belas), dan *ikosahedron* (bidang dua puluh). Kelima bangun tersebut dinamakan "bangun-bangun ruang platonik", diambil dari nama Plato, seorang filosof Yunani yang mencoba menerangkan fisika alam semesta dengan mengkaji bangun-bangun tersebut.

Uraian Materi

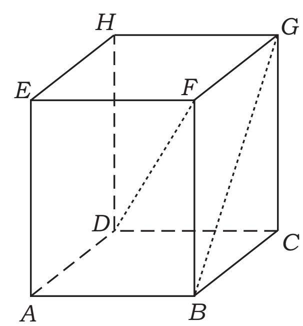
A. Macam-Macam Bangun Ruang

1. Kubus

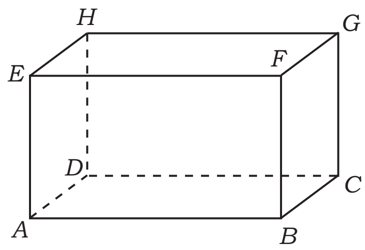
Kubus adalah bangun ruang yang dibatasi enam sisi yang berbentuk persegi yang sebangun. Nama lain dari kubus adalah *heksader* (bidang enam beraturan). Perhatikan gambar di bawah! Kubus memiliki ciri-ciri sebagai berikut.



a. Memiliki enam sisi yang berbentuk persegi, yaitu:
   ABCD, *ABFE*, *BCGF*, *CGHD*, *ADHE*, *EFGH*
b. Memiliki dua belas rusuk yang sama panjang, yaitu:
   $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{EA}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$, $\overline{DH}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{EH}$
c. Memiliki delapan titik sudut, yaitu:
   A, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, dan *H*
d. Memiliki dua belas diagonal sisi, yaitu:
   $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{BG}$, $\overline{CF}$, $\overline{CH}$, $\overline{DG}$, $\overline{AH}$, $\overline{DE}$, $\overline{AF}$, $\overline{EB}$, $\overline{EG}$, $\overline{FH}$
e. Memiliki empat diagonal ruang, yaitu:
   $\overline{AG}$, $\overline{CE}$, $\overline{DF}$, $\overline{BH}$
f. Memiliki enam bidang diagonal ruang, yaitu:
   ABGH, *CDEF*, *BCHE*, *ADGF*, *ACGE*, *BDHF*
g. Besar semua sudut-sudut pada kubus adalah 90°.



2. Balok



Balok adalah bangun ruang yang dibatasi oleh enam bidang datar yang berbentuk persegi panjang dengan tiga pasang sisi yang saling sejajar. Nama lain dari balok adalah prisma siku-siku. Perhatikan gambar di samping. Balok memiliki ciri-ciri sebagai berikut.

a. Memiliki enam buah sisi dengan tiga pasang di antaranya saling sejajar, yaitu:
ABCD // *EFGH*, *ABFE* // *DCGH*, *BCGF* // *ADHE*

b. Memiliki dua belas rusuk yang terdiri atas tiga kelompok rusuk yang sejajar dan sama panjang.

$\overline{AB} // \overline{DC} // \overline{EF} // \overline{HG} // \overline{BC} // \overline{FG} // \overline{AD} // \overline{EH} // \overline{AE} // \overline{BF}, \overline{CG}, \overline{DH}$

c. Memiliki delapan buah titik sudut.

d. Memiliki dua belas diagonal sisi yang terdiri atas enam kelompok diagonal yang sejajar dan sama panjang.

$\overline{AF} // \overline{DG}, \overline{BE} // \overline{CH}, \overline{AH} // \overline{BG}, \overline{CF} // \overline{DE}, \overline{AC} // \overline{EG}, \overline{BD} // \overline{FH}$

e. Memiliki empat diagonal ruang, yaitu:

$\overline{AG}, \overline{CE}, \overline{BH}, \overline{DF}$

f. Memiliki enam buah bidang diagonal ruang, yaitu:
ABGH, *CDEF*, *BCHE*, *ADGF*, *ACGE*, *BDHF*

g. Besar sudut pada balok 90°.

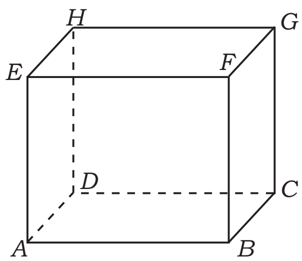
3. Prisma

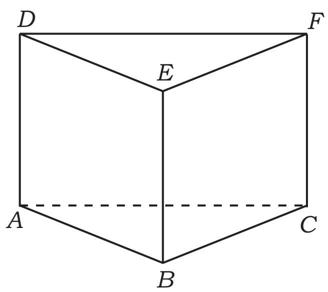
Prisma adalah bangun ruang yang dibatasi oleh dua bidang segi-n beraturan sebagai sisi alas dan sisi tutup serta n bidang persegi panjang sebagai sisi tegak. Nama prisma ditentukan sesuai banyaknya n sisi alas, yaitu prisma segi n beraturan. Prisma memiliki ciri-ciri umum sebagai berikut.

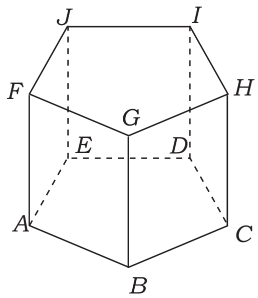
a. Memiliki sisi alas dan tutup yang sebangun dan sejajar.
b. Memiliki sisi tegak yang tegak lurus dengan sisi sejajar.

Beberapa contoh macam-macam prisma:

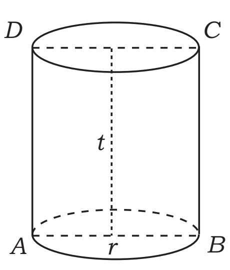
1) Prisma siku-siku 2) Prisma segitiga 3) Prisma segi lima







4. Tabung (Silinder)



Tabung adalah prisma tegak beraturan yang bidang alas dan tutupnya berbentuk lingkaran dan sisi tegaknya berupa bidang lengkung. Tabung disebut juga silinder. Perhatikan gambar di samping. Tabung memiliki ciri-ciri sebagai berikut.

a. Memiliki tiga buah sisi.
b. Bidang alas dan tutup berupa lingkaran.
c. Memiliki dua buah rusuk yang berupa keliling dua buah lingkaran.
d. Tidak memiliki titik sudut.

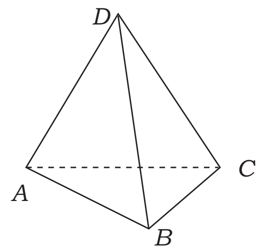
5. Limas

Limas adalah bangun ruang yang dibatasi oleh alas berbentuk segitiga samakaki yang banyaknya n dan puncaknya berimpit. Limas memiliki ciri-ciri sebagai berikut.

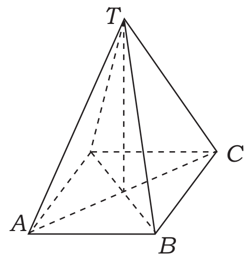
a. Memiliki $n + 1$ sisi yang beraturan.
b. Memiliki rusuk sebanyak $2n$.
c. Memiliki $n + 1$ titik sudut.

Beberapa contoh macam-macam limas:

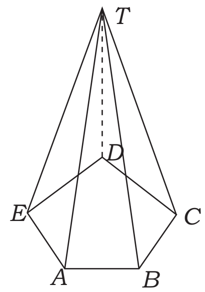
1) Limas segitiga



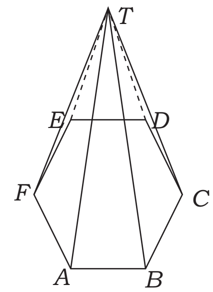
2) Limas segi empat



3) Limas segi lima



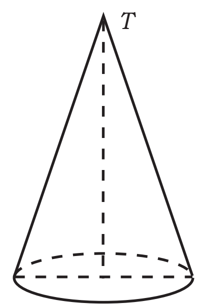
4) Limas segi enam



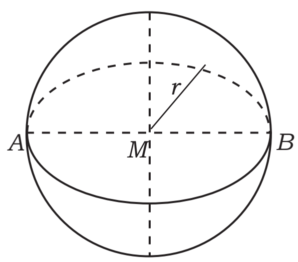
6. Kerucut

Kerucut adalah limas beraturan yang memiliki sisi alas berupa lingkaran. Perhatikan gambar di samping. Kerucut memiliki ciri-ciri sebagai berikut.

a. Memiliki dua buah sisi yang berupa sisi alas berbentuk lingkaran dan satu buah sisi lengkung.
b. Memiliki satu buah rusuk yang berupa keliling lingkaran.
c. Memiliki satu buah titik puncak yaitu T.



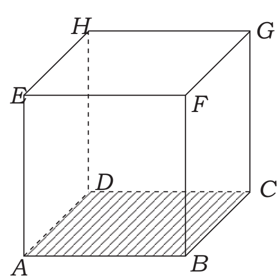
7. Bola



Bola adalah bangun ruang tiga dimensi yang hanya memiliki satu sisi dan tidak memiliki rusuk maupun titik sudut. Sisi pada bola disebut juga permukaan bola atau kulit bola atau bidang bola.

B. Jaring-Jaring Bangun Ruang

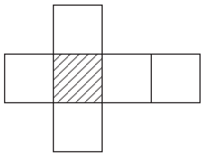
Jika suatu benda beraturan dalam ruang dibuka dan direbahkan pada suatu bidang datar, hasil yang terletak pada bidang datar itu disebut **jaring-jaring bangun ruang**.

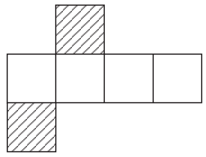


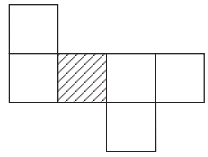
1. Jaring-Jaring Kubus

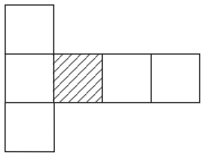
Bangun kubus merupakan bangun tiga dimensi dengan sisi yang diarsir merupakan sisi alas dan keenam sisinya berukuran sama.

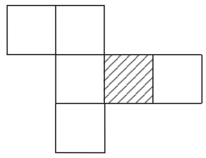
Contoh macam-macam jaring kubus:

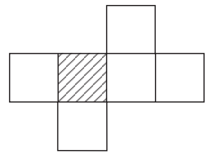
1.


3.


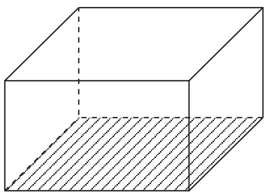
5.


2.


4.


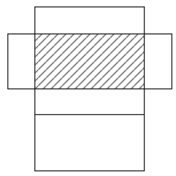
6.


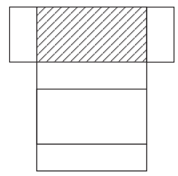
2. Jaring-Jaring Balok

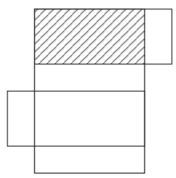


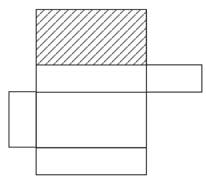
Balok memiliki tiga pasang sisi yang ukurannya berbeda.

Macam-macam jaring balok antara lain:

1.


3.


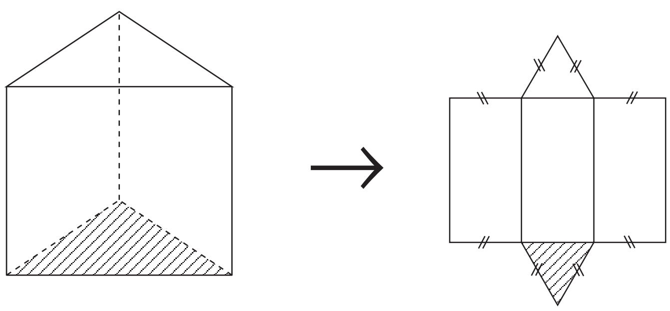
2.


4.


3. Jaring-Jaring Tabung

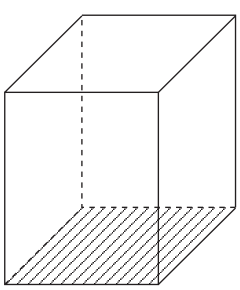
a. Prisma Segitiga

Jaring-jaring prisma segitiga:

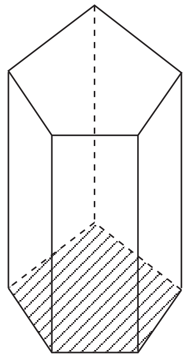


b. Prisma Segi Empat

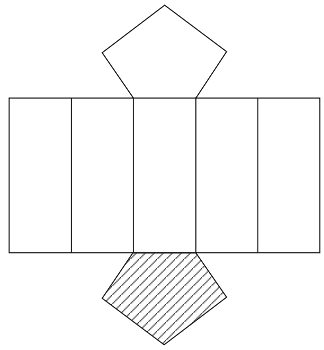
Prisma segi empat atau yang biasa disebut balok memiliki jaring-jaring yang sama seperti pada poin 2.



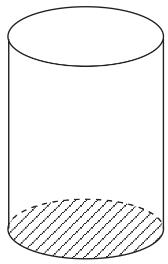
c. **Prisma Segi Lima**



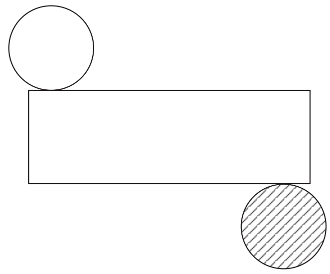
Jaring-jaring prisma segi lima:



4. **Tabung**

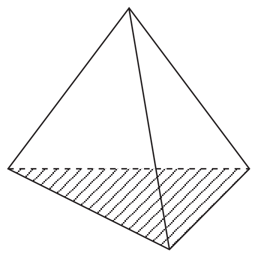


Jaring-jaring tabung:

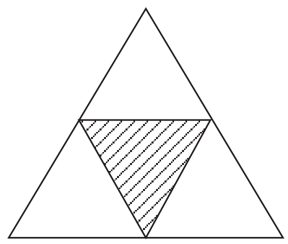


5. **Limas**

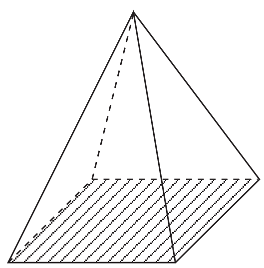
a. **Limas Segitiga**



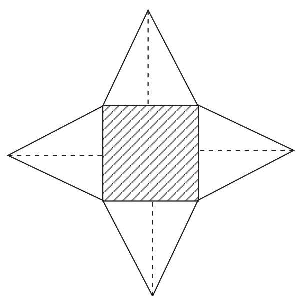
Jaring-jaring limas segitiga:



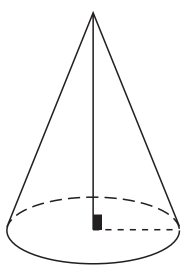
b. **Limas Segi Empat**



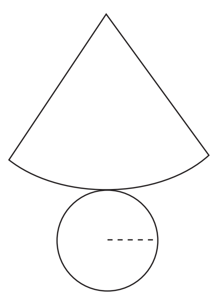
Jaring-jaring limas segi empat:



6. **Kerucut**



Jaring-jaring kerucut:

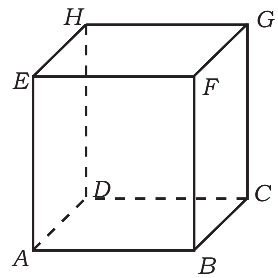


Latihan 1

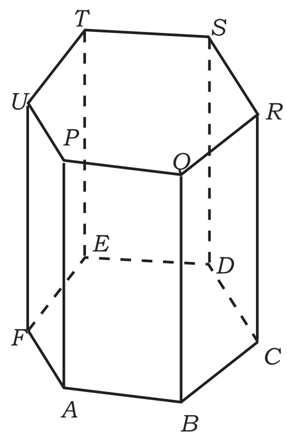
Kerjakan soal-soal berikut!

1. Gambarlah balok *ABCD.EFGH*, kemudian gambarlah limas segi empat *E.ABCD* dengan *E* adalah titik potong diagonal *EG* dan *FH* yang diperoleh dari balok *ABCD.EFGH*. Kemudian jawablah pertanyaan berikut!
   a. Apakah semua sisi tegaknya sebangun?
   b. Sebutkan bentuk segitiga-segitiga *ADE* dan *CDE*!
   c. Apakah bidang diagonal *ACE* dan *BDE* sebangun?

2. Perhatikan gambar di samping!
   a. Ada berapa sisi-sisi pada kubus? Sebutkan!
   b. Bagaimana bentuk sisi-sisinya?
   c. Berapakah banyak bidang diagonal pada kubus? Sebutkan!
   d. Sebutkan semua pasangan rusuk yang sejajar (berhadapan)!

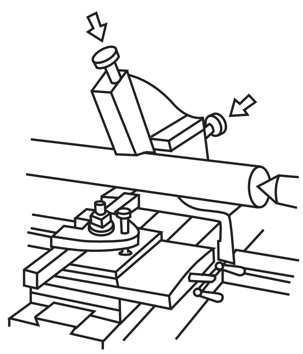


3. Diberikan prisma segi enam beraturan *ABCDEF.PQRSTU*.
   a. Sebutkan dua bidang yang sejajar!
   b. Sebutkan bidang alas dan bidang atas!
   c. Sebutkan bidang-bidang sisi tegak!
   d. Sebutkan rusuk-rusuk bidang alas dan atas!
   e. Sebutkan rusuk-rusuk tegak!
   f. Sebutkan rusuk-rusuk yang sejajar!



4. Gambarlah jaring-jaring dari bangun prisma segi enam!
   a. Sebutkan dua bidang yang sejajar!
   b. Sebutkan bidang alas dan bidang atas!

5. Pada saat mesin bubut bekerja terdapat alat pengekang tetap yang berguna untuk membubut benda kerja yang tipis dan panjang. Hal ini bertujuan agar diameternya dapat ditentukan menurut aturan yang ditetapkan. Perhatikan alat pengekang tetap pada mesin bubut di samping. Sebutkan paling sedikit tiga bangun ruang yang terdapat pada alat tersebut!
   a. Sebutkan dua bidang yang sejajar!
   b. Sebutkan bidang alas dan bidang atas!



Kegiatan Belajar 2

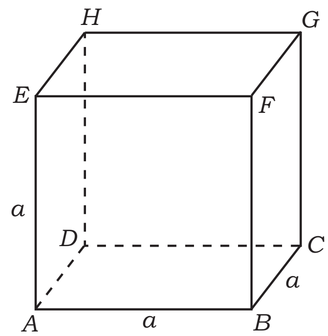
Luas Permukaan Bangun Ruang

Sumber: *Dokumentasi SMK*

Alat bedah

Pada peralatan bedah, untuk menghindari perkaratan karena reaksi logam dengan udara maka diperlukan suatu proses pelapisan. Pelapisan ini pada umumnya dilakukan dengan nikel dan bertujuan untuk melapisi permukaan peralatan bedah. Sebagai contoh sebuah peralatan bedah akan kita lapisi menggunakan nikel dengan ketebalan 0,1 mm. Misalnya batangan nikel yang akan dilarutkan dalam cairan memiliki volume V. Dari proses tersebut kita dapat menghitung luas permukaan peralatan bedah yaitu volume nikel yang digunakan untuk melapisi dibagi dengan tinggi permukaan hasil sepuhan yaitu 0,1 mm. Cara tersebut digunakan untuk mencari luas permukaan suatu benda yang permukaannya tidak beraturan. Sementara itu, luas permukaan benda yang beraturan dapat kita cari dengan menggunakan rumus. Rumus-rumus tersebut akan kita pelajari pada uraian berikut.

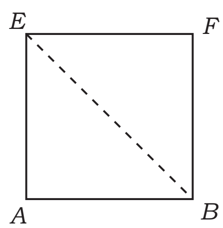
Uraian Materi



A. Kubus

Perhatikan gambar kubus di samping. Apabila panjang rusuk kubus dinyatakan sebagai a maka unsur-unsur pada kubus dapat kita tentukan sebagai berikut.

- Diagonal Sisi



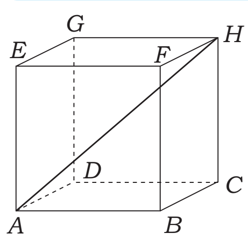
Dengan menggunakan rumus Pythagoras, maka dapat dihitung panjang diagonal sisi dengan rumus:

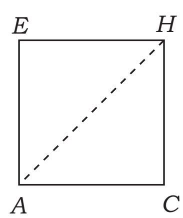
$$BE = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

- Diagonal Ruang

Panjang $\overline{AG}$ merupakan diagonal ruang yang dapat dihitung dengan menggunakan rumus:

$$AG = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + (a)^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$$





- Permukaan Luas

Kubus terdiri atas enam buah sisi yang berbentuk persegi, masing-masing sisinya memiliki luas L = s × s. Jadi, luas enam sisi pada kubus sebagai berikut.

Luas permukaan = 6 × s × s

Contoh:

Perbandingan panjang rusuk kubus *ABCD.EFGH* dengan panjang rusuk kubus *KLMN.PQRS* adalah 1 : 2. Jumlah luas permukaan kedua kubus tersebut adalah 270 cm^2. Tentukan panjang rusuk tiap-tiap kubus!

Penyelesaian:

Dimisalkan panjang rusuk *ABCD.EFGH* adalah a cm, dan panjang rusuk kubus *KLMN.PQRS* adalah $2a$ cm.

Luas permukaan kubus *ABCD.EFGH* $= 6a^2$

Luas permukaan kubus *KLMN.PQRS* $= 6(2a)^2 = 24a^2$

Jumlah luas permukaan kedua kubus $= 6a^2 + 24a^2 = 30a^2$

Jumlah luas permukaan kubus kedua kubus sama dengan 270 cm^2 sehingga:

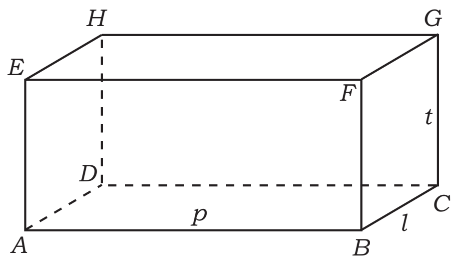
$30a^2 = 270$

$\Leftrightarrow \quad a^2 = 9$

$\Leftrightarrow \quad a = 3$

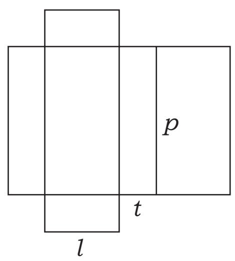
Jadi, panjang rusuk kubus *ABCD.EFGH* adalah 3 cm dan panjang rusuk kubus *KLMN.PQRS* adalah 6 cm.

B. Balok



Perhatikan gambar di samping. Balok memiliki ukuran panjang (p), lebar (l), dan tinggi (t). Apabila bangun balok dibentangkan menjadi satu bidang datar diperoleh jaring-jaring balok sebagai berikut.

Menghitung luas permukaan balok ekuivalen dengan menggunakan hitungan luas jaring-jaring balok yaitu:



Luas jaring-jaring $= (2 \times p \times t) + (2 \times l \times t) + 2 \times (p \times l)$

$= 2[(p \times t) + (l \times t) + (p \times l)$

Jadi, diperoleh rumus luas permukaan balok sebagai berikut.

$$\text{Luas permukaan} = 2[(p \times t) + (t \times l) + (l \times p)]$$

Contoh:

Sebuah kardus pembungkus obat berukuran panjang 30 cm, lebar 20 cm, dan tingginya 5 cm. Bagian luarnya dilapisi kertas aluminium sampai rapat. Hitunglah luas kertas aluminium minimum yang dibutuhkan!

Penyelesaian:

Diketahui $p = 30$ cm, $l = 20$ cm, dan $t = 5$ cm.

$Lp = 2(pl + pt + lt)$

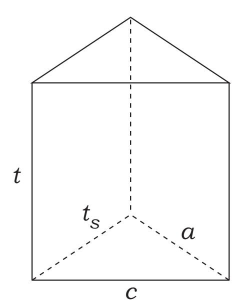
$= 2((30 \times 20) + (30 \times 5) + (20 \times 5))$

$= 2(600 + 150 + 100) = 1.700$

Jadi, kertas aluminium yang dibutuhkan seluas 1.700 cm^2.

C. Prisma (Tegak)

Mencari luas permukaan bangun ruang prisma adalah menghitung tiap-tiap luas alas, luas tutup, dan luas sisi-sisi tegak pada prisma segi-n.



1. Prisma Segitiga

Prisma segitiga di bawah memiliki ukuran-ukuran sebagai berikut.

a = alas segitiga pada sisi alas dan tutup

t_s = tinggi segitiga

t = tinggi prisma

c = sisi miring pada alas segitiga

Luas permukaan prisma segitiga adalah jumlahan luas tiap-tiap sisi alas, sisi tutup, dan sisi tegak, yang dirumuskan dengan:

Luas permukaan = L alas + L tutup + Luas sisi tegak

$$= \left(\frac{1}{2} \times a \times t_s\right) + \left(\frac{1}{2} \times a \times t_s\right) + (a \times t) + (t_s \times t) + (c \times t)$$

$$= (a \times t_s) + (a \times t) + (t_s \times t) + (c \times t)$$

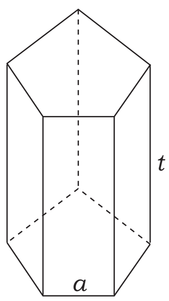
Jadi, luas permukaan prisma segitiga diberikan sebagai berikut.

Luas permukaan = $(a \times t_s) + (a \times t) + (t_s \times t) + (c \times t)$

2. Prisma Segi Empat

Prima segi empat disebut juga balok. Jadi, mencari luas permukaan prisma segi empat sama dengan mencari luas permukaan pada balok.

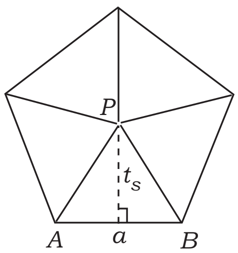
3. Prisma Segi Lima



Prisma segi lima terdiri atas dua buah sisi segi lima dan lima buah sisi tegak.

Sementara itu luas sisi-sisi tegak pada prisma adalah:

Luas sisi tegak $= 5 \times a \times t$



Luas segi lima $= 5 \times$ luas segitiga APB

$$= 5 \times \frac{1}{2} \times a \times t_s$$

$$= \frac{5}{2} \times a \times t_s$$

Jadi, luas permukaan prisma segitiga diberikan sebagai berikut.

Luas permukaan = Luas sisi alas + Luas sisi tutup + Luas sisi tegak

$$= \left(\frac{5}{2} \times a \times t_s\right) + \left(\frac{5}{2} \times a \times t_s\right) + (5 \times a \times t)$$

$$= (5 \times a \times t_s) + (5 \times a \times t) = 5a\,(t_s + t)$$

Jadi, luas permukaan prisma segi lima diberikan sebagai berikut.

Luas permukaan = $5a\,(t_s + t)$

Contoh:

Diketahui prisma tegak $ABC.DEF$ dengan ABC merupakan segitiga siku-siku, siku-siku di A, dengan AB = 3 cm, AC = 4 cm, dan BC = 5 cm. Jika tinggi prisma 4 cm, hitunglah luas permukaan prisma.

Penyelesaian:

Luas permukaan $= 2 \times La + K \times t$

$$= 2\left(\frac{1}{2} \times AB \times AC\right) + (AB + BC + AC) \times t$$

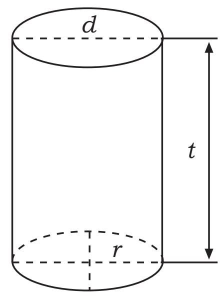
$$= 2\left(\frac{1}{2} \times 3 \times 4\right) + (3 + 4 + 5) \times 4$$

$$= 2(6) + (12) \times 4$$

$$= 12 + 48 = 60$$

Jadi, luas permukaan prisma adalah 60 cm^2.

D. Tabung



Tabung adalah bangun ruang yang terdiri atas dua buah lingkaran sebagai sisi alas dan sisi tutup serta satu persegi panjang sebagai sisi lengkung. Mencari luas permukaan tabung ekuivalen dengan mencari luas ketiga sisi tersebut yang dirumuskan dengan:

Luas permukaan = (2 × luas lingkaran) + luas persegi panjang

$= (2 \times \pi \times r \times r) + (p \times l)$

$= 2\pi\,(r^2 + (r \times t))$

Jadi, luas permukaan tabung dirumuskan sebagai berikut.

$$\text{Luas permukaan} = 2\pi\,(r^2 + (r \times t))$$

Contoh:

Diketahui jari-jari tabung adalah 14 cm dan tingginya 1 m. Hitunglah luas permukaan tabung.

Penyelesaian:

Diketahui: $r = 14$ cm; $t = 1$ m $= 100$ cm

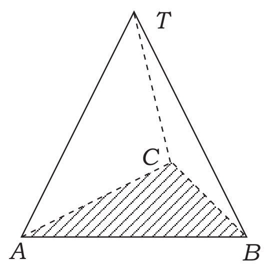
Luas permukaan tabung $= 2\pi r\,(r + t)$

$= 2 \times \dfrac{22}{7} \times 14\,(14 + 100)$

$= 88 \times 114 = 10.032$

Jadi, luas permukaan tabung 10.032 cm^2.

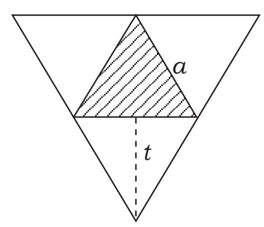
E. Limas



Perhatikan gambar di samping! Luas permukaan bangun ruang limas sama dengan mencari luas alas segi-n dijumlah luas sisi tegak berbentuk segitiga sama kaki yang banyaknya n.

1. Limas Segitiga

Bangun ruang limas segitiga terdiri atas empat buah sisi yang berbentuk segitiga. Daerah yang diarsir ABC merupakan sisi alas dari limas segitiga.



Luas permukaan limas dirumuskan dengan:

Luas empat segitiga $= 4 \times$ luas segitiga

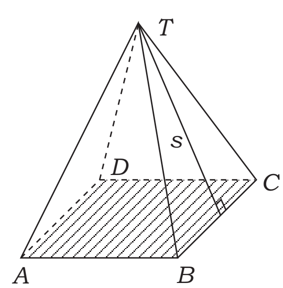
$= 4 \times \dfrac{1}{2} \times a \times t$

$= 2 \times a \times t$

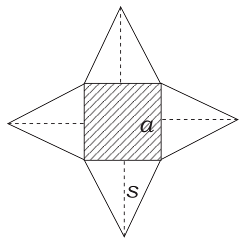
Jadi, luas permukaan limas segitiga dirumuskan sebagai berikut.

$$\text{Luas permukaan} = 2 \times a \times t$$

2. Limas Segi Empat



Bangun ruang limas segi empat terdiri atas sisi alas berbentuk segi empat $ABCD$ (baik persegi atau persegi panjang) dan empat buah segitiga adalah a dan tinggi segitiga adalah s ($s = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + t^2}$).



Luas permukaan segi empat dirumuskan sebagai berikut.

Luas alas = $a \times a$

Luas sisi tegak: $Ls = \frac{1}{2} \times a \times s$

Luas permukaan = luas alas + luas sisi tegak

$= (a \times a) + (4 \times Ls)$

$= a^2 + (4 \times \frac{1}{2} \times a \times s)$

$= a^2 + 2a \times s$

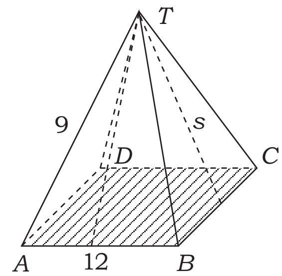
Jadi, luas permukaan limas segi empat diberikan sebagai berikut.

$$\text{Luas permukaan} = a^2 \times 2as$$

Contoh:

Diketahui limas segi empat beraturan *T.ABCD* dengan panjang rusuk $AB = 12$ cm, dan panjang rusuk sisi $TA = 9$ cm, berapa luas permukaannya?

Penyelesaian:



Misalnya s = tinggi segitiga tegak

$s = \sqrt{9^2 - 6^2}$

$= \sqrt{81 - 36}$

$= \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

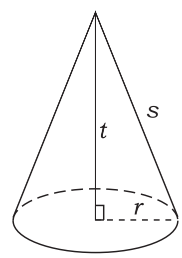
Luas permukaan $= AB(AB + 2t)$

$= 12(12 + 2 \times 3\sqrt{5})$

$= (144 + 72\sqrt{5})$

Jadi, luas permukaan limas *T.ABCD* adalah $(144 + 72\sqrt{5})$ cm^2.

F. Kerucut



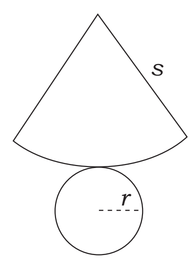
Perhatikan gambar di samping! Kerucut di samping memiliki unsur-unsur sebagai berikut.

Y = titik puncak kerucut

t = tinggi kerucut

r = jari-jari alas kerucut

s = apotema (sisi miring segitiga *POA*) kerucut



Apabila dibentangkan, kerucut memiliki jaring-jaring seperti gambar di samping. Luas permukaan kerucut dihitung dengan menjumlahkan luas selimut dan luas alas kerucut.

Luas permukaan = luas selimut + luas alas

$= (\pi \times r \times s) + (\pi \times r \times r)$

$= \pi \times r\,(s + r)$

Jadi, luas permukaan kerucut dirumuskan sebagai berikut.

$$\text{Luas permukaan} = \pi r\,(s + r)$$

Contoh:

Sebuah kerucut mempunyai diameter 12 cm dan tingginya 8 cm, tentukanlah luas permukaan kerucut tersebut!

Penyelesaian:

Hubungan apotema, jari-jari alas, dan tinggi kerucut adalah:

$s^2 = t^2 + r^2$

$= 8^2 + 6^2$

$= 64 + 36$

$= 100$

nilai s = 10 cm

Diperoleh luas permukaan $= \pi \times r(s + r)$

$= (3{,}14)(6)(10 + 6)$

$= 301{,}44$

Jadi, luas permukaan kerucut 301,44 cm^2.

G. Bola

Sebuah bola mempunyai jari-jari r maka luas permukaan bola adalah:

Luas permukaan = $4\pi r^2$ (dalam dimensi r)
Luas permukaan = πd^2 (dalam dimensi d)

Contoh:

Diketahui sebuah kubus *ABCD.EFGH* dengan panjang rusuk 7 cm. Di dalam kubus itu dibuat bola, dengan titik pusat sama dengan titik pusat kubus dan bagian luar bola menyinggung bidang-bidang sisi kubus. Tentukan luas permukaan bola dalam kubus!

Penyelesaian:

Jari-jari bola dalam $= \frac{1}{2}$ panjang rusuk

$= \frac{7}{2}$

Luas permukaan bola $= 4\pi r^2$

$= 4\,\frac{22}{7}\left(\frac{7}{2}\right)^2$

$= 154$

Jadi, luas permukaan bola dalam kubus adalah 154 cm^2.

Tugas Kelompok

Buatlah kelompok dengan anggota 4 orang. Bersama dengan kelompok kalian, kunjungilah toko, *mini market*, atau *supermarket*. Catatlah produk-produk dengan kemasan berbentuk bola, kubus, balok, kerucut, prisma, limas, atau tabung.

Buat pula kesimpulan meliputi:

- bangun ruang yang paling banyak digunakan sebagai kemasan produk,
- bangun ruang yang paling sedikit digunakan sebagai kemasan produk.

Latihan 2

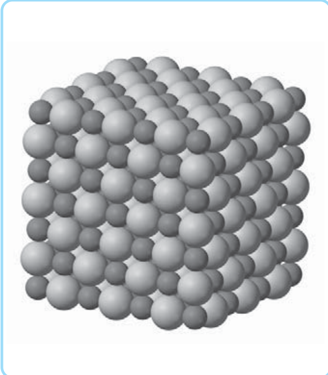
Kerjakan soal-soal berikut!

1. Perbandingan panjang, lebar, dan tinggi balok *ABCD.EFGH* sama dengan 3 : 2 : 1. Luas permukaan balok itu sama dengan 88 cm^2. Hitunglah panjang, lebar, dan tinggi balok!
2. Sebuah prisma tegak alasnya berbentuk persegi dengan panjang sisi 21 cm. Bila tinggi prisma tersebut 10 cm, tentukan luas permukaan prisma!
3. Suatu limas alasnya berbentuk persegi panjang sisi alas 16 cm. Bila tinggi limas tersebut 6 cm, hitunglah luas permukaan limas!
4. Sebuah tabung tanpa tutup terbuat dari seng dengan jari-jari alasnya 14 cm dan tingginya 15 cm. Jika $\pi = \frac{22}{7}$ hitunglah luas seng yang diperlukan untuk membuat tabung tersebut!
5. Sebuah kerucut berdiameter 10 cm dan tingginya 8 cm. Jika $\pi = 3{,}14$, hitunglah luas selimut kerucut!
6. Hitunglah luas permukaan bola jika diketahui jari-jari bola adalah 10 cm!
7. Alas sebuah limas berbentuk persegi, dengan panjang rusuk alas 12 cm. Jika tinggi limas 8 cm, hitunglah jumlah luas sisi tegaknya!
8. Dari suatu tabung diketahui tinggi dan jari-jari alasnya adalah masing-masing 7 cm dan 10 cm. Hitunglah luas selimut dan luas tabung!
9. Diketahui limas segi empat T.*ABCD* dengan $TA \perp AB$, $TA \perp AD$, dan $TA \perp AC$. Panjang $AB = AC = 10$ cm dan $TA = 24$ cm. Hitunglah luas permukaan limas!
10. Suatu limas *T.ABCD* yang alasnya berbentuk persegi panjang dengan $AB = 8$ cm dan $AD = 6$ cm, rusuk tegak limas sama panjang yaitu $TA = TB = TC = TD = 13$ cm, hitunglah tinggi dan luas permukaan limas!

Kegiatan Belajar 3

Volume Bangun Ruang

Pada beranda kegiatan belajar 2 kita telah mengenal bangun-bangun ruang platonik. Para ilmuwan sains sudah menemukan bahwa bangun-bangun ruang platonik sangatlah penting. Artinya dalam susunan atom-atom. Semua zat terdiri atas atom-atom yang membentuk molekul. Sebagai contoh struktur kristal garam seperti gambar di samping. Suatu kristal garam terdiri atas atom-atom sodium dan klorin yang saling terikat dalam struktur suatu kubus. Jika bangun datar pada dimensi dua selalu dapat kita hitung luasnya, demikian pula bangun-bangun pada dimensi tiga dapat kita hitung volumenya. Rumus mencari volume bangun beraturan akan kita pelajari pada uraian berikut.

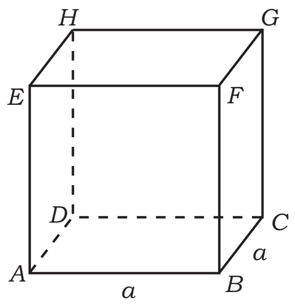


Sumber: *www.wikipedia.com*

Struktur atom garam

Uraian Materi

A. Kubus

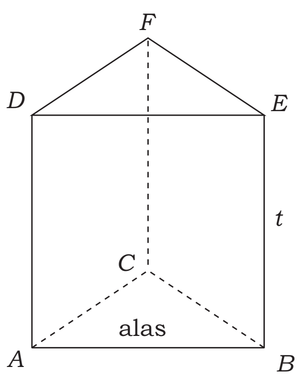


Volume kubus dirumuskan sebagai berikut.

$$V = a \times a \times a = a^3$$

V = volume kubus
a = panjang rusuk kubus

B. Prisma (Tegak)

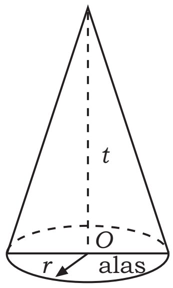


Volume prisma dirumuskan sebagai berikut.

$$V = L_a \times t$$

V = volume prisma
L_a = Luas alas
t = tinggi prisma

C. Kerucut

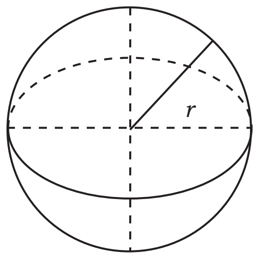


Volume kerucut dirumuskan sebagai berikut.

$$V = \frac{1}{3} L_a \times t$$

V = volume kerucut
L_a = luas alas
t = tinggi kerucut

D. Bola



Volume bola dirumuskan sebagai berikut.

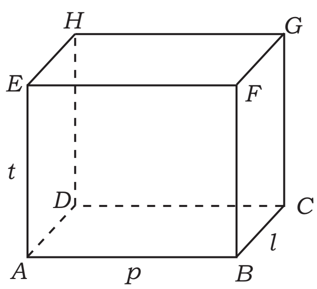
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ atau } \frac{1}{6}\pi d^3$$

Volume tembereng bola

$$V = \frac{1}{3}\pi t^2(3r - t)$$

r = jari-jari bola
d = $2r$ = diameter bola
t = tinggi tembereng

E. Balok

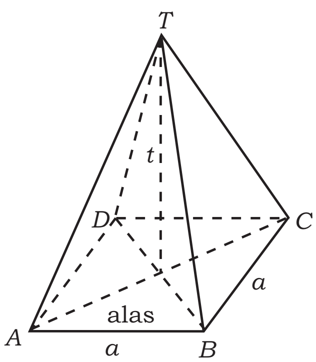


Volume balok dirumuskan sebagai berikut.

$$V = p \times l \times t$$

V = volume balok
p = panjang balok
l = lebar balok
t = tinggi balok

F. Limas Beraturan

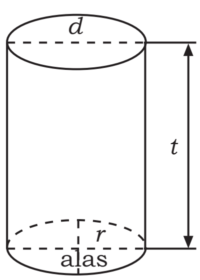


Volume limas beraturan dirumuskan sebagai berikut.

$$V = \frac{1}{3} \times L_a \times t$$

V = volume limas
L_a = luas alas, $a \times a$
t = tinggi limas

G. Tabung



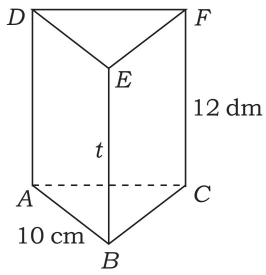
Volume tabung dirumuskan sebagai berikut.

$$V = L_a \times t$$

V = volume tabung
L_a = luas alas, $\pi \times r \times r$
t = tinggi tabung

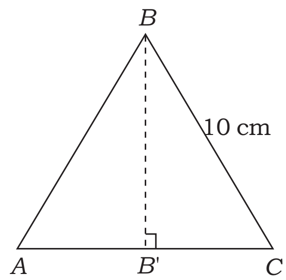
Contoh:

1. Diketahui prisma segitiga beraturan *ABC.DEF* mempunyai dimensi panjang *AB* = 10 cm dan tinggi prisma 12 dm. Hitunglah volume prisma tersebut!



Penyelesaian:

Dapat diambil kesimpulan bahwa alas berupa segitiga sama sisi *ABC*.
Maka luas alas:



Panjang $BB' = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

Luas alas $= \frac{1}{2} \times AC \times BB'$

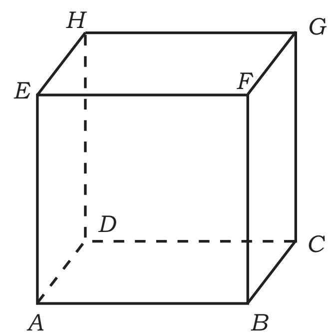
$= \frac{1}{2} \times 10 \times 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$

Volume prisma $= L_a \times t$

$= 25\sqrt{3} \times 120 = 3.000\sqrt{3}$

Jadi, volume prisma *ABC.DEF* $3.000\sqrt{3}$ cm^3.

2. Diketahui kubus *ABCD.EFGH* dengan panjang rusuk 6 cm. Hitunglah:
   a. volume limas *E.ABD*,
   b. volume limas *E.ABCD*.



Penyelesaian:

a. Luas bidang alas $ABD = L_1 = \frac{1}{2} \times AB \times AD$

$= \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$ cm^2

Tinggi limas *AE* = 6 cm (panjang rusuk kubus)

V limas $= \frac{1}{3} \times L_1 \times t$

$= \frac{1}{3} \times 18 \times 6 = 36$

Jadi, volume limas *E.ABD* adalah 36 cm^3.

b. Luas bidang alas $ABCD = L_2 = AB \times AD = 6 \times 6 = 36$ cm^2

Tinggi limas *E.ABCD* = *AE* = 6 cm

V limas *E.ABCD* $= \frac{1}{3} \times L_2 \times t$

$= \frac{1}{3} \times 36 \times 6 = 72$

Jadi, volume limas *E.ABCD* adalah 72 cm^3.

3. Sebuah kerucut mempunyai diameter 12 cm dan tingginya 8 cm, tentukanlah volume kerucut tersebut!

Penyelesaian:

Diketahui: $r = \frac{1}{2} d = \frac{1}{2} 12 = 6$ cm

$t = 8$ cm

$$V = \frac{1}{3}\ \pi\, r^2 t$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 6^2 \cdot 8 = 301{,}44$$

Jadi, volume kerucut adalah 301,44 cm^3.

4. Diketahui sebuah kubus *ABCD.EFGH* dengan panjang rusuk 7 cm. Di dalam kubus itu dibuat bola, dengan titik pusat sama dengan titik pusat kubus dan bagian luar bola menyinggung bidang-bidang sisi kubus. Tentukan volume bola dalam kubus itu!

   Penyelesaian:

   Panjang rusuk = 7 cm maka diameter = 7 cm, dan jari-jarinya = $\frac{7}{2}$ cm.

   $$\text{Volume bola} = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$$

   $$= \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{22}{7}\right) \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^3$$

   $$= 179{,}67$$

   Jadi, volume bola dalam kubus adalah 179,67 cm^3.

Info

Sumber: *www.edu-math.co.id*

Girard Desargues

Matematikawan Prancis yang bernama Girard Desargues (1591–1661) adalah salah satu orang pertama yang memperlihatkan secara geometris bagaimana benda-benda seharusnya digambarkan agar tampak berdimensi tiga. Aspek ini dipakai dalam seni yang disebut perspektif.

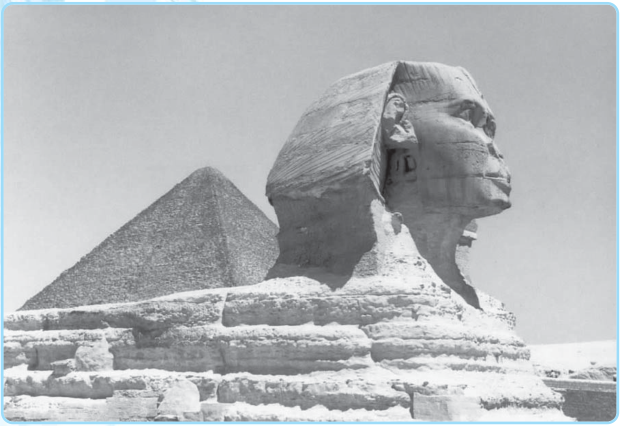
Latihan 3

Kerjakan soal-soal berikut!

1. Prisma tegak alasnya berbentuk segitiga siku-siku dengan panjang rusuk-rusuk alasnya 3 cm, 4 cm, dan 5 cm. Jika tinggi prisma itu 10 cm, berapakah volume prisma tersebut?
2. Jumlah luas semua sisi sebuah kubus 600 cm^2. Berapakah volume kubus tersebut?
3. Sebuah tangki berbentuk tabung berisi 720 liter air. Jika tinggi air dalam tangki 70 dm, berapakah jari-jari tangki tersebut?
4. Diketahui limas segi empat beraturan *T.ABCD* dengan panjang $TA = AB =$ 100 cm. Berapa literkah volume limas tersebut?
5. Volume limas segi empat beraturan adalah 300 liter dan tinggi limas adalah 3 dm. Tentukanlah panjang rusuk-rusuk limas tersebut!
6. Keliling alas kerucut adalah 16π dm dan apotemanya 10 dm. Berapa literkah volume kerucut itu?
7. Diketahui prisma tegak segitiga $ABC{\cdot}DEF$ dengan sisi *ABC* siku-siku di *A*. Panjang AB = 12 cm dan AC = 9 cm. Bila panjang rusuk tegak $AD = 2{\cdot}BC$ maka hitunglah volume prisma tersebut!
8. Suatu balok mempunyai panjang 14 dm dan lebar 50 cm. Jika luas permukaan balok adalah 302 dm^2, tentukan unsur-unsur balok berikut!
   a. tinggi balok
   b. volume balok
9. Volume sebuah kerucut 100π cm^3 dan tingginya 12 cm. Berapakah panjang jari-jari lingkaran alas kerucut tersebut? (jika $\pi = 3{,}14$)
10. Diketahui sebuah kubus dengan luas permukaan sama dengan 96 cm^2. Hitunglah volume kubus itu!

Kegiatan Belajar 4

Hubungan antara Unsur-Unsur dalam Bangun Ruang



Sumber: *www.egyptian.org*

Piramida besar Khufu

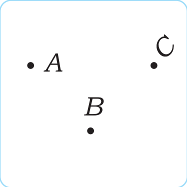
Tiga jenis bangun ruang yang paling mendasar adalah kubus, piramida, dan bola. Teori dan pemahaman mengenai ketiga bangun ini sangat penting dalam bidang sains dan teknik. Sebagai contoh pembangunan piramida oleh bangsa Mesir Kuno. Peninggalan terbesar pada masa itu adalah Piramida Besar Khufu di Gizeh yang memiliki rusuk alas berukuran 230 m (760 kaki) dan tinggi 146 m (480 kaki). Keempat sisi pada piramida memiliki posisi miring dengan satu titik puncak sebagai titik potongnya. Kata "sisi", "bangun", "bidang", "rusuk", "alas", dan "titik" satu dengan yang lainnya saling berhubungan. Untuk mengetahui hubungan-hubungan tersebut terlebih dahulu kita pelajari uraian berikut.

Uraian Materi

A. Pengertian Titik, Garis, dan Bidang

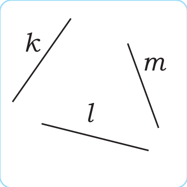
1. Titik

Sebuah titik hanya dapat ditentukan oleh letaknya, tetapi tidak mempunyai ukuran (tidak berdimensi). Sebuah titik digambarkan dengan sebuah noktah, kemudian dibubuhi nama dengan huruf kapital (*A*, *B*, *C*, dan seterusnya).



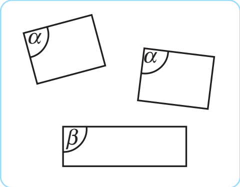
2. Garis

Garis hanya mempunyai panjang saja, tidak mempunyai ukuran lebar. Nama garis ditentukan dengan menyebutkan nama dengan huruf kecil atau dengan menyebutkan segmen garis dari titik pangkal dan titik ujung. Sebagai contoh *k*, *l*, *m*.



3. Bidang

Sebuah bidang mempunyai ukuran panjang dan lebar. Nama bidang diambil berdasarkan huruf kapital di titik-titik sudutnya atau huruf Yunani misalnya α, β, δ.



Info

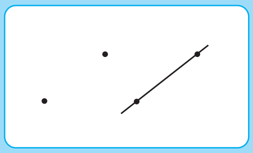
Sumber: *www.egyptian.org*

Euclid

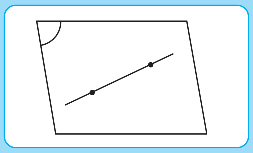
Titik-titik, garis-garis, sudut-sudut, dan bidang dijadikan sebagai dasar dari bentuk-bentuk geometris. Pembahasan mengenai geometri pertama kali dikenalkan oleh Euclid.

B. Aksioma Garis dan Bidang

Di dalam teori dimensi tiga, terdapat aksioma (ketetapan umum) yang berlaku sebagai berikut.



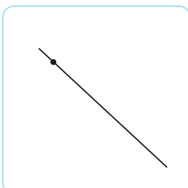
Aksioma 1
Melalui dua buah titik sembarang hanya dapat dibuat sebuah garis lurus.



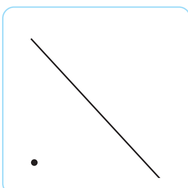
Aksioma 2
Jika sebuah garis dan sebuah bidang mempunyai dua titik persekutuan maka garis itu seluruhnya terletak pada bidang.

C. Kedudukan Titik Terhadap Garis dan Titik Terhadap Bidang

1. Kedudukan Titik Terhadap Garis

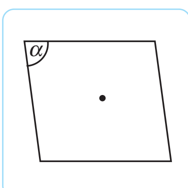
a. 

Titik terletak pada garis.
Jika sebuah titik dilalui garis maka titik itu terletak pada garis.

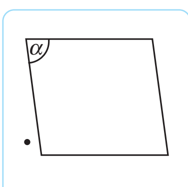
b. 

Titik di luar garis.
Jika sebuah titik tidak dilalui garis maka titik itu terletak di luar garis.

2. Kedudukan Titik terhadap Bidang

a. 

Titik terletak pada bidang.
Jika sebuah titik dapat dilalui suatu bidang maka titik terletak pada bidang tersebut.

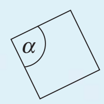
b. 

Titik di luar bidang.
Jika sebuah titik tidak dapat dilalui suatu bidang maka titik itu terletak di luar bidang.

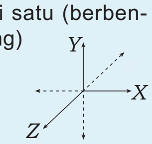
Intisari

Dimensi di dalam geometri antara lain:
- Dimensi satu (berbentuk garis)

- Dimensi dua (berbentuk bidang)



- Dimensi satu (berbentuk ruang)



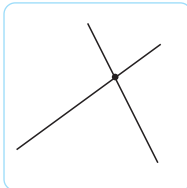
Dimensi selanjutnya dipelajari pada pembahasan geometri topologi untuk tingkat lebih lanjut.

D. Kedudukan Garis Terhadap Garis dan Bidang

1. Kedudukan Garis Terhadap Garis

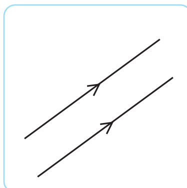
Kedudukan garis terhadap garis yang lain dalam sebuah bangun adalah berpotongan, sejajar, atau bersilangan.

Dua garis berpotongan:



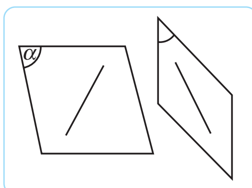
Dua buah garis dikatakan berpotongan jika keduanya terletak pada sebuah bidang dan mempunyai satu titik persekutuan.

Dua buah garis sejajar:



Dua buah garis dikatakan sejajar jika keduanya terletak pada sebuah bidang dan tidak mempunyai satu pun titik persekutuan.

Dua garis saling bersilangan:

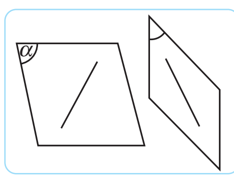


Dua buah garis dikatakan bersilangan (tidak berpotongan dan tidak sejajar), jika kedua garis itu tidak terletak pada sebuah bidang.

2. Perpotongan Garis dengan Bidang

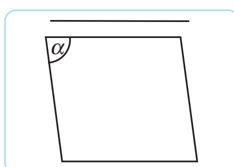
Jika ada sebuah garis dan sebuah bidang maka akan diperoleh 3 kemungkinan sebagai berikut.

a.



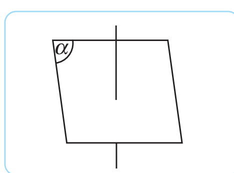
Garis terletak pada bidang, jika semua titik pada garis itu terletak pada bidang tersebut.

b.



Garis sejajar bidang, jika antara garis dan bidang tidak mempunyai satu pun titik persekutuan.

c.

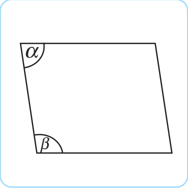


Garis memotong bidang, jika antara garis dan bidang hanya mempunyai satu titik perpotongan.

E. Kedudukan Bidang Terhadap Bidang yang Lain

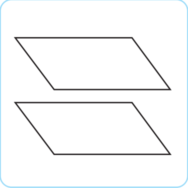
Kedudukan bidang terhadap bidang lain ada tiga kemungkinan, yaitu berimpit, sejajar, dan berpotongan.

Dua bidang berimpit:



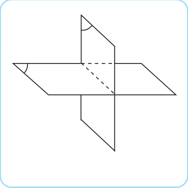
Dua bidang saling berimpit jika setiap titik yang terletak pada bidang yang satu juga terletak pada bidang yang lain.

Dua bidang sejajar:



Dua bidang saling sejajar jika kedua bidang itu tidak mempunyai satu pun titik persekutuan.

Dua saling berpotongan:

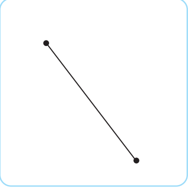


Dua bidang dikatakan berpotongan jika kedua bidang itu mempunyai titik persekutuan.

F. Jarak Titik ke Titik, Titik ke Garis, Titik ke Bidang

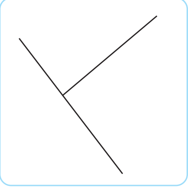
Kedudukan titik terhadap titik yang lain, garis, dan bidang ada tiga kemungkinan sebagai berikut.

1. Jarak Titik ke Titik



Jarak titik ke titik dalam suatu ruang dengan cara menghubungkan titik itu ke titik yang lain sehingga terjadi sebuah garis. Jarak kedua titik ditentukan oleh panjang garis itu.

2. Jarak Titik ke Garis



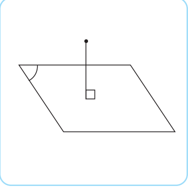
Jarak titik ke garis adalah jarak terpendek antara titik dan garis.

Jarak antara titik dan garis dapat dengan menggunakan langkah-langkah sebagai berikut.

i. Membuat garis dari titik A ke garis g, memotong garis di titik P sehingga terjadi garis AP yang tegak lurus garis g.

ii. Jarak titik ke garis adalah panjang dari AP.

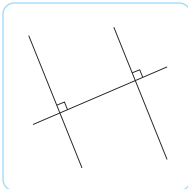
3. Jarak Titik ke Bidang



Jarak suatu titik ke suatu bidang adalah jarak dari titik tersebut ke proyeksinya pada bidang tersebut.

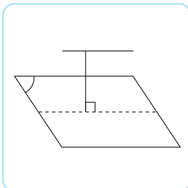
G. Jarak Garis ke Garis, Garis ke Bidang

1. Jarak Garis ke Garis



Adalah jarak terpendek antara dua garis itu, atau panjang garis yang memotong tegak lurus kedua garis itu.

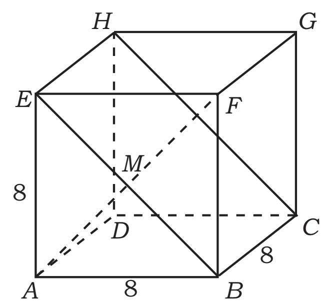
2. Jarak Garis ke Bidang



Jarak garis ke bidang adalah panjang garis proyeksi garis pada bidang.

Contoh:

Diketahui sebuah kubus dengan panjang rusuk 8 cm, titik P pertengahan rusuk $\overline{CG}$, hitunglah:



a. jarak titik A ke titik B,
b. jarak titik A ke titik C,
c. jarak titik A ke titik D,
d. jarak titik A ke titik G,
e. jarak titik A ke garis BC,
f. jarak titik C ke garis FH, dan
g. jarak titik P ke garis BD.

Penyelesaian:

a. Jarak titik A ke titik B = panjang garis AB = 8 cm.

b. Jarak titik A ke titik C = panjang diagonal $AC = 8\sqrt{2}$ cm.

c. Jarak titik A ke titik D = panjang garis AD = 8 cm.

d. Jarak titik A ke titik G = panjang garis $\overline{AG}$.

$$AG = \sqrt{AC^2 + CG^2} = \sqrt{(8\sqrt{2})^2 + 8^2} = \sqrt{128 + 64} = \sqrt{192} = 8\sqrt{3} \text{ cm}$$

e. Jarak titik A ke garis BC = panjang garis AB = 8 cm.

f. Jarak titik C ke garis FH = CO, di mana titik O adalah titik pertengahan FH.

Perhatikan ΔCOF, $CF = 8\sqrt{2}$ cm, $OF = 4\sqrt{2}$ cm. Maka:

$$CO = \sqrt{CF^2 - OF^2} = \sqrt{(8\sqrt{2})^2 - (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{128 - 32} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6} \text{ cm}$$

g. Jarak titik P ke garis BD adalah PR, dengan R titik di tengah garis BD.

Perhatikan ΔRCP siku-siku di C, $RC = 4\sqrt{2}$ cm, dan PC = 4 cm.

$$PR = \sqrt{RC^2 + PC^2} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + 4^2} = \sqrt{32 + 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

H. Sudut Antara Garis dan Bidang

Sudut antara garis dan bidang adalah sudut yang terbentuk antara garis tersebut dengan proyeksi garis pada bidang tersebut.

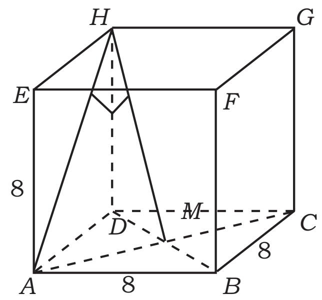
Contoh:

Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk 4 cm, tentukan besar sudut antara garis AH dengan bidang $BFHD$.

Perhatikan garis AH, diproyeksikan ke bidang $BFHD$ maka titik A jatuh di M. Besar sudut yang terbentuk adalah sudut AHM.

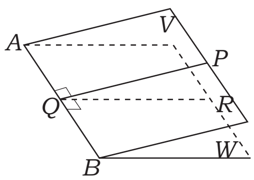
$AM = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$. Perhatikan segitiga AHM siku-siku di M maka berlaku:

$\sin \angle AHM = \frac{AM}{AH} = \frac{4\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ maka sudut $AHM = 30°$



I. Sudut antara Dua Bidang

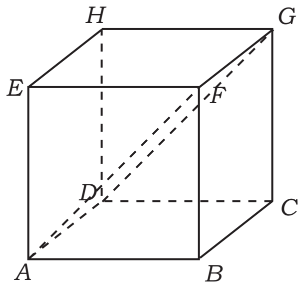
Sudut antara dua bidang yang berpotongan pada garis AB adalah sudut antara dua garis yang terletak bidang yang masing-masing tegak lurus pada AB dan berpotongan pada satu titik. Bidang V dan W berpotongan pada garis AB. Diperoleh: $PQ \perp AB$ dan $RQ \perp AB$.



$\angle PQR$ adalah sudut yang terbentuk antara bidang V dan bidang W.

Contoh:

Diketahui kubus $ABCD.EFGH$. Tentukan besar sudut antara bidang $ABCD$ dengan bidang $ADGF$!



Penyelesaian:

AF dan AB berpotongan di A

AF pada bidang $ADGF$ dan $\perp AD$

AB pada bidang $ABCD$ dan $\perp AD$

Maka sudut yang dibentuk antara bidang $ABCD$ dan bidang $ADGF$ adalah $FAB = \frac{1}{2} \times$ sudut siku-siku

$= \frac{1}{2} \times 90°$

$= 45°$

Latihan 4

Kerjakan soal-soal berikut!

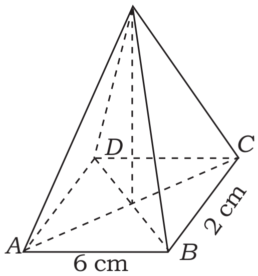
1. Diketahui panjang rusuk kubus $ABCD.EFGH$ adalah 12 cm. P di tengah-tengah BC. Hitunglah jarak:
   a. titik C ke $BFHD$,
   b. titik P ke $BFHD$.
2. Diketahui limas segi empat beraturan $T.ABCD$ dengan rusuk alas 13 cm, tinggi limas 10 cm. P di tengah-tengah TC. Hitunglah jarak P ke bidang alas!
3. Limas tegak $T.ABCD$ dengan alas berbentuk persegi panjang. Jika panjang AB = 8 cm, BC = 6 cm, dan $TA = TB = TC = TD$ = 13 cm, hitunglah besar sudut antara TA dan bidang alas!
4. Diketahui sebuah kerucut lingkaran tegak tingginya 6 cm dan diameter alas 6 dm. Tentukan besar sudut antara apotema kerucut dengan bidang alas!
5. Diketahui sebuah balok $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk-rusuk AB = 5 cm, BC = 4 cm, AE = 3 cm. Hitunglah jarak unsur-unsur:
   a. antara AE dengan bidang $BCGF$,
   b. antara $ABCD$ dan $EFGH$.

Rangkuman

1. Luas sisi (permukaan) untuk kubus, balok, prisma, tabung, limas, kerucut, dan bola sebagai berikut.
   a. Luas permukaan kubus $L = 6 \cdot a^2$
   b. Luas permukaan balok $L = 2(p \cdot \ell + p \cdot t + \ell \cdot t)$
   c. Luas permukaan prisma $L = 2 \cdot La + K \times t$
      dimana La = luas alas
      K = keliling alas
      t = tinggi prisma
   d. Luas permukaan tabung $L = 2\pi \cdot r(r + t)$.
   e. Luas permukaan limas segi empat beraturan $L = 2at + a^2$
      $L = a(2t + a)$
      dimana a = panjang rusuk alas
      t = tinggi sisi tegak
   f. Luas permukaan kerucut $L = \pi r^2 + \pi rs$
      $L = \pi r(r + s)$
   g. Luas permukaan bola $L = 4\pi r^2$ (r = jari-jari bola)
      $L = \pi d^2$ ($d = 2r$ = diameter bola)
2. Volume kubus : $V = a \times a \times a = a^3$
3. Volume balok : $V = p \times 1 \times t$
4. Volume prisma tegak: $V = La \times t$
5. Volume tabung : $V = La \times t$ alas berupa lingkaran
   $La = \pi r^2$ (dimensi jari-jari)
   $La = \frac{1}{4}\pi d^2$ (dimensi diameter)
6. Volume limas $V = \frac{1}{3} La \times t$
7. Volume kerucut $V = \frac{1}{3} La \times t$, alas berupa lingkaran
   $La = \pi r^2$ (dimensi jari-jari)
   $La = \frac{1}{4}\pi d^2$ (dimensi diameter)
8. Volume bola $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
9. Jarak suatu titik ke suatu bidang adalah jarak terpendek dari titik tersebut ke proyeksinya pada bidang.
10. Sudut antara garis dan bidang adalah sudut antara garis tersebut dengan proyeksi garis pada bidang.
11. Sudut antara dua garis yang terletak pada bidang yang masing-masing tegak lurus pada sebuah garis dan berpotongan pada satu titik.

Evaluasi Kompetensi

A. ***Pilihlah jawaban yang tepat!***

1. 

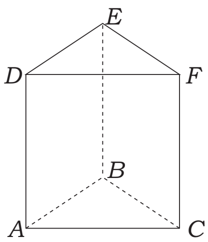
Suatu limas beraturan *T.ABCD* di samping memiliki tinggi *TP* = 4 cm. Luas permukaan limas adalah . . . cm^2.

a. $(22 - 6\sqrt{17})$
b. $(17 - 3\sqrt{17})$
c. $(17 + 6\sqrt{17})$
d. $(22 + 3\sqrt{17})$
e. $(22 + 6\sqrt{17})$

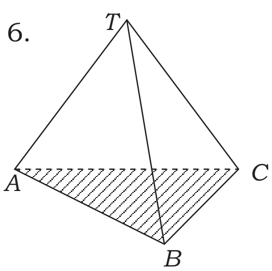
2. Luas permukaan kerucut yang diameter alasnya 14 cm dan tingginya 24 cm adalah . . . .
a. 570 cm^2
b. 572 cm^2
c. 594 cm^2
d. 682 cm^2
e. 704 cm^2

3. Luas bahan yang diperlukan untuk membuat pipa saluran udara dari plat seng berdiameter 42 cm dan panjang 2 meter adalah . . . .
a. 0,132 cm^2
b. 0,264 cm^2
c. 1,32 cm^2
d. 2,64 cm^2
e. 5,28 cm^2

4. Sebuah limas beraturan dengan alas berbentuk persegi panjang, panjang alas = 16 cm, lebar alas = 12 cm, panjang rusuk tegak = 26 cm. Volume limas tersebut adalah . . . .
a. 1.248 cm^3
b. 1.536 cm^3
c. 1.664 cm^3
d. 2.304 cm^3
e. 2.496 cm^3

5. 

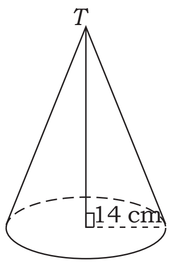
Diketahui prisma *ABC.DEF*, *AB* = 8 cm, *AC* = 6 cm, dan *AB* = *AC* dan volume prisma 240 cm^3. Tinggi prisma tersebut adalah . . . .
a. 5 cm
b. 10 cm
c. 15 cm
d. 20 cm
e. 30 cm

6. 

Limas segitiga beraturan *T.PQR* dengan dimensi tinggi limas 12 cm. Jika volume limas tersebut $100\sqrt{3}$ cm^3 maka panjang rusuk alasnya . . . .
a. 6 cm
b. 7 cm
c. 8 cm
d. 9 cm
e. 10 cm

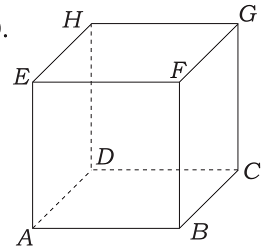
7. Volume sebuah kerucut yang berdiameter 21 cm adalah 1.155 cm^3, tinggi kerucut adalah . . . .
a. 6 cm
b. 8 cm
c. 10 cm
d. 11 cm
e. 12 cm

8. Volume sebuah bola yang jari-jarinya 10 cm adalah . . . .
a. 2.364,3 cm^3
b. 3.872,6 cm^3
c. 4.186,7 cm^3
d. 5.544,7 cm^3
e. 6.217,6 cm^3

9. 

Volume sebuah kerucut yang berjari-jari 14 cm adalah 7.392 cm^3. Tinggi kerucut adalah . . . .

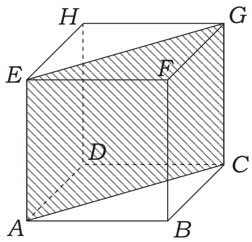
a. 10 cm
b. 11 cm
c. 12 cm
d. 13 cm
e. 14 cm

10. 

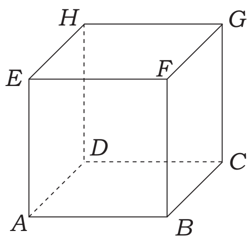
Pada kubus *ABCD.EFGH* kedudukan bidang *ABGH* dengan bidang *DCFE* adalah . . . .

a. berpotongan di satu titik
b. berimpit
c. sejajar
d. tegak lurus
e. berpotongan pada satu garis

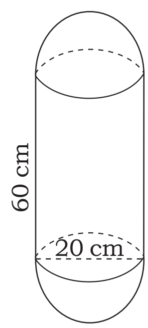
B. *Kerjakan soal-soal berikut!*

1. 

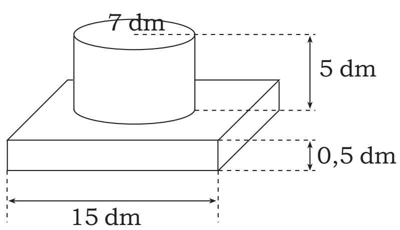
Perhatikan gambar di samping! Apabila luas daerah yang diarsir adalah $36\sqrt{2}$ cm^2, tentukan luas permukaan kubus!

2. 

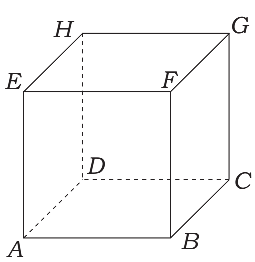
Pada balok di samping, diketahui perbandingan *BF* : *FC* : *AF* = 3 : 4 : 5. Jika diketahui luas selimut balok 376 dm^2, tentukan volume balok!

3. 

Perhatikan gambar di samping! Tentukan luas permukaan bangun di samping!

4. 

Sebuah tempat dudukan tiang bendera dirancang seperti gambar di samping. Tentukan volume tempat dudukan tiang bendera tersebut!

5. 

Hitunglah jarak dari unsur-unsur berikut!

a. titik *A* ke titik *C*
b. titik *B* ke garis *DH*
c. titik *A* ke titik *G*
d. ruas segitiga *ACH*
e. jarak titik *F* ke bidang *ABCD*
f. jarak bidang *BCGF* ke bidang *BCHE*
g. jarak titik *G* ke garis *BH*

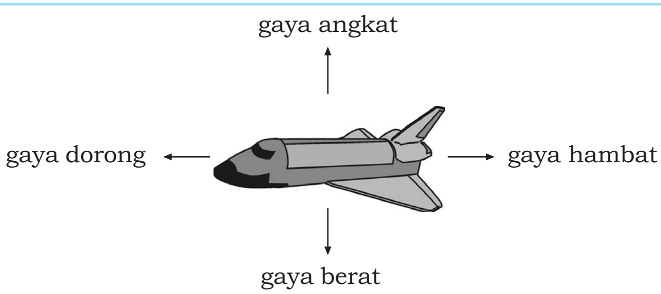
Bab VI Vektor

Sumber: *www.staralliance.com*

Pesawat Terbang

Terbayangkah kalian dengan teknologi pesawat terbang? Alat transportasi ini diciptakan dengan teknologi yang canggih. Salah satunya adalah saat merancang konstruksi pesawat terbang.

Konstruksi sebuah pesawat terbang telah dirancang sedemikian rupa sehingga ketika mengudara pesawat tetap berada dalam posisi stabil. Selain konstruksi yang memerlukan perhitungan mendetail, kapasitas muatan pesawat juga perlu dilakukan pembatasan. Hal ini bertujuan untuk menstabilkan kondisi pesawat sehingga berat yang harus ditumpu oleh pesawat dapat seimbang. Di dalam ilmu fisika, pada sebuah pesawat terbang yang sedang mengudara bekerja empat buah macam gaya dengan besar dan arah yang berbeda-beda. Diagram gaya yang bekerja pada pesawat digambarkan sebagai berikut.



Perhatikan keempat gaya yang bekerja pada pesawat tersebut. Gaya angkat memiliki arah ke atas, gaya hambat memiliki arah ke kanan (belakang), gaya dorong memiliki arah ke kiri (depan) dan gaya berat memiliki arah ke bawah. Tiap-tiap gaya memiliki besaran dalam sebuah satuan Newton. Besaran yang memiliki arah disebut vektor. Lebih lanjut mengenai vektor akan kita pelajari pada uraian bab berikut.

Kegiatan Belajar 1

Vektor pada Bidang Datar

Sumber: www.southpolestation.com

Salah satu kapal pengangkut minyak yang mengalami kebocoran

Sarana transportasi darat, laut, maupun udara masing-masing memiliki peluang yang sama untuk terjadinya kecelakaan. Apabila kecelakaan terjadi di tengah lautan lepas tentunya kapal yang mengalami kerusakan harus dibawa ke pelabuhan terdekat untuk segera diperbaiki. Untuk menarik kapal tersebut dibutuhkan dua buah kapal dengan dilengkapi kawat baja. Agar kapal dapat sampai ke pelabuhan yang dituju dan posisi kapal selama perjalanan tetap stabil, besar gaya yang dibutuhkan oleh masing-masing kapal penarik dan sudut yang dibentuk oleh kawat baja harus diperhitungkan dengan cermat. Dari kedua gaya dan sudut yang dibentuk oleh kapal penarik dapat kita hitung besarnya resultan gaya yang bekerja. Untuk menghitung resultan gaya terlebih dahulu kita pelajari uraian berikut.

Uraian Materi

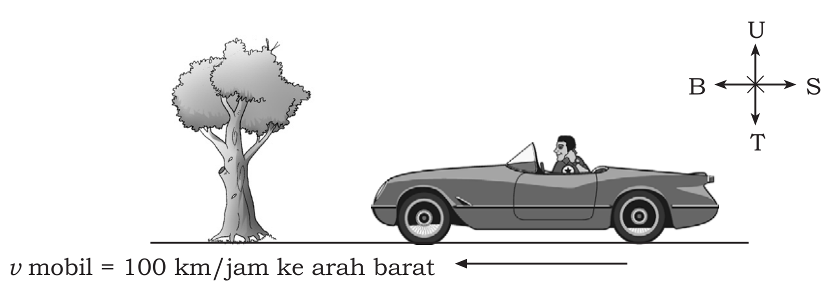
A. Vektor dan Notasinya

Apabila kita memindahkan atau menggeser sebuah benda (materi) yang berbentuk apa saja, maka perpindahan benda itu akan memenuhi dua unsur yaitu seberapa jauh kepindahannya dan ke arah mana benda itu berpindah. Kedua unsur yang memengaruhi perpindahan benda itu disebut sebagai besaran ***vektor***.

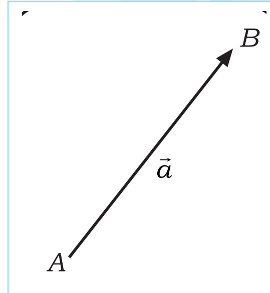
Jadi, **vektor** adalah besaran yang selain mempunyai nilai kuantitatif (besar) juga mempunyai arah, misalnya besaran kecepatan, gaya, dan momen. Secara grafis, vektor dilambangkan dengan arah panah.

Contoh:

Sebuah mobil melaju dengan kecepatan 100 km/jam ke arah barat. Peristiwa tersebut merupakan salah satu bentuk penggunaan vektor dalam kehidupan sehari-hari. Vektor yang digunakan mempunyai besar 100 km/jam dan melaju ke arah barat.



Secara geometris, vektor dapat disajikan dengan ruas garis berarah. Panjang ruas garis menyatakan besar vektor dan anak panah menyatakan arah vektor. Gambar di samping menunjukkan vektor $\overrightarrow{AB}$, dengan A adalah **titik pangkal** vektor $\overrightarrow{AB}$ dan B adalah **titik ujung** (terminal) dari vektor $\overrightarrow{AB}$. Vektor $\overrightarrow{AB}$ dapat ditulis sebagai vektor $\vec{a}$ (huruf kecil bergaris panah atas).



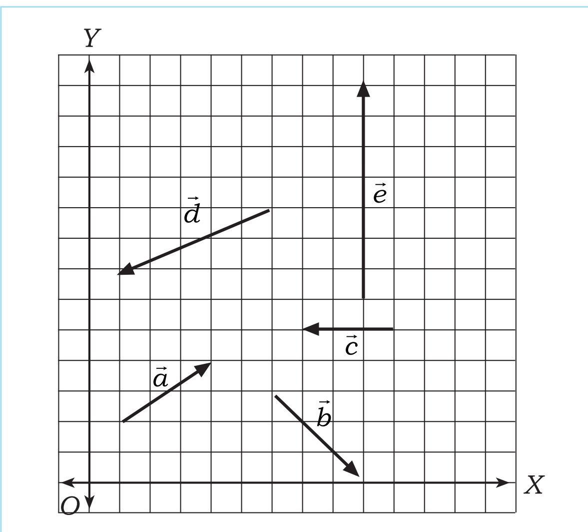
B. Vektor pada Bangun Datar R^2 (Ruang Dimensi Dua)

Vektor dimensi dua adalah vektor yang mempunyai dua unsur yaitu unsur vertikal (sumbu Y) dan horizontal (sumbu X). Vektor pada bidang datar (dimensi dua) ditandai dengan sumbu X dan sumbu Y, yang saling berpotongan di titik pusat O (0, 0). Secara analitis vektor dimensi dua dapat disajikan menurut unsur-unsurnya yaitu:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ atau } \vec{a} = (x, y)$$

Dengan x adalah unsur mendatar. Apabila $x > 0$ (positif) maka x mempunyai arah ke kanan dan apabila $x < 0$ (negatif) x mempunyai arah ke kiri. Selanjutnya y adalah unsur vertikal. Apabila $y > 0$ (positif) maka arahnya ke atas dan jika $y < 0$ (negatif) arahnya ke bawah.

Perhatikan beberapa contoh berikut.



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Info

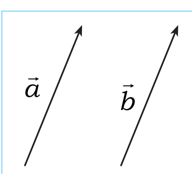
Sumber: *www.motograndprix.com*

Motor balap

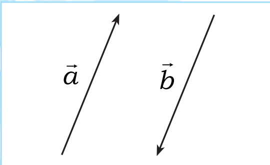
Contoh lain penggunaan vektor adalah pada transformasi, kecepatan, medan elektrik, momentum, tenaga, dan percepatan. Besaran vektor juga berlaku pada gaya gravitasi dengan arah ke pusat bumi sebagai arah positif.

C. Ruang Lingkup Vektor

1. Kesamaan Dua Vektor



Dua buah vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ dikatakan sama apabila keduanya mempunyai besar (panjang) dan arah yang sama. Perhatikan gambar di samping. Terlihat $\vec{\boldsymbol{a}}$ sejajar $\vec{\boldsymbol{b}}$ dan besarnya sama. Diperoleh $\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{b}}$.



Perlu Tahu

Vektor posisi $\vec{A} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pada dimensi 2 dapat dinyatakan dengan $\vec{A} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j}$

2. Vektor Negatif

Vektor negatif dari $\vec{a}$ adalah vektor yang besarnya sama dengan vektor $\vec{a}$, tetapi arahnya berlawanan dan ditulis $-\vec{a}$. Perhatikan gambar di samping. Vektor $\vec{a}$ sejajar dan sama panjang dengan vektor $\vec{b}$. Karena arah vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ saling berlawanan maka $\vec{a} = -\vec{b}$.

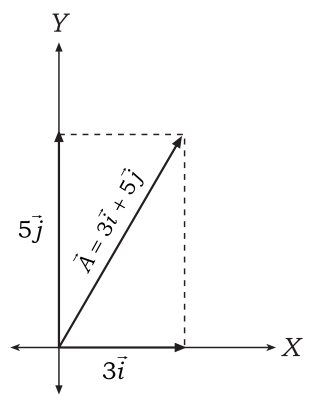
3. Vektor Nol

Vektor nol adalah vektor yang besar/panjangnya nol dan arahnya tak tentu. Pada sistem koordinat cartesius vektor nol digambarkan berupa titik. Di ruang dimensi dua vektor nol dilambangkan dengan $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. Vektor Posisi

Vektor posisi adalah vektor yang titik pangkalnya terletak pada pusat koordinat O (0,0) dan titik ujungnya berada pada koordinat lain. Vektor posisi pada R^2 dari titik A (x, y) dinyatakan sebagai kombinasi linear vektor satuan sebagai berikut.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j}$$



Penulisan vektor $\vec{i}$ dan $\vec{j}$ menyatakan vektor satuan pada sistem koordinat. Vektor satuan $\vec{i}$ adalah vektor yang searah dengan sumbu X positif dan besarnya 1 satuan. Vektor satuan $\vec{j}$ adalah vektor yang searah dengan sumbu Y dan besarnya 1 satuan.

Contoh:

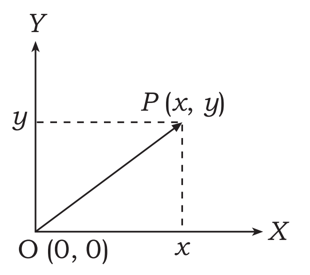
Nyatakan vektor $\vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ dalam bentuk kombinasi linear vektor satuan dan tentukan panjangnya!

Penyelesaian:

Kombinasi linear vektor $\vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ adalah $3\vec{i} + 5\vec{j}$.

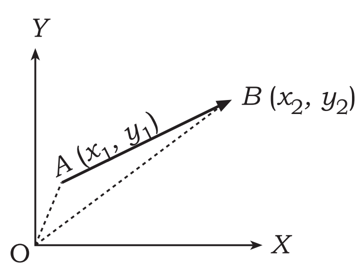
$$|A| = \sqrt{3^2 + 5^2}$$
$$= \sqrt{9 + 25}$$
$$= \sqrt{34}$$

Jadi, panjang vektor A adalah $\sqrt{34}$ satuan.



Vektor yang ditarik dari titik pangkal O ke titik P disebut juga vektor posisi titik P dan dituliskan $\overline{OP}$. Jika koordinat titik P adalah (x, y) maka vektor posisinya adalah $\overline{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Jika koordinat titik A (x_1, y_1) dan titik B (x_2, y_2) maka $\overline{AB}$ dapat dinyatakan sebagai vektor posisi sebagai berikut.



$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$$
$$= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

Contoh:

1. Diberikan koordinat titik P (2, –3) dan Q (7, 1). Nyatakan kedua koordinat titik tersebut sebagai vektor posisi $\overrightarrow{PQ}$ dan $\overrightarrow{QP}$!

   Penyelesaian;

   a. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

   $= \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} 7-2 \\ 1+3 \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

   b. $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$

   $= \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} 2-7 \\ -3-1 \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$

   Perhatikan bahwa $\overrightarrow{PQ}$ dan $\overrightarrow{QP}$ memiliki besar yang sama dan berlawanan arah.

   Vektor $\overrightarrow{AB}$ merupakan vektor posisi, yaitu vektor yang menunjukkan posisi vektor $\overrightarrow{AB}$ pada koordinat cartesius. Posisi vektor $\overrightarrow{AB}$ dengan komposisi $A = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ dapat ditulis dengan koordinat kutub sebagai berikut.

   $$\overrightarrow{AB} = (r\angle\theta)$$

   $$\text{dengan } r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

   $$\tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

   Bentuk $\overrightarrow{AB} = (r\angle\theta)$ disebut juga resultan vektor $\overrightarrow{AB}$.

Perlu Tahu

Vektor dalam bentuk koordinat cartesius maupun koordinat kutub dapat dicari resultan dan besar sudut yang diapit.

2. Diberikan dua buah vektor yang masing-masing besarnya 4 kN dan 3 kN. Tentukan besarnya vektor resultan kedua vektor beserta arahnya!

   Penyelesaian:

   $r = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

   $\tan\alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75$

   $\Leftrightarrow \quad \alpha = 36°52'$

   Jadi, vektor resultan beserta arahnya adalah (5 ∠ 36°52')

5. Modulus atau Besar Vektor

Modulus menyatakan panjang atau besar vektor. Karena panjang atau besar vektor selalu bernilai positif maka cara menulis modulus menggunakan tanda mutlak $(|\ .\ |)$. Jika diketahui koordinat titik $P(x, y)$ maka panjang vektor posisi $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dirumuskan sebagai berikut.

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Diketahui titik A (x_1, y_1) dan B (x_2, y_2). Secara analitis, diperoleh komponen vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$.

Panjang vektor $\overrightarrow{AB}$ dapat dirumuskan:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Contoh:

Diketahui titik A (3 , –5) dan B (–2 , 7), tentukan hasil operasi vektor tersebut!

a. Komponen vektor $\overrightarrow{AB}$

b. Modulus/besar vektor $\overrightarrow{AB}$

Penyelesaian:

a. Komponen vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2-3 \\ 7-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$

b. Besar vektor $\overrightarrow{AB} = \sqrt{(-5)^2 + 12^2}$

$= \sqrt{25+144} = \sqrt{169}$

$= 13$

6. Vektor Satuan

Vektor satuan adalah vektor yang mempunyai panjang (besar) 1 satuan. Vektor satuan dapat ditentukan dengan cara **membagi vektor tersebut dengan besar (panjang) vektor** semula.

Vektor satuan dari vektor $\vec{a}$ dirumuskan $\vec{e} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

Contoh:

Diketahui vektor $\vec{a}$ = (–3 , 2). Hitunglah vektor satuan dari vektor $\vec{a}$!

Penyelesaian:

Besar vektor $\vec{a} = |\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

Diperoleh vektor satuan dari $\vec{a}$ adalah $\vec{e} = \dfrac{(-3,2)}{\sqrt{13}} = \left(\dfrac{-3}{\sqrt{13}}, \dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$ atau dapat dituliskan dalam bentuk vektor kolom $\vec{e} = \begin{pmatrix} \dfrac{-3}{\sqrt{13}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$.

Untuk membuktikan bahwa jawaban tersebut benar dapat kita cek kembali menurut definisi panjang vektor $\vec{e} = \sqrt{\left(\dfrac{-3}{\sqrt{13}}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)^2}$

$= \sqrt{\dfrac{9}{13} + \dfrac{4}{13}} = \sqrt{\dfrac{13}{13}} = \sqrt{1} = 1.$

Karena modulus $\vec{e}$ adalah 1, terbukti bahwa $\vec{e} = \sqrt{\dfrac{-3}{\sqrt{13}}, \dfrac{2}{\sqrt{13}}}$ adalah vektor satuan dari $\vec{e}$ = (–3, 2).

Aplikasi

Di dalam sebuah rangkaian listrik arus bolak-balik terdapat tiga buah komponen penting yaitu L = induktor, C = kapasitor, dan R = resistor. Kombinasi vektor dari resistor dengan reaktansi di dalam L disebut impedansi yang dilambangkan dengan z dan memiliki satuan ohm (Ω).

Diberikan impedansi dari rangkaian seri yang dinyatakan sebagai berikut.

$z = 6 + \vec{j} \, . \, 8$ ohm

Tentukan vektor impedansi tersebut dalam koordinat kutub.

Penyelesaian:

Vektor impedansi dari z ekuivalen dengan mencari modulus dari z.

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{6^2 + 8^2} \\ &= \sqrt{36 + 64} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10 \end{aligned}$$

Sudut yang dibentuk vektor z sebagai berikut.

$tan\, \mu = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1{,}333$

$\Leftrightarrow \quad \mu = 53{,}1$

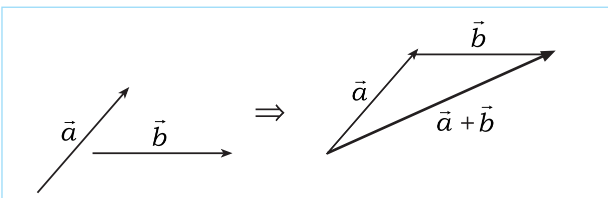
Jadi, koordinat kutub dari vektor impedansi z adalah $(10 \angle 53{,}1°)$.

D. Operasi Hitung Vektor di R^2

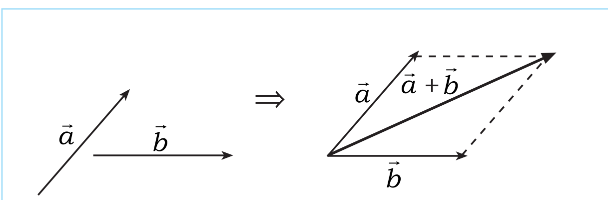
1. Penjumlahan Dua Vektor

Secara geometris penjumlahan dua vektor ada 2 aturan, yaitu:

a. Aturan segitiga



b. Aturan jajaran genjang



Secara analitis penjumlahan dua vektor dirumuskan sebagai berikut.

Jika vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dan vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ maka $\boxed{\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}}$

Contoh:

Jika vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ dan vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ maka $\vec{c} + \vec{d} = \begin{pmatrix} 8+3 \\ 4+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \end{pmatrix}$

Perlu Tahu

Pada penjumlahan vektor berlaku:

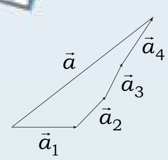
1. Sifat komutatif

   $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

2. Sifat asosiatif

   $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

Info



Penjumlahan vektor dapat dilakukan dengan cara potigon yaitu tidak perlu tergantung pada urutannya. Pada gambar di atas diperoleh:

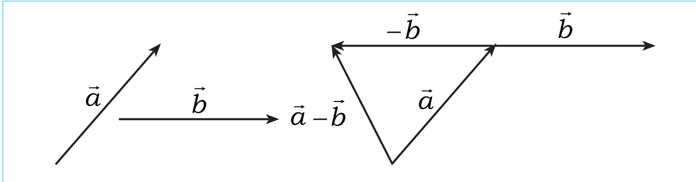
$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4$

2. Selisih Dua Vektor

Selisih dua vektor artinya menjumlahkan vektor pertama dengan lawan (negatif) vektor kedua.

$$\boxed{\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})}$$

Secara geometris dapat digambarkan sebagai berikut.



Secara analitis jika diketahui vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dan vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ maka

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$$

Contoh:

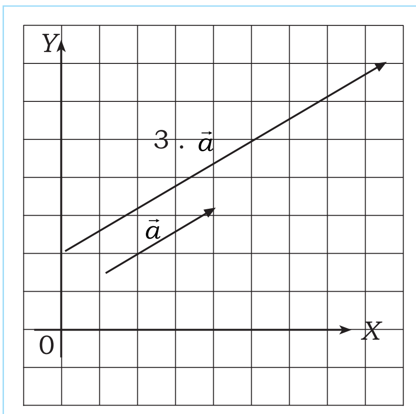
Jika vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ dan vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ maka $\vec{c} - \vec{d} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-3 \\ 4-9 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$

3. Perkalian Vektor

a. Perkalian Vektor dengan Skalar

Hasil kali vektor $\vec{a}$ dengan skalar k adalah **vektor yang panjangnya *k* kali panjang vektor $\vec{a}$ dan arahnya bergantung dengan nilai *k*.**



Jika vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ maka $k . \vec{a} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \end{pmatrix}$

Ada 3 kemungkinan hasil kali suatu vektor dengan skalar k sebagai berikut.

1. Jika $k > 0$ maka $k . \vec{a}$ adalah suatu vektor yang panjangnya k kali vektor $\vec{a}$ dan searah dengan $\vec{a}$.
2. Jika $k = 0$ maka $k . \vec{a}$ adalah vektor nol.
3. Jika $k < 0$ maka $k . \vec{a}$ adalah suatu vektor yang panjangnya k kali vektor $\vec{a}$ dan berlawanan arah dengan $\vec{a}$.

Contoh:

Diketahui vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$. Tentukan hasil operasi vektor berikut!

a. $3 . \vec{a}$ b. $-2 . \vec{a}$ c. $\frac{1}{2} . \vec{a}$

Info

Apabila titik–titik dalam vektor dapat dinyatakan sebagai perkalian vektor yang lain, titik-titik itu disebut titik-titik kolinear (segaris).

Perlu Tahu

Sifat-sifat perkalian vektor.
Jika a suatu vektor tak nol dan n, $p \in \mathbb{R}$ maka berlaku:

1. $n\vec{a} = |n| \; |\vec{a}|$
2. $n(-\vec{a}) = -n\vec{a}$
3. $n\vec{a} = \vec{a}n$
4. $(np)\vec{a} = n(p\vec{a})$
5. $(n + p)\vec{a} = n\vec{a} + p\vec{a}$
6. $n(\vec{a} + \vec{b}) = n\vec{a} + n\vec{b}$

Penyelesaian:

a. $3\ .\ \vec{a}\ = 3\ .\begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\cdot 4\\3\cdot(-8)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\-24\end{pmatrix}$

b. $-2\ .\ \vec{a}\ = -2\ .\begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\cdot 4\\-2\cdot(-8)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\16\end{pmatrix}$

c. $\frac{1}{2}\ .\ \vec{a}\ = \frac{1}{2}\ .\begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\cdot 4\\\frac{1}{2}\cdot(-8)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$

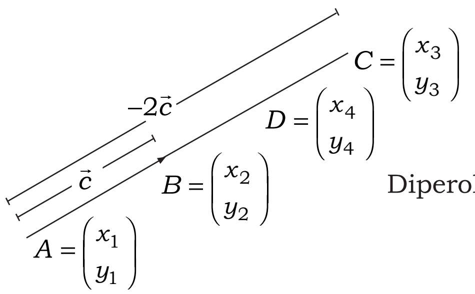
Kilas Balik

Skalar adalah besaran yang hanya mempunyai nilai dan tidak mempunyai arah. Contoh: panjang, lebar, arus listrik, volume, jarak, dan suhu.

b. Vektor Segaris (Kolinear)

Perkalian suatu vektor $\vec{c}$ dengan skalar k menghasilkan sebuah vektor baru yang panjangnya k kali vektor $\vec{c}$. Misalnya vektor $\vec{c}$ dapat dinyatakan sebagai vektor $\overrightarrow{AB}$ dengan $A = \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$.

Dengan demikian $\boxed{k\ .\ \vec{c}\ = k\ .\ \overrightarrow{AB}\ = k\begin{pmatrix}x_2 - x_1\\y_2 - y_1\end{pmatrix}}$. Apabila diberikan ketentuan bahwa titik pangkal vektor $\vec{c}$ dan vektor $k\ .\ \vec{c}$ saling berimpit, diperoleh titik pangkal vektor $k\ .\ \vec{c}$ adalah $A = \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$. Untuk jelasnya perhatikan gambar berikut.



Diperoleh bahwa $\overrightarrow{AC} = 2\cdot\overrightarrow{AB} = 2\cdot\overrightarrow{BC}$

Selanjutnya, diambil sembarang titik $D = \begin{pmatrix}x_4\\y_4\end{pmatrix}$ yang terletak pada vektor $\overrightarrow{AC}$. Titik A, B, dan D dikatakan segaris apabila vektor yang dibangun oleh dua titik di antaranya dapat dinyatakan sebagai perkalian vektor dua titik yang lain.

Contoh:

1. Diberikan tiga buah titik $A = \begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$.

   Tunjukkan bahwa titik A, B, dan C segaris!

   Penyelesaian:

   $$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+2\\0+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} \qquad \ldots (1)$$

   $$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6+2\\2+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix} \qquad \ldots (2)$$

   Dari bentuk (1) dan (2) dapat dilihat bahwa $\overrightarrow{AC}\ = 2\overrightarrow{AB}$. Dengan demikian terbukti bahwa titik A, B, dan C segaris.

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \ldots (3)$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \ldots (4)$$

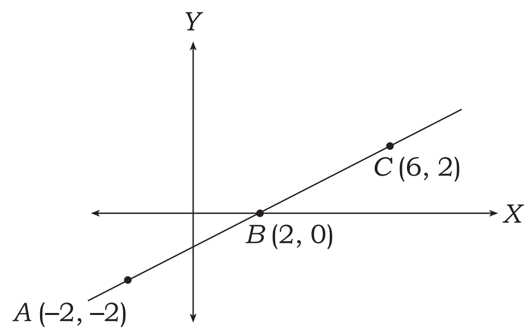
Dari bentuk (3) dan (4) dapat dilihat bahwa $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{BC}$. Dengan demikian terbukti bahwa titik A, B, dan C segaris.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \ldots (5)$$

$$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \ldots (6)$$

Dari bentuk (5) dan (6) dapat dilihat bahwa $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{AB}$. Dengan demikian terbukti bahwa A, B, dan C segaris.

Secara gambar dapat ditunjukkan bahwa titik A, B, dan C segaris.



c. **Perkalian Vektor**

Operasi perkalian pada vektor dapat dikerjakan melalui dua cara sebagai berikut.

1) **Sudut Antara Kedua Vektor Tidak Diketahui**

Diberikan vektor $\vec{a} = (a_1, a_2)$ dan $\vec{b} = (b_1, b_2)$. Hasil kali kedua vektor dirumuskan sebagai berikut.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Contoh:

Diberikan vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ dan $\vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Tentukan hasil kali vektor $\vec{p}$ dan $\vec{q}$!

Penyelesaian:

Diketahui $\vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow p_1 = 5$ dan $p_2 = 7$

$\vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow q_1 = 3$ dan $q_2 = -2$

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{q} &= p_1 q_1 + p_2 q_2 \\ &= 5 \,.\, 3 + 7\,(-2) \\ &= 15 + (-14) \\ &= 1 \end{aligned}$$

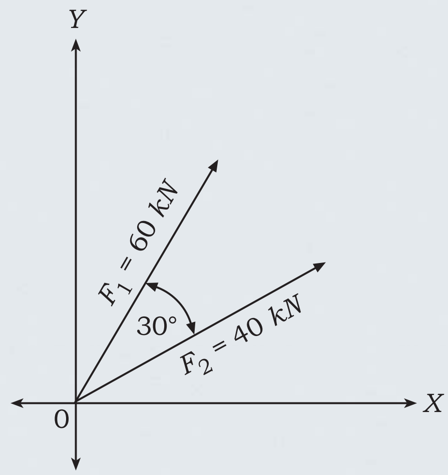
Jadi, hasil kali vektor $\vec{p}$ dan $\vec{q}$ adalah 1.

Perlu Tahu

Hasil perkalian dua buah vektor menghasilkan besaran skalar.

Aplikasi

Dua buah gaya bekerja masing-masing 40 kN dan 60 kN. Kedua gaya tersebut membentuk sudut apit seperti pada gambar di samping. Tentukan hasil kali kedua gaya tersebut!



Penyelesaian:

$$F_1 \cdot F_2 = (40) \cdot (60) \cdot \cos 30°$$
$$= 2.400 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$
$$= 1.200\sqrt{3}$$

Jadi, hasil kali kedua gaya adalah $1.200\sqrt{3}$ kN.

2) Sudut Antara Kedua Vektor Diketahui

Diberikan vektor $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$, dan sudut yang dibentuk oleh vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ adalah α. Perkalian antara vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ dirumuskan sebagai berikut.

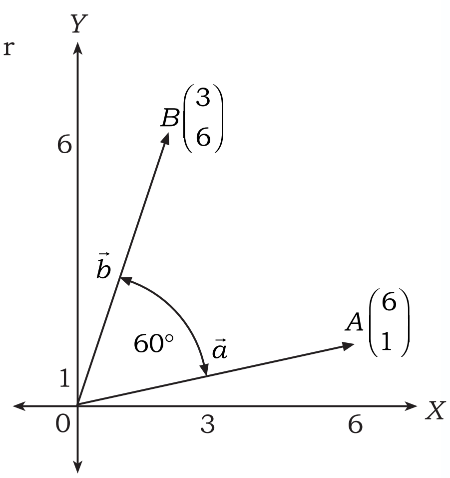
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \alpha$$

Contoh:

Tentukan hasil kali kedua vektor pada gambar di bawah ini!

Penyelesaian:

Diketahui dua buah vektor sebagai berikut.



$\vec{a} = \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix} \rightarrow a_1 = 6$ dan $a_2 = 1$

$$|\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2} = \sqrt{6^2 + 1^2}$$
$$= \sqrt{36+1} = \sqrt{37}$$

$\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} \rightarrow b_1 = 3$ dan $b_2 = 6$

$$|\vec{b}| = \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2} = \sqrt{3^2 + 6^2}$$
$$= \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \alpha$$
$$= \sqrt{37} \cdot \sqrt{45} \cdot \cos 60°$$
$$= \sqrt{37} \cdot \sqrt{45} \cdot \tfrac{1}{2}$$
$$= \tfrac{3}{2}\sqrt{185}$$

Jadi, hasil kali kedua vektor adalah $\frac{3}{2}\sqrt{185}$.

Sementara itu, dari dua buah vektor pada sistem koordinat cartesius dapat kita cari besar sudut yang dibentuk oleh kedua vektor yang dirumuskan sebagai berikut.

$$\cos\alpha = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Contoh:

Tentukan besar sudut yang dibentuk oleh vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$!

Penyelesaian:

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow u_1 = 6$ dan $u_2 = 2$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow v_1 = 3$ dan $v_2 = 4$

$$\cos\alpha = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{6\cdot3 + 2\cdot4}{\left(\sqrt{6^2+2^2}\right)\left(\sqrt{3^2+4^2}\right)} = \frac{18+8}{\left(\sqrt{40}\right)\left(\sqrt{25}\right)}$$

$$= \frac{26}{10\sqrt{10}} = \frac{26}{13{,}62} = 0{,}822$$

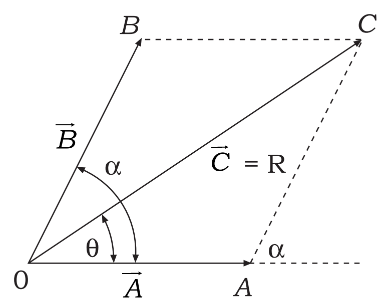
$\Leftrightarrow \quad \alpha = \text{arc } \cos\,(0{,}822) = 34{,}71°$

Jadi, sudut yang dibentuk oleh vektor u_1 dan v_2 sebesar 34,71°.

E. Besar dan Arah Vektor Resultan

1. Resultan Dua Buah Vektor

Perhatikan gambar di samping. Diberikan dua buah vektor yaitu vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ serta sudut yang dibentuk oleh vektor $\vec{B}$ terhadap vektor $\vec{A}$ yaitu sebesar α. Resultan dari vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ adalah sama dengan mencari panjang OC. Menggunakan aturan segitiga, panjang OC dapat kita cari dengan cara sebagai berikut.



$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2 + 2\left(\overline{OA}\right)\left(\overline{AC}\right)\cos\alpha$$

Dengan demikian resultan dua buah vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ adalah:

$$\overline{OC} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{AC}^2 + 2\left(\overline{OA}\right)\left(\overline{AC}\right)\cos\alpha}$$

atau

$$R = \sqrt{\vec{A}^2 + \vec{B}^2 + 2\overline{AB}\cos\alpha}$$

Rumus di atas adalah rumus untuk mencari resultan dua buah vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ yang membentuk sudut α. Selanjutnya, apabila resultan dari vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ yaitu vektor $\vec{R}$ membentuk sudut θ terhadap vektor $\vec{A}$ maka arah dari vektor resultan R dapat dicari dengan rumus sebagai berikut.

$$\sin\theta = \frac{B\sin\alpha}{R}$$

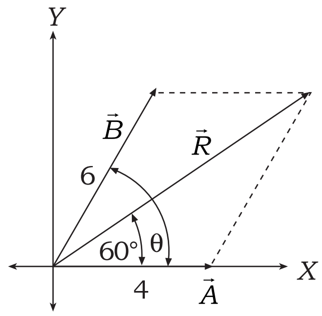
Contoh:

Diberikan dua buah vektor yaitu $\vec{A}$ dengan panjang 4 satuan dan vektor $\vec{B}$ dengan panjang 6 satuan. Vektor $\vec{A}$ dan vektor $\vec{B}$ membentuk sudut 60°. Tentukan besar dan arah vektor resultannya!

Penyelesaian:

Vektor resultan R diperoleh dengan menggunakan rumus berikut.

$$
\begin{aligned}
R &= \sqrt{\vec{A}^2 + \vec{B}^2 + 2\overline{AB}\cos\alpha} \\
&= \sqrt{4^2 + 6^2 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (\cos 60°)} \\
&= \sqrt{16 + 36 + 48 \cdot \frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{16 + 36 + 24} \\
&= \sqrt{76}
\end{aligned}
$$



Jadi, besar vektor resultan adalah $\sqrt{76}$ satuan.
Selanjutnya besar sudut θ diberikan sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
\sin\theta &= \frac{B\sin\alpha}{R} \\
&= \frac{6 \cdot \sin 60^{o}}{\sqrt{76}} \\
&= \frac{6 \cdot (\frac{1}{2}\sqrt{3})}{\sqrt{76}} \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{76}} \times \frac{\sqrt{76}}{\sqrt{76}} \\
&= \frac{3 \cdot 2\sqrt{57}}{76} \\
&= \frac{3\sqrt{57}}{38}
\end{aligned}
$$

Dengan demikian $\theta = \text{arc } \sin \frac{3\sqrt{57}}{38}$

$\Leftrightarrow \theta = 36{,}87°$

Jadi, arah resultan vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ adalah 36,87°.

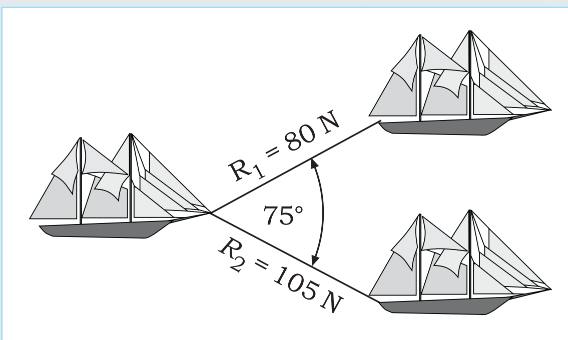
Kilas Balik

Pada bab 1 telah dipelajari tentang trigonometri antara lain $\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

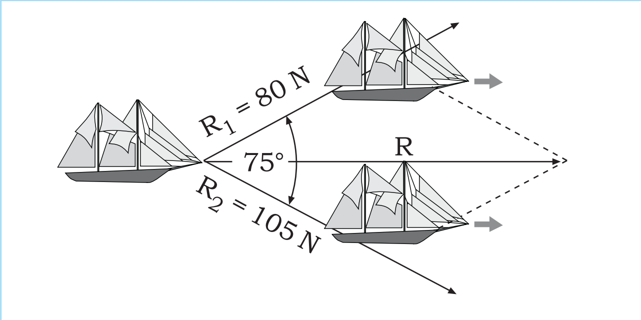
Aplikasi

Sebuah kapal mengalami kemacetan di tengah laut. Untuk membawa kapal tersebut kembali ke pelabuhan dibutuhkan dua buah kapal penarik. Gaya yang dibutuhkan kedua kapal serta sudut yang dibentuk tampak pada gambar di samping.

Tentukan besarnya resultan gaya yang dihasilkan oleh kedua kapal!



Penyelesaian:
Resultan gaya kedua kapal digambarkan pada diagram gaya di samping.



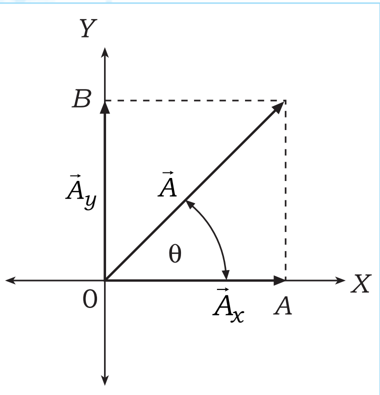
Resultan gaya kedua kapal diberikan sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
R &= \sqrt{R_1^{\,2} + R_2^{\,2} + 2R_1R_2 \cos\alpha} \\
&= \sqrt{80^2 + 105^2 + 2 \cdot 80 \cdot 105 \cdot \cos 75°} \\
&= \sqrt{6.400 + 11.025 + 16.800 \cdot 0{,}26} \\
&= \sqrt{6.400 + 11.025 + 4.368} = \sqrt{21.793} \\
&= 147{,}62
\end{aligned}
$$

Jadi, resultan gaya kedua kapal adalah 147,62 *N*.

2. Resultan Tiga Buah Vektor Atau Lebih

Sebuah vektor pada R^2 dapat dijabarkan menjadi vektor komponen berdasarkan sumbu koordinat.
Perhatikan gambar di samping.



Vektor $\vec{A}$ dapat diuraikan menjadi dua macam vektor komponen. Komponen vektor $\vec{A}$ pada sumbu *Y* adalah $\vec{A}_y$ dan komponen vektor $\vec{A}$ pada sumbu *X* adalah $\vec{A}_x$. Selanjutnya, dengan menggunakan perbandingan sinus dan cosinus pada segitiga siku-siku *OAB* diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\sin\theta = \frac{AB}{OB} = \frac{A_y}{A} \Leftrightarrow \boxed{A_y = A\sin\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{OA}{OB} = \frac{A_x}{A} \Leftrightarrow \boxed{A_x = A\cos\theta}$$

Vektor komponen tersebut dapat kita gunakan untuk mencari besarnya resultan tiga buah vektor atau lebih. Langkah-langkahnya sebagai berikut.

1. Nyatakan sudut yang dibentuk tiap-tiap vektor pada tiap-tiap kuadran menjadi sudut yang besarnya bergantung terhadap sumbu *X*.
2. Jabarkan tiap-tiap vektor sebagai vektor-vektor komponen.
3. Tentukan resultan vektor tiap-tiap komponen.
4. Hitung resultan vektor dari dua komponen.
5. Tentukan besar sudut arah resultan vektor dengan rumus

   $\tan\theta = \dfrac{R_y}{R_x}$.

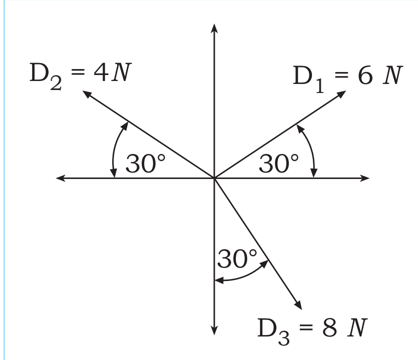
Untuk memahami lebih lanjut mengenai langkah-langkah tersebut, perhatikan contoh berikut.

Contoh:
Hitung resultan vektor dari diagram vektor dan tentukan arah resultan vektor tersebut!

Penyelesaian:

Langkah 1:

Besar sudut masing-masing vektor terhadap sumbu *X* yaitu $\theta_1 = 30°$, $\theta_2 = 30°$, dan $\theta_3 = 90° - 30° = 60°$



Langkah 2:

- Untuk vektor $D_1 = 6\ N$ dan $\theta_1 = 30°$, diperoleh:

  $$D_{1_x} = 6 \cdot \cos 30° = 6\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 3\sqrt{3}$$

  $$D_{1_y} = 6 \cdot \sin 30° = 6\left(\frac{1}{2}\right) = 3$$

- Untuk vektor $D_2 = 4\ N$ dan $\theta_2 = 30°$, diperoleh:

  $$D_{2_x} = 4 \cdot \cos 30° = 4\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}$$

  $$D_{2_y} = 4 \cdot \sin 30° = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

- Untuk vektor $D_3 = 8\ N$ dan $\theta_3 = (90° - 30°) = 60°$, diperoleh:

  $$D_{3_x} = 8 \cdot \cos 60° = 8\left(\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 4$$

  $$D_{3_y} = 8 \cdot \sin 60° = 8\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3}$$

Langkah 3:

Resultan vektor masing-masing komponen sebagai berikut.

- Komponen sumbu *X*

  $$\begin{aligned} R_x &= D_{1_x} + D_{2_x} + D_{3_x} \\ &= 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 4 \\ &= 4 + 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

- Komponen sumbu *Y*

  $$\begin{aligned} R_y &= D_{1_y} + D_{2_y} + D_{3_y} \\ &= 3 + 2 + 4\sqrt{3} \\ &= 5 + 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

Langkah 4:

Resultan vektor kedua komponen dirumuskan dengan:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2} = \sqrt{(4+5\sqrt{3})^2 + (5+4\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{(16 + 2\cdot 4\cdot 5\sqrt{3} + 75) + (25 + 2\cdot 5\cdot 4\sqrt{3} + 48)} \\ &= \sqrt{91 + 40\sqrt{3} + 73 + 40\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{164 + 80\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Langkah 5:

Arah resultan vektor dirumuskan dengan:

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{5+4\sqrt{3}}{4+5\sqrt{3}} = \frac{5+6,93}{4+8,66} = \frac{11,93}{12,66} = 0,94$$

$\Leftrightarrow \theta = \text{arc} \tan(0,94)$

$\Leftrightarrow \theta = 43,22°$

Jadi, resultan dari ketiga vektor pada gambar adalah $\sqrt{164 + 80\sqrt{3}}$ dengan arah 43,22°.

Trik

Perhatikan bahwa besarnya sudut harus bergantung terhadap sumbu *X*.

Kilas Balik

Ingat kembali menghitung bentuk kuadrat yang telah dipelajari pada kelas X bab 3 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

F. Phasor

1. Pengertian dan Bentuk Phasor

Phasor adalah vektor yang memiliki titik pangkal dan panjang yang tetap, tetapi memiliki arah yang berubah-ubah. Phasor merupakan kuantitas yang perubahan arahnya bergantung terhadap fungsi waktu. Contoh phasor antara lain: medan magnet dan tegangan yang ditimbulkan oleh arus bolak-balik. Bentuk phasor secara umum dibedakan menjadi dua macam yaitu:

a. **Bentuk koordinat cartesius**, phasor dituliskan sebagai berikut.

$$z = a + b\vec{j}$$

a = bagian real
b = bagian imajiner
$\vec{j}$ = satuan bilangan imajiner ($\vec{j} = \sqrt{-1}$)

b. **Bentuk koordinat kutub**, phasor dituliskan sebagai berikut.

$$z \cdot (r \angle \theta)$$

r = besar/panjang phasor
θ = arah phasor yang ditempuh setelah t detik, dinyatakan dengan $\theta = \omega t$

Phasor dalam bentuk koordinat kutub dapat diubah ke bentuk koordinat cartesius begitu pula sebaliknya.

a. **Mengubah bentuk koordinat cartesius ke bentuk koordinat kutub**

Diketahui $z = a + b\vec{j}$, nilai r dan besarnya θ dapat kita peroleh dengan rumus berikut.

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

b. **Mengubah bentuk koordinat kutub ke bentuk koordinat cartesius**

Diketahui $z = (r \angle \theta)$, nilai a dan b dapat kita peroleh dengan rumus berikut.

$$a = r \cdot \cos \theta$$
$$b = r \cdot \sin \theta$$

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut.

Contoh:

1. Diberikan phasor $z = 3 - 3\sqrt{3}\,\vec{j}$. Nyatakan phasor tersebut dalam koordinat kutub!

Penyelesaian:

Diketahui $2 = 3 - 3\sqrt{3}\,\vec{j}$, diperoleh $a = 3$ dan $b = -3\sqrt{3}$.

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + (-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 27} = \sqrt{36} = 6$$

$$\tan \theta = \frac{b}{a} = \frac{-3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta = \text{arc } \tan(-\sqrt{3})$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta = 300°$$

Jadi, koordinat kutub dari $z = 3 - 3\sqrt{3}\,j$ adalah $z = (6 \angle 300°)$.

Trik

b = komponen y
a = komponen x

Jadi, $\frac{b}{a} = \frac{(-)}{(+)}$ berada di kuadran IV.

2. Nyatakan phasor $z = (8, 45°)$ dalam koordinat cartesius.
Penyelesaian:

Diketahui $z = (8 \angle 45°)$, diperoleh $r = 8$ dan $q = 45°$.

$a = r \cos \theta = 8 \cdot \cos 45° = 8 \cdot (\frac{1}{2}\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$

$b = r \cdot \cos \theta = 8 \cdot \cos 45° = 8\ (\frac{1}{2}\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$

Jadi, koordinat cartesius dari (8, 45°) adalah $(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$.

2. Operasi pada Phasor

Operasi pada phasor dapat dikerjakan apabila phasor berbentuk cartesius. Apabila phasor dalam bentuk koordinat kutub maka diubah ke bentuk cartesius terlebih dahulu.

a. Penjumlahan Phasor

Operasi penjumlahan phasor dikerjakan dengan menjumlahkan tiap-tiap komponen bilangan real dan tiap-tiap komponen bilangan imajiner. Misal diberikan $z_1 = a_1 + b_1\vec{j}$ dan $z_2 = a_2 + b_2\vec{j}$.
Penjumlahan phasor z_1 dan z_2 dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + b_1\vec{j}) + (a_2 + b_2\vec{j}) \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\,\vec{j} \end{aligned}$$

Contoh:

Tentukan hasil penjumlahan $z_1 = 2 + 5\vec{j}$ dan $z_2 = 4 + 5\vec{j}$!

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (2 + 5\vec{j}) + (4 + 5\vec{j}) \\ &= (2 + 4) + (5 + 5)\,\vec{j} \\ &= 6 + 10\,\vec{j} \end{aligned}$$

Apabila dua buah phasor yang dijumlahkan merupakan fungsi terhadap waktu, penjumlahannya merupakan resultan kedua vektor. Diberikan dua buah phasor $E_1 = a_1 \sin \omega t$ dan $E_2 = a_2 \sin(\omega t + \theta)$, maka penjumlahan E_1 dan E_2 dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 \\ &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos\theta}\ \sin(\omega t + \psi) \end{aligned}$$

dengan $\sin \psi = \frac{a_2 \cdot \sin\theta}{E}$

Aplikasi

Diberikan dua buah gaya gerak listrik (ggl) sebagai berikut.
$E_1 = 10 \sin \omega t$
$E_2 = 15 \sin(\omega t + 60)$
Tentukan hasil penjumlahan dua buah ggl tersebut!

Penyelesaian:

Dari soal diperoleh $a_1 = 10$, $a_2 = 15$, dan $\theta = 60°$.

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 \\ &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos\theta}\ \sin(\omega t + \psi) \end{aligned}$$

$$= \sqrt{10^2 + 15^2 + 2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \cos 60^o}\ \sin(\omega t + \psi)$$

$$= \sqrt{100 + 225 + 300\left(\frac{1}{2}\right)}\ \sin(\omega t + \psi)$$

$$= \sqrt{475}\ \sin(\omega t + \psi)$$

$$= 21{,}8\ \sin(\omega t + \psi)$$

Besar sudut ψ dapat dicari sebagai berikut.

$$\sin \psi = \frac{a_2 \cdot \sin\theta}{E}$$

$$= \frac{15 \cdot \sin 60^o}{21{,}8}$$

$$= \frac{15(\frac{1}{2}\sqrt{3})}{21{,}8}$$

$$= \frac{15(1{,}732)}{21{,}8}$$

$$= 25{,}98$$

Jadi, jumlah kedua buah ggl adalah $E = 21{,}8\ \sin(\omega t + 36{,}5°)$.

b. Pengurangan Phasor

Operasi pengurangan phasor dikerjakan sama seperti penjumlahan phasor, yaitu mengurangkan tiap-tiap komponen real dan imajiner. Pengurangan phasor z_1 dan z_2 dirumuskan sebagai berikut.

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 \vec{j}) - (a_2 + b_2 \vec{j})$$
$$= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\vec{j}$$

Contoh:

Tentukan hasil pengurangan $z_1 = 2 + 3\vec{j}$ dan $z_2 = 5 - \vec{j}$, kemudian nyatakan hasilnya dalam bentuk koordinat kutub!

Penyelesaian:

$$z_1 - z_2 = (2 + 3\vec{j}) - (5 - \vec{j})$$
$$= (2 - 5) + (3 - (-1))\vec{j}$$
$$= -3 + 4\vec{j}$$

Jadi, hasil pengurangan $z_1 = 2 + 3\vec{j}$ dengan $z_2 = 5 - \vec{j}$ adalah $-3 + 4\vec{j}$.

Diperoleh $a = -3$ dan $b = 4$.

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{4}{-3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta = \text{arc}\ \tan\left(\frac{4}{-3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta = 270° + 53{,}1°$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta = 323{,}1°$$

Jadi, bentuk koordinat kutub dari $z = -3 + 4\vec{j}$ adalah $(5 \angle 323{,}1°)$.

Trik

θ seharusnya berada pada kuadran III. Akan tetapi, karena *tan* pada kuadrat III bernilai positif, maka *θ* berada pada koordinat II dan IV.

c. Perkalian dan Pembagian Phasor

Operasi perkalian dan pembagian dua buah phasor $z_1 = a_1 + b_1$ dan $z_2 = a_2 + b_2\vec{j}$ diberikan dalam rumus berikut.

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\,\vec{j}$$

dan

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + (-a_1b_2 + a_2b_1)\vec{j}}{{a_2}^2 + {b_2}^2}$$

Pada operasi perkalian dan pembagian phasor, kedua buah phasor tidak harus berbentuk cartesius. Dengan demikian operasi perkalian dan pembagian dapat dikenakan apabila phasor berbentuk koordinat kutub. Misalnya diberikan $z_1 = (r_1 \angle \theta_1)$ dan $z_2 = (r_2 \angle \theta_2)$. Operasi perkalian dan pembagian kedua buah phasor diberikan sebagai berikut.

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1r_2)\ (\theta_1 + \theta_2)$$

dan

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)\theta_1 - \theta_2$$

Contoh:

1. Diberikan dua buah phasor $z_1 = 4 - 3\vec{j}$ dan $z_2 = 5 + 4\vec{j}$. Tentukan hasil operasi berikut!

   a. $z_1 \cdot z_2$

   b. $\dfrac{z_1}{z_2}$

   Penyelesaian:

   $z_1 = 4 - 3\vec{j} \rightarrow a_1 = 4$ dan $b_1 = -3$
   $z_2 = 5 + 4\vec{j} \rightarrow a_2 = 5$ dan $b_2 = 4$

   a. $$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\vec{j} \\ &= (4 \cdot 5 - (-3)4) + (4 \cdot 4 + 5(-3))\vec{j} \\ &= (20 + 12) + (16 - 15)\,\vec{j} \\ &= 32 + \vec{j} \end{aligned}$$

   b. $$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + (-a_1b_2 + a_2b_1)\vec{j}}{{a_2}^2 + {b_2}^2} \\ &= \frac{4 \cdot 6 + (-3)4) + (-4 \cdot 4 + 5(-3))\vec{j}}{(5)^2 + (4)^2} \\ &= \frac{(20 - 12) + (-16 - 15)\vec{j}}{25 + 16} \\ &= \frac{8 - 31\vec{j}}{41} = \frac{8}{41} - \frac{31}{41}\vec{j} \end{aligned}$$

Intisari

Operasi hitung pada phasor akan selalu menghasilkan bentuk $a + b\vec{j}$ atau bentuk phasor itu sendiri.

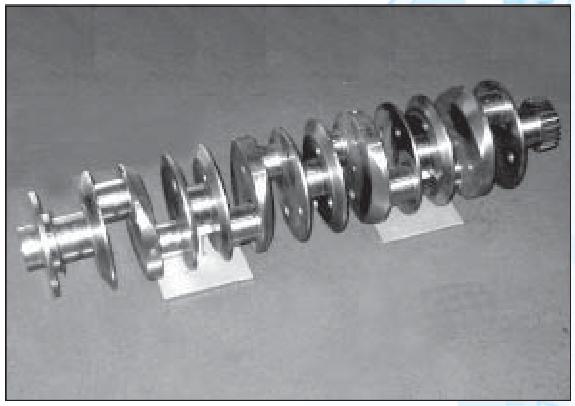
Latihan 1

Kerjakan soal-soal berikut!

1. Tentukan besar vektor $\overline{AB}$ jika A (–2, 3) dan B (1, –4)!
2. Tentukan komponen vektor $\overline{AB}$ jika A (5, –2) dan B (7, 2)!
3. Tentukan vektor satuan dari vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$!
4. Diketahui $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Tentukan $(3 \cdot \vec{b}) - (\frac{1}{2} \cdot \vec{a})$!
5. Jika $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$, tentukan $2 \cdot \vec{a} - \frac{1}{2} \cdot \vec{b}$!
6. Jika $\vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ dan $\vec{q} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, tentukan $\frac{1}{2} \cdot \vec{p} - \frac{1}{2} \cdot \vec{q}$!
7. Jika diketahui $\vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ dan $\vec{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, tentukan x dan y jika $\vec{p} + \vec{q} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$!
8. Jika $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \end{pmatrix}$, tentukan a_1 dan a_2 jika $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$!
9. Jika diketahui $\vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$, tentukan hasil operasi vektor:
   a. modulus vektor $\vec{d}$,
   b. vektor negatif $\vec{d}$, dan
   c. vektor satuan $\vec{d}$.
10. Diketahui $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$ dan $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$, nyatakan secara aljabar bentuk vektor-vektor berikut!
    a. $\vec{u} + \vec{v}$
    b. $2\vec{u} + \vec{v}$
    c. $3\vec{u} - 2\vec{v}$
    d. $3\vec{u} + 3\vec{v}$
    e. $3(\vec{u} + \vec{v})$

Vektor pada Bangun Ruang

Roda pada sebuah kendaraan bermotor dapat bergerak akibat adanya tenaga yang dihasilkan oleh gerakan batang torak yang diubah menjadi gerak putaran pada poros engkol. Poros engkol menerima pasokan beban yang besar dari torak dan batang torak sekaligus berputar pada kecepatan tinggi. Dengan demikian poros engkol harus terbuat dari bahan yang memiliki daya tahan tinggi, yaitu baja *carbon*. Pada poros engkol *crank pin* bergerak secara memutar. Apabila pada posisi di atas, piston bergerak ke atas, begitu pula sebaliknya. Gerakan memutar dari *crank pin* merupakan gerak pada ruang dimensi tiga yang dapat dijabarkan ke dalam bentuk vektor dimensi tiga. Lebih lanjut mengenai vektor dimensi tiga akan kita pelajari pada uraian berikut.



Sumber: *www.abltechnology.com*

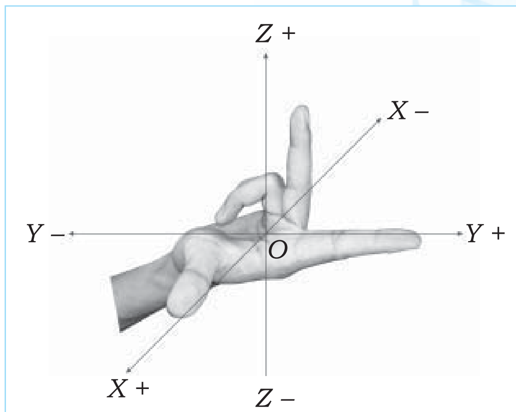
Gambar poros engkol

Uraian Materi

A. Vektor pada Ruang (Dimensi 3)

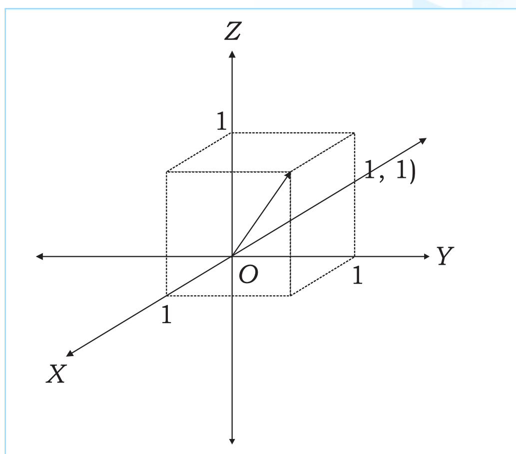
Vektor pada ruang adalah vektor yang terletak di dalam ruang dimensi 3. Ruang ini dibentuk oleh 3 sumbu yaitu sumbu X, sumbu Y, dan sumbu Z.

Ketiga sumbu ini berpotongan tegak lurus. Hasil perpotongan ini adalah O. Selanjutnya, titik O disebut sebagai sumbu pusat. Perhatikan gambar kaidah jari tangan kanan di samping. Kaidah ini menerangkan beberapa hal, yaitu:



1. Jari telunjuk menunjukkan sumbu Y. Bilangan-bilangan yang terletak setelah O dan searah telunjuk merupakan bilangan positif. Arah dan letak sebaliknya berarti bilangan negatif.
2. Ibu jari menunjukkan sumbu X. Bilangan yang searah ibu jari dan terletak setelah O merupakan bilangan positif. Arah dan letak sebaliknya merupakan bilangan negatif.
3. Jari tengah menunjukkan sumbu Z. Bilangan yang searah jari tengah dan terletak setelah O merupakan bilangan positif. Arah dan letak sebaliknya merupakan bilangan negatif.

Perhatikan contoh gambar vektor ruang di samping.



Vektor $\overline{OB}$ di samping merupakan vektor ruang dengan pangkal O (0, 0, 0) dan ujung B (1, 1, 1). Vektor $\overline{OB}$ ini dapat ditulis menjadi:

$\overline{OB}$ = (1, 1, 1)

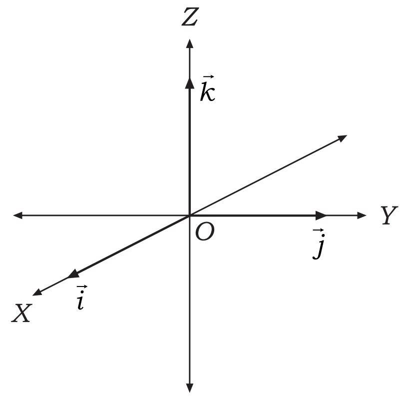
Vektor ruang dapat pula ditulis dalam satuan $\vec{i}$, $\vec{j}$, dan $\vec{k}$. Satuan $\vec{i}$ sesuai dengan sumbu X, satuan $\vec{j}$ sesuai dengan sumbu Y, dan satuan $\vec{k}$ sesuai dengan sumbu Z.

$\overline{OB}$ = (1, 1, 1) dapat ditulis menjadi $1\vec{i} + 1\vec{j} + 1\vec{k} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

B. Ruang Lingkup Vektor

Ruang lingkup vektor dimensi tiga meliputi:

1. Vektor Posisi



Vektor posisi titik *P* adalah vektor $\overrightarrow{OP}$ yaitu vektor yang berpangkal di titik *O* (0, 0, 0) dan berujung di titik *P* (*x*, *y*, *z*). Secara aljabar vektor $\overrightarrow{OP}$ dapat ditulis sebagai berikut.

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ atau } \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$$

Vektor $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ pada dimensi tiga dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor satuan $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sebagai berikut.

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

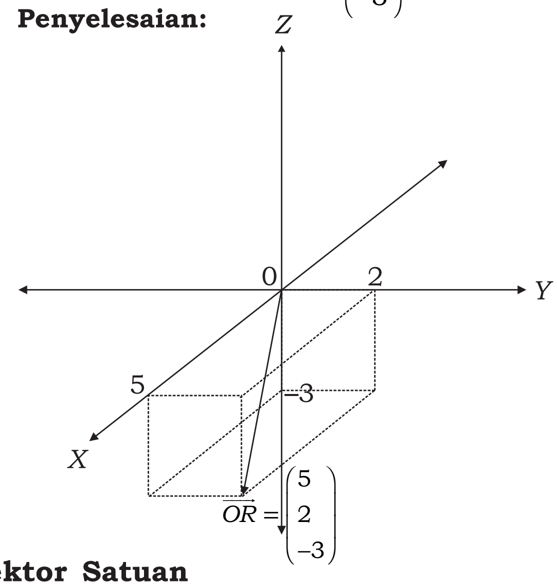
Sebuah vektor $\overrightarrow{AB}$ dengan koordinat titik pangkal *A* (x_1, y_1, z_1) dan koordinat titik ujung *B* (x_2, y_2, z_2) memiliki vektor posisi sebagai berikut.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

Contoh:

1. Gambarkan vektor $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ pada dimensi tiga!

Penyelesaian:



2. Vektor Satuan

Vektor satuan adalah vektor yang mempunyai panjang 1 satuan. Vektor satuan dari vektor $\vec{a}$ didefinisikan vektor $\vec{a}$ dibagi dengan besar vektor $\vec{a}$ sendiri, yang dirumuskan dengan: $\vec{e} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

Contoh:

Tentukan vektor satuan dari vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$!

Penyelesaian:

Terlebih dahulu ditentukan panjang vektor $\vec{a}$.

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{25} = 5$ Jadi, vektor satuan vektor $\vec{a}$ adalah

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

Selain vektor satuan terdapat vektor-vektor satuan yang sejajar dengan sumbu-sumbu koordinat antara lain sebagai berikut.

a. Vektor satuan yang sejajar dengan sumbu X dinotasikan $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b. Vektor satuan yang sejajar dengan sumbu Y dinotasikan $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c. Vektor satuan yang sejajar dengan sumbu Z dinotasikan $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Modulus Vektor

Modulus vektor adalah besar atau panjang suatu vektor. Panjang vektor $\overline{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dirumuskan sebagai berikut.

$$|\overline{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Jika diketahui vektor $\overline{AB}$ dengan koordinat titik A (x_1, y_1, z_1) dan B (x_2, y_2, z_2) maka **modulus/besar/panjang** vektor $\overline{AB}$ dapat dinyatakan sebagai **jarak** antara titik A dan B yaitu:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Jika vektor $\vec{a}$ disajikan dalam bentuk linear $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ maka modulus vektor $\vec{a}$ adalah $|\vec{a}| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}$

Contoh:

Tentukan modulus/besar vektor berikut!

a. $\overline{AB}$, dengan titik A (1, 4, 6) dan B (3, 7, 9)

b. $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$

Penyelesaian:

a. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$, maka $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 7-4 \\ 9-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

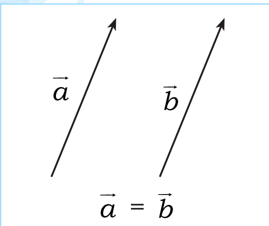
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(3-1)^2 + (7-4)^2 + (9-6)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{22}$$

Jadi, modulus vektor $\overrightarrow{AB}$ adalah $\sqrt{22}$.

b. $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

Jadi, modulus vektor $\vec{a}$ adalah $\sqrt{14}$.

4. Kesamaan Vektor



Dua buah vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ dikatakan sama apabila keduanya mempunyai besar dan arah yang sama. Perhatikan gambar di samping. Terlihat $\vec{\boldsymbol{a}}$ sejajar $\vec{\boldsymbol{b}}$ dan sama panjang. Dengan demikian $\vec{a} = \vec{b}$.

Misal:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ atau } \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}, \text{ dan } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ atau } \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$$

$\vec{a} = \vec{b}$ jika dan hanya jika $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$

Contoh:

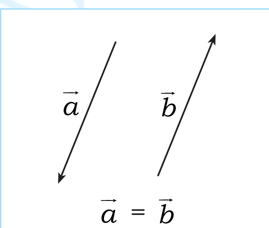
Diberikan dua buah vektor $\vec{m} = \begin{pmatrix} 3 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$ = dan $\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -c \end{pmatrix}$.

Tentukan nilai a, b, c agar dipenuhi $\vec{m} = \vec{n}$!

Penyelesaian:

Syarat vektor $\vec{m} = \vec{n}$ adalah $m_1 = n_1$, $m_2 = n_2$ dan $m_3 = n_3$. Dari yang diketahui diperoleh $3 = b$, $a = -3$, dan $-1 = -c$. Jadi, agar dipenuhi $\vec{m} = \vec{n}$ maka nilai $a = -3$, $b = 3$, dan $c = 1$.

5. Vektor Negatif



Vektor negatif dari $\vec{\boldsymbol{a}}$ adalah vektor yang besarnya sama dengan vektor $\vec{\boldsymbol{a}}$ tetapi arahnya berlawanan dan ditulis $-\vec{\boldsymbol{a}}$. Perhatikan gambar di samping. $\vec{\boldsymbol{a}}$ sejajar dan sama panjang $\vec{\boldsymbol{b}}$, artinya karena antara $\vec{\boldsymbol{a}}$ dan $\vec{\boldsymbol{b}}$ berlawanan arah maka $\vec{\boldsymbol{a}} = -\vec{\boldsymbol{b}}$.

Contoh:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ atau } \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ atau } \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$$

$\vec{a} = -\vec{b}$ jika dan hanya jika $a_1 = -b_1$, $a_2 = -b_2$, $a_3 = -b_3$

Contoh:

Diberikan dua buah vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2-a \\ 4 \\ -b+1 \end{pmatrix}$ dan $\vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ c-2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Tentukan nilai a, b, dan c agar persamaan $r + s = 0$.

Penyelesaian:

Akan ditunjukkan $\vec{r} + \vec{s} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-a \\ 4 \\ -b+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ c-2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{lll} 2 - a - 1 = 0 & \rightarrow & a = 1 \\ 4 + c - 2 = 0 & \rightarrow & c = -2 \\ -b + 1 + 3 = 0 & \rightarrow & b = 4 \end{array}$$

Jadi, agar dipenuhi $r + s = 0$ maka nilai $a = 1$, $b = 4$, dan $c = -2$.

6. Vektor Nol

Vektor nol adalah vektor yang besar/panjangnya nol satuan dan arahnya tak tentu (berupa titik).

Vektor nol pada dimensi 3 dilambangkan dengan $O\ (0\ ,\ 0\ ,\ 0)$ atau $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

C. Operasi Hitung Vektor di R^3

1. Penjumlahan Vektor dalam Ruang

a. Jika dua vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dan vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ adalah vektor-vektor tidak nol di R^3 maka operasi penjumlahannya didefinisikan sebagai berikut.

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

b. Jika vektor $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ dan vektor $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ maka operasi penjumlahannya didefinisikan sebagai berikut.

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j} + (a_3 + b_3)\vec{k}$$

Contoh:

Hitunglah jumlah dari dua buah vektor berikut!

a. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

b. $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ dan $\vec{b} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$

Penyelesaian:

a. $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+(-1) \\ -3+4 \\ 5+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

b. $\vec{a} + \vec{b} = (2+3)\vec{i} + (1+5)\vec{j} + (-4+1)\vec{k}$

$= 5\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$

2. Selisih Dua Vektor pada R^3

a. Jika dua vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dan vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ maka operasi pengurangan kedua vektor didefinisikan sebagai berikut.

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

b. Jika vektor $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ dan vektor $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ maka operasi pengurangan kedua vektor didefinisikan sebagai berikut.

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\vec{i} + (a_2 - b_2)\vec{j} + (a_3 - b_3)\vec{k}$$

Contoh:

Hitunglah $\vec{a} - \vec{b}$ jika:

a. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b. $\vec{a} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k}$ dan $\vec{b} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$

Penyelesaian:

a. $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 8-3 \\ 6-1 \\ 7-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

b. $\vec{a} - \vec{b} = (8-3)\vec{i} + (6-5)\vec{j} + (9-2)\vec{k} = 5\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}$

3. Perkalian Skalar dengan Vektor

a. Hasil kali vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dengan suatu skalar c didefinisikan sebagai berikut.

$$c \,.\, \vec{a} = \begin{pmatrix} c \cdot a_1 \\ c \cdot a_2 \\ c \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

b. Hasil kali vektor $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ dengan skalar c didefinisikan sebagai berikut.

$$c \,.\, \vec{a} = c \cdot a_1\vec{i} + c \cdot a_2\vec{j} + c \cdot a_3\vec{k}$$

Contoh:

1. Diberikan vektor $\vec{h} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ maka $3 \,.\, \vec{h} = \begin{pmatrix} 3 \times 5 \\ 3 \times 2 \\ 3 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$

2. Diberikan vektor $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, maka $4 \cdot \vec{u} = 4 \cdot 2\vec{i} + 4 \cdot \vec{j} - 4 \cdot 3\vec{k}$
   $= 8\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}$

4. Perkalian Dua Vektor di R^3

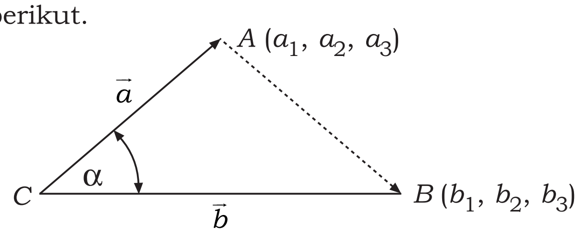
Perkalian vektor di R^3 dibedakan menjadi dua macam sebagai berikut.

a. Perkalian Skalar Dua Vektor (*Dot Product*)

Yang dimaksud perkalian skalar dua vektor adalah perkalian vektor dengan vektor yang menghasilkan skalar. Jika diberikan vektor $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ dan vektor $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ maka perkalian skalar dua vektor dapat ditulis dengan : $\vec{a}\,.\,\vec{b}$ (dibaca: $\vec{a}$ dot $\vec{b}$) dan dirumuskan sebagai berikut.

1. Jika sudut antara vektor $\vec{a}$ dan vektor $\vec{b}$ diketahui sama dengan α ($0° \le \alpha \le 180°$), maka:
   $\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\,\vec{a}\,|\,.\,|\,\vec{b}\,|\,.\,\cos\alpha$, dengan α adalah sudut antara vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$.
2. Jika sudut antara vektor $\vec{a}$ dan vektor $\vec{b}$ tidak diketahui maka:
   $\vec{a}\,.\,\vec{b} = (a_1\,.\,b_1) + (a_2\,.\,b_2) + (a_3\,.\,b_3)$

Hal ini dapat kita pahami dengan aturan cosinus dan rumus jarak sebagai berikut.



$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2\left|\overline{OA}\right|\left|\overline{OB}\right|\cos\alpha$$

$$= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha \qquad \ldots (1)$$

Dengan rumus jarak dua titik diperoleh:

$$\overline{AB}^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$$

$$= \left(b_1^{\,2} - 2b_1a_1 + a_1^{\,2}\right) + \left(b_2^{\,2} - 2b_2a_2 + a_2^{\,2}\right) + \left(b_3^{\,2} - 2b_3a_3 + a_3^{\,2}\right)$$

$$= a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2} + b_1^{\,2} + b_2^{\,2} + b_3^{\,2} - 2a_1b_1 - 2a_2b_2 - 2a_3b_3$$

$$= a^2 + b^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \qquad \ldots (2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh persamaan:

$$\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha = a^2 + b^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$$

$$\Leftrightarrow \qquad |\vec{a}| + |\vec{b}|\cos\alpha = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$$

Menurut rumus definisi $\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha$, diperoleh:

$$\boldsymbol{\vec{a}}\,.\,\boldsymbol{\vec{b}} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Perlu Tahu

Sifat-sifat perkalian skalar: untuk setiap vektor $\vec{a}$, $\vec{b}$, dan $\vec{c}$ berlaku:
1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
2. $\vec{a}\,(\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{b}) + (\vec{a}\cdot\vec{c})$

Contoh:

1. Diberikan vektor $\vec{u} = 2i + j - 3k$ dan $= 3i - 4j + 7k$.
   Diperoleh $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 2\,.\,3 + 1\,.\,(-4) + (-3)\,.\,7$
   $= -19$

2. Jika diketahui | $\vec{a}$ | = 6 dan | $\vec{b}$ | = 5 dan sudut antara vektor $\vec{a}$ dan vektor $\vec{b}$ adalah 60° maka perkaliannya adalah:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| . |\vec{b}| . \cos \alpha$$
$$= 6 . 5 . \cos 60°$$
$$= 30 . \tfrac{1}{2} = 15$$

b. Perkalian Vektor dari Dua Vektor

Yang dimaksud perkalian vektor dari dua vektor adalah perkalian yang menghasilkan vektor. Perkalian vektor dua vektor ditulis dengan $\vec{a} \times \vec{b}$ (dibaca a *cross* $\vec{b}$) dirumuskan dengan determinan matriks sebagai berikut.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

dengan aturan *Sarrus* akan diperoleh hasil perkalian sebagai berikut.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}\begin{matrix} i & j \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix}$$
$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$
$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

Contoh:

Diketahui vektor $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ dan vektor $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.
Tentukanlah hasil operasi vektor berikut!

a. $\vec{a} \times \vec{b}$ b. $\vec{b} \times \vec{a}$ c. $|\vec{a} \times \vec{b}|$

Penyelesaian:

a. $$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}$$
$$= (-1 - (-6)) . \vec{i} - (2 - 9) . \vec{j} + (-4 - (-3)) . \vec{k} = 5i + 7j - \vec{k}$$

b. $$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}$$
$$= (-6 - (-1)). \vec{i} - (9 - 2). \vec{j} + (-3 - (-4)). \vec{k}$$
$$= -5\vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k}$$

c. $$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{5^2 + 7^2 + (-1)^2}$$
$$= \sqrt{25 + 49 + 1} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

5. Sudut Antara Dua Vektor

Berdasarkan rumus perkalian skalar dua vektor $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| . |\vec{b}| . \cos\alpha$ maka besar sudut antara vektor $\vec{a}$ dan vektor $\vec{b}$ dapat ditentukan, yaitu:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

Contoh:

Jika vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ dan vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, nyatakan vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ sebagai kombinasi linear vektor satuan $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Kemudian carilah sudut antara keduanya!

Penyelesaian:

$\vec{a} = \vec{i}$

$\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

$$= \frac{1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Diperoleh:

$$\alpha = \text{arc} . \cos\frac{1}{2}\sqrt{2}$$
$$= 45°$$

6. Vektor Tegak Lurus

Dua buah vektor pada R^3 mempunyai posisi saling tegak lurus apabila sudut yang dibentuk oleh kedua vektor besarnya 90°. Dengan demikian hasil *dot product* kedua vektor sebagai berikut.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\alpha$$
$$= |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos 90°$$
$$= |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,0$$
$$= 0$$

Dengan demikian, dapat disimpulkan sebagai berikut.
Dua buah vektor tegak lurus apabila hasil *dot product* kedua vektor bernilai nol.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$
$$= 0$$

Contoh:

1. Tunjukkan bahwa vektor $\vec{k} = \begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$ dan $\vec{l} = \begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$ saling tegak lurus!

Intisari

Besar sudut antara vektor $\vec{a}$ dan vektor $\vec{b}$ adalah:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \text{arc}\ \cos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}\right)$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\vec{k}\cdot\vec{l} &= k_1\, l_1 + k_2\, l_2 + k_3\, l_3\\ &= 3\,.\,2 + 4(-2) + 1\,.\,2\\ &= 6 + (-8) + 2\\ &= 0\end{aligned}$$

Hasil *dot product* vektor $\vec{k}$ dan $\vec{l}$ adalah 0. Dengan demikian terbukti bahwa vektor $\vec{k}$ tegak lurus dengan vektor $\vec{l}$.

2. Diberikan dua buah vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2+p \\ -3 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   Tentukan nilai p agar vektor $\vec{a}$ tegak lurus $\vec{b}$!

   Penyelesaian:

   Vektor $\vec{a}$ tegak lurus $\vec{b}$ apabila dipenuhi persamaan berikut.

$$\begin{aligned} & \vec{a}\cdot\vec{b} = 0\\ \Leftrightarrow\quad & (a_1\; b_1) + (a_2\; b_2) + (a_3\; b_3) = 0\\ \Leftrightarrow\quad & (7\,.\,3) + (2 + p)\,3 + (-3)\,2 = 0\\ \Leftrightarrow\quad & 21 + 6 + 3p - 6 = 0\\ \Leftrightarrow\quad & 3p + 21 = 0\\ \Leftrightarrow\quad & 3p = -21\\ \Leftrightarrow\quad & p = -7\end{aligned}$$

   Jadi, vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ saling tegak lurus apabila nilai $p = -7$.

Trik

Perkalian dua vektor dikerjakan dengan cara mengalikan vektor-vektor yang sekomponen (komponen $\vec{i}$, $\vec{j}$, atau $\vec{k}$).

Latihan 2

Kerjakan soal-soal berikut!

1. Diketahui vektor-vektor $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$; $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ dan $\vec{w} = 2\vec{i} - \vec{k}$.
   Tentukan hasil operasi vektor berikut!
   a. $\vec{u}\cdot\vec{v}$
   b. $\vec{u} + \vec{w}$
   c. $\vec{v}\times\vec{u}$
   d. $3\vec{w} + 2\vec{v}$
   e. $|\vec{u}|$
   f. $|\vec{v}\vec{w}|$
2. Diketahui vektor $(\overline{PQ})$ dengan titik P (2, 5, –4) dan Q (1, 0, –3). Tentukan hasil di bawah ini!
   a. Koordinat titik R jika $\overline{SR}$ sama dengan vektor $(\overline{PQ})$ dan titik S (2, –2, 4).
   b. Koordinat titik N jika $\overline{MN}$ merupakan negatif vektor $(\overline{PQ})$ dan titik M (–1, 3, 2).
3. Tentukan vektor satuan dari vektor-vektor berikut!
   a. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
   b. $\overline{MN}$ dengan M (2, 1, 2) dan N (2, 0, 3)

4. Diketahui titik-titik di R^3 masing-masing $A(3, 5, 7)$, $B(8, 6, 1)$, $C(7, 11, -5)$, dan $D(2, 10, 1)$. Nyatakan vektor-vektor berikut sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor satuan $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$!

   a. $\overline{AB}$ c. $\overline{BC}$

   b. $\overline{AD}$ d. $\overline{DC}$

5. Jika $\vec{p} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ dan $\vec{q} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, tentukan besar sudut yang terbentuk oleh kedua vektor tersebut!

6. Carilah luas segitiga ABC jika diketahui titik $A(2, -3, 1)$; $B(1, -1, 2)$, dan $C(-1, 2, 3)$!

Rangkuman

1. Vektor adalah besaran yang mempunyai besar dan arah.
2. Modulus vektor adalah besar atau panjang vektor.
3. Modulus/besar/panjang vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ adalah $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.
4. Vektor posisi titik $P(x, y)$ adalah $\overline{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
5. Dua vektor sama bila besar dan arahnya sama.
6. Vektor yang besarnya sama dengan vektor $\vec{a}$ tetapi arahnya berlawanan disebut vektor negatif dari a dituliskan $-\vec{a}$.
7. Vektor nol adalah vektor yang besarnya nol dan arahnya tak tentu.
8. Vektor satuan dari vektor $\vec{a}$ dirumuskan $\vec{a} = \frac{a}{|a|}$.
9. Pada bangun bidang datar, jika diketahui vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dan vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, maka:

   a. Perkalian vektor $\vec{a}$ dengan skalar k adalah $k \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \end{pmatrix}$.

   b. Penjumlahan vektor $\vec{a}$ dan vektor $\vec{b}$ adalah $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$.

   c. Selisih pengurangan vektor $\vec{a}$ dan vektor $\vec{b}$ adalah $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$.

10. Modulus/besar/panjang vektor atau $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ adalah $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.
11. Vektor satuan dari vektor $\vec{a}$ adalah $\vec{e} = \frac{a}{|a|}$.

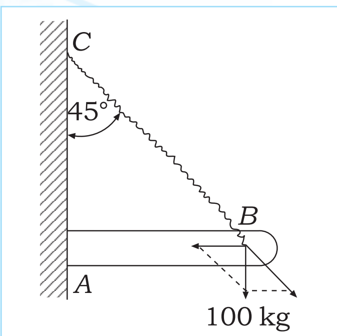
Evaluasi Kompetensi

A. *Pilihlah jawaban yang tepat!*

1. Diketahui vektor $\vec{a} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, panjang vektor $\vec{a}$ adalah . . . .
   a. $-\sqrt{3}$
   b. $\sqrt{8}$
   c. $\sqrt{3}$
   d. $\sqrt{38}$
   e. $-\sqrt{38}$

2. Panjang vektor $\vec{a}$ = 3, panjang vektor $\vec{b}$ = 2, dan sudut antara vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ adalah 60°. Besar $\vec{a} + \vec{b}$ adalah . . . .
   a. $\sqrt{10}$
   b. $\sqrt{13}$
   c. $-\sqrt{10}$
   d. $-\sqrt{13}$
   e. $\sqrt{15}$

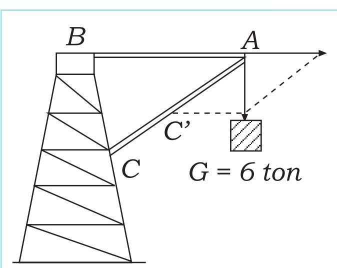
3. Jika diketahui $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ maka $2\vec{a} + 3\vec{b}$ adalah . . . .
   a. $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
   b. $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
   c. $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
   d. $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
   e. $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$



4. Perhatikan gambar di samping! Gaya yang menekan tembok yaitu AB adalah sebesar . . . .
   a. 50 kg
   b. $50\sqrt{2}$ kg
   c. $50\sqrt{3}$ kg
   d. 100 kg
   e. $100\sqrt{3}$ kg

5. Diketahui vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ maka $\vec{a} \cdot \vec{b}$ = ...
   a. –6
   b. 6
   c. 8
   d. 10
   e. 12

6. Vektor $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ dan $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ maka $\vec{a} \times \vec{b}$ = ...
   a. $\vec{i} - 11\vec{j} + 2\vec{k}$
   b. $6\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$
   c. $11\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}$
   d. $5\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$
   e. $11\vec{i} - 2\vec{j} + 7\vec{k}$



7. Perhatikan gambar tiang katrol di samping! Besar gaya yang menekan tubuh katrol yaitu *AC*, sebesar . . . .
   a. 4 ton
   b. $4\sqrt{2}$ ton
   c. $4\sqrt{3}$ ton
   d. 8 ton
   e. $8\sqrt{3}$ ton

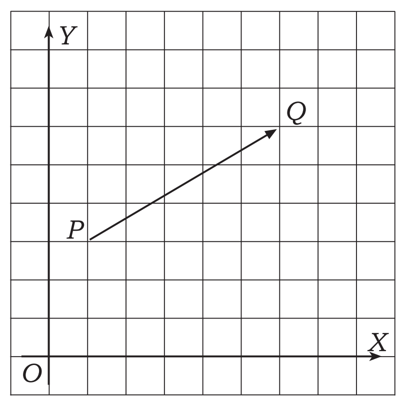
8. Diketahui $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + p\vec{k}$ dan $\vec{b} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, apabila $\vec{a} \cdot \vec{b}$ = 8 maka nilai untuk *p* adalah . . . .
   a. 5
   b. –4
   c. –2
   d. 2
   e. 3

9. Diketahui vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ dengan $|\vec{a}| = 4$ dan $|\vec{b}| = 2$. Sudut antara kedua vektor adalah 90°. Nilai $\vec{a} + \vec{b}$ adalah . . . .
   a. $2\sqrt{3}$
   b. $4\sqrt{3}$
   c. $4\sqrt{5}$
   d. $2\sqrt{5}$
   e. $2\sqrt{7}$

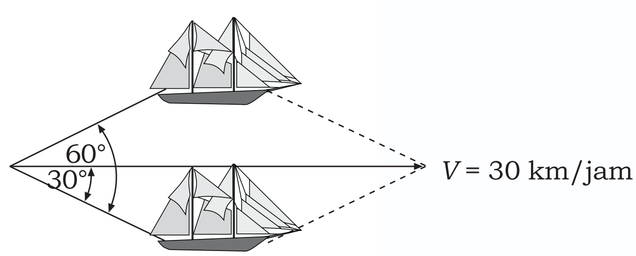
10. Diketahui vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, dan $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ maka nilai dari $2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ adalah . . . .
    a. $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$
    b. $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$
    c. $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$
    d. $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$
    e. $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

B. ***Selesaikan soal-soal berikut!***

1. Jika diketahui koordinat titik P (6, 3) dan Q (4, 5), tentukan hasil di bawah ini!
   a. Bentuk aljabar (komponen) vektor $\overrightarrow{PQ}$.
   b. Besar vektor $\overrightarrow{PQ}$.
2. Perhatikan gambar di samping! Gambarkanlah vektor berikut!
   a. Vektor yang sama panjang dengan $\overrightarrow{PQ}$.
   b. Vektor negatif dari $\overrightarrow{PQ}$.
   c. Vektor posisi yang sama dengan $\overrightarrow{PQ}$.



3. Tentukanlah besar vektor-vektor berikut!
   a. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$
   b. $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   c. $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$
4. Diketahui vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ dan $\vec{q} = 2\vec{p}$. Tentukan vektor satuan dari vektor $\vec{r}$ jika $\vec{r} = \vec{p} - \vec{q}$!
5. Dua buah kapal A dan B melaju dari titik 0 dengan kecepatan masing-masing V_A dan V_B. Resultan vektor kecepatan kedua kapal sebesar 30 km/jam dengan sudut yang terbentuk ditunjukkan pada gambar di samping!

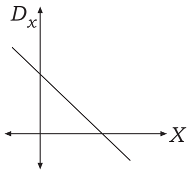


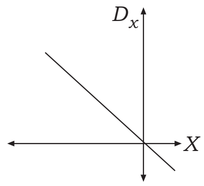
Latihan Ulangan Kenaikan Kelas

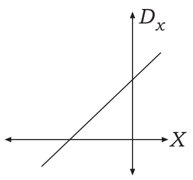
A. ***Pilihlah jawaban yang tepat!***

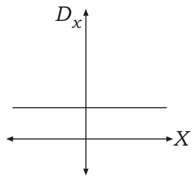
1. Diketahui segitiga siku-siku *ABC*. $\angle CAB$ merupakan sudut siku-siku. $\angle ABC = \alpha$, $\angle ACB = \beta$, $AB = 12$ cm, sedangkan $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. Nilai $\cos \beta$ adalah . . . .
   a. $-\frac{9}{12}$
   b. $-\frac{12}{15}$
   c. $\frac{3}{5}$
   d. $\frac{4}{5}$
   e. $\frac{1}{5}$
2. Jika $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ dan $180° < \alpha < 270°$ maka $\sin \alpha =$ . . . .
   a. $-\frac{4}{5}$
   b. $-\frac{3}{5}$
   c. $\frac{3}{4}$
   d. $\frac{3}{5}$
   e. $\frac{4}{5}$
3. Jika $90° < \alpha < 180°$ dan $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ maka $\cos \alpha =$ . . . .
   a. $-\frac{4}{3}$
   b. $-\frac{4}{5}$
   c. $-\frac{3}{5}$
   d. $\frac{3}{5}$
   e. $\frac{4}{5}$
4. Jika $\sin \beta = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ maka sudut β berada pada kuadran . . . .
   a. II saja
   b. III saja
   c. II dan III
   d. II dan IV
   e. III dan IV
5. Suatu segitiga siku-siku di *C* dengan sisi $AC = 4$ cm dan $BC = 8$ cm. Harga $\cos A =$ . . . .
   a. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
   b. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   c. $\frac{1}{5}\sqrt{5}$
   d. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$
   e. $\frac{1}{4}\sqrt{2}$
6. Jika Δ *XYZ* dengan $\angle X = 30°$, $\angle Y = 45°$, dan $x = 8$ cm maka sisi *y* adalah . . . .
   a. $4\sqrt{2}$
   b. $4\sqrt{3}$
   c. $8\sqrt{2}$
   d. $8\sqrt{3}$
   e. $16\sqrt{3}$
7. Diketahui segitiga *ABC*. Panjang sisi $AC = b$ cm, sisi $BC = a$, dan $a + b = 10$ cm. Jika $\angle A = 30°$ dan $\angle B = 60°$ maka panjang sisi $AB =$ . . . .
   a. $(10 + 5\sqrt{3})$ cm
   b. $(10 - 5\sqrt{3})$ cm
   c. $(5\sqrt{3} - 10)$ cm
   d. $(5\sqrt{3} + 5)$ cm
   e. $(5\sqrt{3} + 15)$ cm

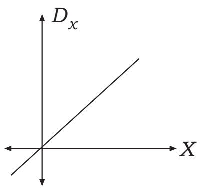
8. Sebuah balok dengan beban merata dijepit pada salah satu ujungnya. Balok tersebut memenuhi persamaan garis $D_x = -qx$ dengan D_x berada pada sumbu vertikal. Grafik dari persamaan tersebut adalah . . . .

a. 

d. 

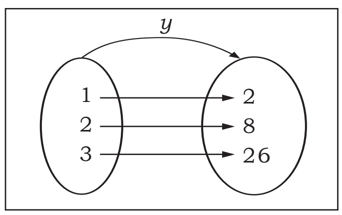
b. 

e. 

c. 

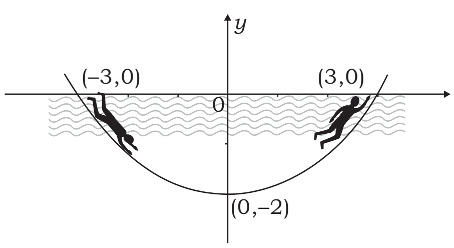
9. Lintasan benda yang bergerak selama t detik dan menempuh jarak s meter diberikan dengan rumus $s = 10 + 8t - 2t^2$. Nilai s pada saat $t = 5$ detik dan nilai s maksimum berturut-turut adalah . . . .
   a. 0 m dan 18 m
   b. 0 m dan 36 m
   c. 5 m dan 18 m
   d. 3 m dan 36 m
   e. 2 m dan 18 m

10. Relasi pada diagram panah di samping dapat ditentukan dengan rumus . . . .
    a. $y = 2^x + 1$
    b. $y = 2^x - 1$
    c. $y = 3^x - 1$
    d. $y = 3^x + 1$
    e. $y = 4^x - 1$



11. Jika $x = 27$, $y = 4$, dan $z = 3$ maka nilai dari $f(x, y, z) = (x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{3}{2}}) \cdot z^{-1}$ adalah . . . .
    a. –72
    b. –8
    c. 0
    d. 8
    e. 72

12. Perhatikan gambar di samping! Gambar ini menunjukkan lintasan renang seorang anak. Persamaan kuadrat yang menunjukkan lintasan ini adalah . . . .
    a. $y = 2x^2 - 3$
    b. $y = \frac{2}{3}x^2 - 3$
    c. $y = \frac{2}{9}x^2 - 2$
    d. $y = \frac{3}{2}x^2 - 2$
    e. $y = x^2 - 3$



13. Tabel berikut menunjukkan variasi koefisien kekentalan suatu cairan terhadap temperatur (t) yang berbeda.

t (°C)	0	6	12	18
z	40,0	23,3	. . .	. . .

Hubungan z dan t diberikan dengan persamaan $z = Ae^{-at}$. Jika log 23,3 = 1,4; log 40 = 1,6; dan log e = 0,4 maka nilai A dan a berturut-turut adalah . . . .

a. 4 dan 0,8
b. 40 dan 0,08
c. 4 dan 0,08
d. 40 dan 0,8
e. 0,8 dan 4

14. Gaya gerak listrik yang dibangkitkan oleh arus bolak-balik diberikan dengan rumus $e = E_{max} \sin 2\pi ft$. Jika f = 15 Hz, E_{max} = 120 volt, dan $t = \frac{1}{90}$ detik, nilai e adalah . . . .

a. 60 volt
b. $60\sqrt{2}$ volt
c. $60\sqrt{3}$ volt
d. 90 volt
e. 120 volt

15. Nilai dari $\sum_{n=1}^{5} 2^n$ ialah . . . .

a. 10
b. 26
c. 62
d. 64
e. 128

16. Beda dari barisan $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}$ adalah . . . .

a. 2
b. $\frac{3}{5}$
c. $\frac{2}{3}$
d. $\frac{1}{2}$
e. $\frac{1}{3}$

17. Seorang petani jeruk mencatat hasil panennya selama 11 hari pertama. Setiap harinya mengalami kenaikan tetap, yaitu dimulai hari pertama, kedua, ketiga berturut-turut 15 kg, 19 kg, 23 kg dan seterusnya. Jumlah panen selama 11 hari pertama adalah . . . .

a. 260 kg
b. 271 kg
c. 285 kg
d. 385 kg
e. 405 kg

18. Pada tahun pertama berproduksi, suatu tanaman memproduksi 5.000 butir buah. Pada tahun-tahun berikut jumlah produksi turun secara tetap sebesar 80 butir buah per tahun. Tanaman tersebut memproduksi 3.000 butir buah pada tahun ke . . . .

a. 24
b. 25
c. 26
d. 27
e. 28

19. Rasio dari barisan bilangan 2, $\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}$ adalah . . . .

a. $\frac{1}{4}$
b. $\frac{1}{3}$
c. $\frac{1}{2}$
d. 1
e. $\frac{3}{2}$

20. Suku pertama suatu barisan geometri ialah 16 dan suku ketiga 36, besar suku kelima adalah . . . .

a. 81	d. 46
b. –52	e. 56
c. –46	

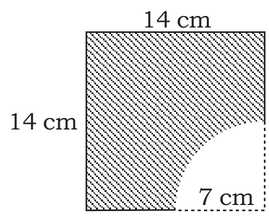
21. Diketahui deret geometri dengan suku pertama 4 dan suku kelimanya 324. Jumlah delapan suku pertama deret tersebut adalah . . . .

a. 6.174	d. 13.120
b. 6.074	e. 3.078
c. 5.974	

22. Sudut 60,75° jika dinyatakan dalam derajat, menit, dan detik adalah . . . .

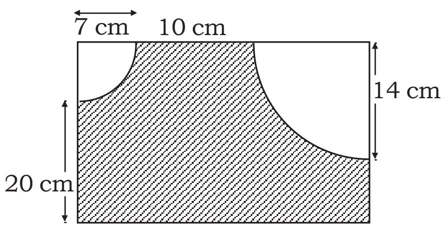
a. $60°30'00''$	d. $60°45'45''$
b. $60°45'00''$	e. $60°50'00''$
c. $60°45'30''$	

23. Luas daerah yang diarsir adalah . . . . ($\pi = \frac{22}{7}$)



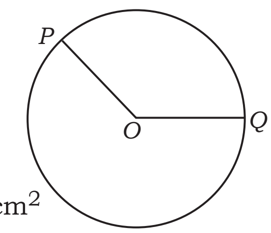
a. 102 cm^2
b. 105 cm^2
c. 110 cm^2
d. 119 cm^2
e. 129 cm^2

24. Keliling bangun pada gambar berikut adalah . . . .



a. 61 cm
b. 71,5 cm
d. 100 cm
d. 82 cm
e. 93 cm

25. Pada gambar di samping O adalah pusat lingkaran dan panjang OP = 7 cm. Jika $\angle POQ$ = 135° dan $\pi = \frac{22}{7}$ maka luas juring lingkaran POQ adalah . . . .



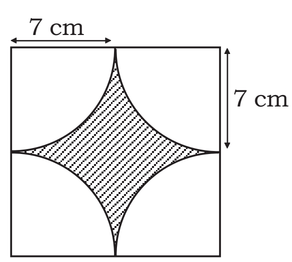
a. $16\frac{1}{2}$ cm^2	d. $57\frac{3}{4}$ cm^2
b. 44 cm^2	e. $115\frac{1}{2}$ cm^2
c. $61\frac{1}{2}$ cm^2	

26. Daun pada kipas angin listrik berbentuk juring lingkaran dengan jari-jari 21 cm dan memiliki luas 231 cm^2. Besar sudut juring pada kipas angin listrik tersebut adalah . . . .

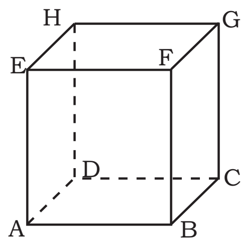
a. 30°	d. 90°
b. 45°	e. 120°
c. 60°	

27. Luas daerah yang diarsir pada gambar di samping adalah . . . .

a. 42 cm^2
b. 16 cm^2
c. 24,5 cm^2
d. 28 cm^2
e. 29,8 cm^2



28. Dalam kubus ABCD.EFGH, pernyatan berikut ini benar, *kecuali* . . . .

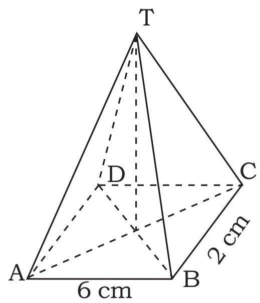


a. garis AB berada di bidang alas
b. titik G terletak di bidang atas
c. garis CG memotong bidang alas dan atas
d. garis AB sejajar dengan CG
e. bidang ABFE tegak lurus terhadap bidang alas

29. Panjang rusuk kubus ABCD.EFGH sama dengan 6 cm. Jarak titik A ke bidang BDE sama dengan . . . .

a. $6\sqrt{3}$
b. $2\sqrt{3}$
c. $\sqrt{6}$
d. $6\sqrt{6}$
e. $3\sqrt{6}$

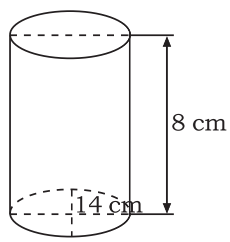
30.



Suatu limas beraturan T.ABCD di samping memiliki tinggi TP = 4 cm. Luas permukaan limas adalah . . . cm^2.

a. 20
b. 24
c. 28
d. 32
e. 36

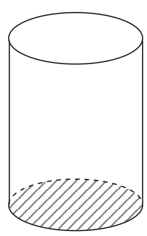
31.



Tabung tertutup seperti gambar di samping memiliki tinggi 8 cm dan diameter 28 cm. Luas tabung ini adalah . . . .

a. 704 cm^2
b. 660 cm^2
c. 1.320 cm^2
d. 1.584 cm^2
e. 1.936 cm^2

32.



Luas permukaan sebuah tabung berdiameter 21 cm adalah 1.485, volume tabung tersebut adalah . . . .

a. 3.240 cm^3
b. 4.158 cm^3
c. 4.632 cm^3
d. 4.860 cm^3
e. 4.882 cm^3

33. Jika $A = (5, -3, 2)$ dan $B = (1, 5, -2)$ maka komponen vektor $\overline{AB}$ adalah . . . .

a. $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$

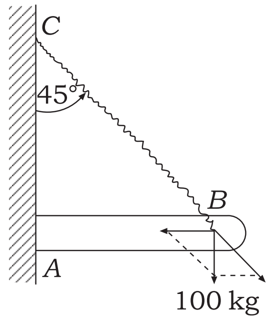
d. $\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$

34. Diketahui $\vec{a} = 2i - 3j + 4k$ dan $\vec{b} = i - 2j - 3k$ maka $\vec{a} \cdot \vec{b}$ adalah . . . .

a. 18
b. –16
c. –4
d. –12
e. 10

35. Perhatikan gambar di samping! Gaya yang menekan tembok yaitu AB sebesar . . . .
   a. 50 kg
   b. $50\sqrt{2}$ kg
   c. $50\sqrt{3}$ kg
   d. 100 kg
   e. $100\sqrt{3}$ kg

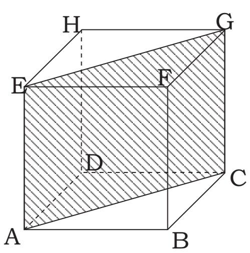


B. ***Kerjakan soal-soal berikut!***

1. Tentukan nilai dari bentuk trigonometri berikut!
   a. $\sin^2 30° + \cos^2 30°$
   b. $\cos 300° - \cos 180° + \cos 90°$
   c. $\cos 330° + \tan 240° - \sin 45°$
   d. $\sin 135° - \cos 225° - \sin 240°$
2. Lengkapilah tabel di bawah ini!

Sudut α	**120°**	**135°**	**150°**	**180°**	**210°**	**225°**	**240°**	**270°**	**300°**	**315°**	**330°**	**360°**
$\sin \alpha$												
$\cos \alpha$												
$\tan \alpha$												

3. Jika $f(x) = x^2 - 1$, tentukan $f(3)$ dan $f(2)$. Selanjutnya untuk $f(a) = 80$, tentukan nilai a!
4. Tentukan koordinat titik potong grafik fungsi kuadrat dan koordinat titik puncak dari fungsi berikut!
   a. $f(x) = x^2 + x - 2$
   b. $f(x) = 8 - 2x - x^2$
5. Gambarlah grafik fungsi kuadrat yang grafiknya melalui titik (0, 16), (1, 9), dan (2, 4)!
6. Hitunglah jumlah 20 suku pertama dari barisan: 162 + 158 + 154 + 150 + ... !
7. Tentukan rumus dari luas daerah pada masing-masing bangun datar berikut!
   a. Segitiga
   b. Jajaran genjang
   c. Trapesium
   d. Lingkaran
   e. Persegi panjang
8. Pak Aryo membeli tanah berbentuk persegi panjang dengan panjang 800 m dan lebar 500 m. Jika harga tanah Rp250.000,00/m^2, tentukan jumlah uang yang harus dikeluarkan oleh Pak Aryo!
9. Perhatikan gambar di samping! Apabila luas daerah yang diarsir adalah $36\sqrt{2}$ cm^2, tentukan luas permukaan kubus!



10. Jika diketahui koordinat titik $P(6, 3)$ dan $Q(4, 5)$, tentukan hasil di bawah ini!
    a. Bentuk aljabar (komponen) vektor $\overline{PQ}$.
    b. Besar vektor $\overline{PQ}$.

Glosarium

codomain	:	daerah hasil suatu fungsi
diagonal bidang	:	garis penghubung dua titik sudut berhadapan yang sebidang
diagonal ruang	:	garis penghubung dua titik sudut berhadapan yang tidak sebidang
domain	:	daerah asal suatu fungsi
daerah asal	:	pada R: A $\rightarrow$ B, A disebut daerah asal
daerah hasil	:	pada R: A $\rightarrow$ B, himpunan bagian dari B yang anggotanya merupakan bayangan anggota A disebut daerah hasil
dilatasi	:	dilatasi merupakan transformasi yang memerlukan pusat dilatasi dan faktor dilatasi
fungsi	:	fungsi adalah relasi yang menghubungkan setiap anggota domain secara tunggal dengan anggota kodomain
gradien	:	tangen sudut yang dibentuk oleh suatu garis dengan sumbu X positif
keliling	:	keliling suatu bangun datar yang tertutup merupakan jumlah panjang sisi-sisinya atau jarak yang kalian tempuh, bila kalian mengitari bangun tersebut
luas	:	luas suatu bangun datar adalah banyaknya satuan luas yang digunakan untuk menutup permukaan bangun tersebut
modulus vektor	:	besar dari vektor yang merupakan panjang segmen garis berarah
pasangan berurutan	:	urutan a dan b yang tidak dapat ditukar urutannya, ditulis (a,b)
penyelesaian	:	penyelesaian suatu persamaan adalah nilai variabel yang membuat suatu persamaan menjadi kesamaan yang bernilai benar
refleksi	:	refleksi merupakan suatu jenis transformasi yang memerlukan sumbu refleksi
rotasi	:	rotasi merupakan suatu transformasi yang memerlukan pusat rotasi dan jarak rotasi. Jarak rotasi biasa disebut sudut putar
translasi	:	translasi merupakan suatu transformasi yang memerlukan besar dan arah translasi
sisi	:	bidang yang menyelimuti bangun ruang
translasi	:	translasi merupakan suatu transformasi yang memerlukan besar dan arah translasi
trigonometri	:	cabang ilmu matematika yang berhubungan dengan besar sudut dan perbandingan sisi pada bangun segitiga
vektor	:	besaran yang memiliki nilai dan arah yang dinyatakan sebagai segmen garis berarah
vektor posisi	:	vektor yang menyatakan kedudukan setiap titik pada koordinat cartesius

Indeks

Daftar Pustaka

Casson, Lionel. 1972. *Mesin Kuno*. London: Time Life Books.Inc.

Jacobs, Harold R. 1977. *Mathematics A Human Endeavour*. Victoria: L & S Publishing Co. Pty. Ltd.

Küstner, W. Gellert H. dan M. Hellwich H. Kästner. 1977. *the VNR Concise Encyclopedia of Mathematics*. German: Van Nostrand Reinhold Company Regional Offices.

Lipschutz, Seymour dan Pantur Silaban. 1989. *Teori Himpunan*. Jakarta: Erlangga.

Millman, Richard S. dan George D. Parker. 1991. *Geometry A Metric Approach with Models*. New York: Springer-Verlag.

Negoro dan B. Harahap. 1982. *Ensiklopedia Matematika*. Jakarta Timur: Ghalia Indonesia.

Tim Penyusun. 2004. *Matematika untuk Kelas X*. Klaten: Intan Pariwara.

Wahyudin dan Sudrajat. 2003. *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia*. Jakarta: Tarity Samudra Berlian.

Matematika

Ayo, Persiapkan Ujian Nasional Sejak Dini!

Kelulusan siswa SMK/MAK sangat ditentukan oleh nilai yang diperoleh ketika mengikuti Ujian Nasional. Jika ingin lulus dari SMK/MAK, kalian harus berhasil mendapatkan nilai yang memenuhi standar Ujian Nasional yang ditentukan. Tentu kalian tidak ingin gagal dalam Ujian Nasional yang akan datang, bukan?

Ada tips yang patut kalian praktikkan agar sukses dalam Ujian Nasional sehingga lulus dengan nilai yang baik. Apakah tips itu? Pertama, kalian tidak boleh main-main dengan pelajaran Matematika karena pelajaran Matematika termasuk mata pelajaran yang di-UN-kan. Kalian harus mempelajari Matematika dengaan sungguh-sungguh sejak duduk di bangku kelas X. Kedua, kalian tidak boleh sembarangan memilih buku pelajaran, sarana belajar kalian. Pilihlah buku Matematika untuk SMK/MAK ini sebagai sarana belajar kalian.

Mengapa kalian harus memilih buku pelajaran ini? Ingat, kunci keberhasilan Ujian Nasional adalah sering berlatih mengerjakan kegiatan-kegiatan dan soal-soal latihan. Nah, dalam buku ini disajikan berbagai bentuk kegiatan belajar dan soal latihan yang dapat membantu kalian menghadapi Ujian Nasional. Selain itu, dalam buku ini disajikan berbagai metode pembelajaran Matematika yang kreatif, edukatif, dan menyenangkan guna mengasah pemikiran, keterampilan, dan intelektual kalian. Diharapkan, semua pengetahuan terkait dengan Matematika yang kalian kuasai sangat berguna untuk meraih keberhasilan menempuh Ujian Nasional dan di dunia kerja nanti.

Tunggu apa lagi! Ayo, pelajari semua kegiatan belajar dalam buku ini! Selamat belajar dan sukses selalu.

ISBN 979-462-966-9

Buku ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP) dan telah dinyatakan layak sebagai buku teks pelajaran berdasarkan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 34 Tahun 2008 tanggal 10 Juli tentang Penetapan Buku Teks Pelajaran yang Memenuhi Syarat Kelayakan untuk Digunakan dalam Proses Pembelajaran.

HET (Harga Eceran Tertinggi) Rp12.249,-