

Aktif Menggunakan Matematika

untuk Kelas XI

Sekolah Menengah Kejuruan/Madrasah Aliyah Kejuruan
Rumpun Sosial, Administrasi Perkantoran, dan Akuntansi

Kana Hidayati
Sari Dewi
Adityo Suksmono



PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

2



PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

Aktif Menggunakan Matematika

untuk Kelas XI

Sekolah Menengah Kejuruan/Madrasah Aliyah Kejuruan
Rumpun Sosial, Administrasi Perkantoran, dan Akuntansi

Kana Hidayati
Sari Dewi
Adityo Suksmono

2

Hak Cipta pada Departemen Pendidikan Nasional
Dilindungi Undang-undang

Aktif Menggunakan Matematika

Untuk SMK/MAK Kelas XI
Rumpun Sosial, Administrasi Perkantoran, dan Akuntansi

Penulis : Kana Hidayati
Sari Dewi
Adityo Suksmono
Editor : Tim Visindo Media Persada
Ilustrasi, Tata Letak : Tim Visindo Media Persada
Perancang Kulit : Tim Visindo Media Persada

Ukuran Buku : 17,6 × 25 cm

510.07

HID HIDAYATI, Kana

a

Aktif menggunakan matematika 2: untuk Kelas XI Sekolah Menengah Kejuruan/Madrasah Aliyah Kejuruan Rumpun Sosial, Administrasi Perkantoran, dan Akuntansi/Kana Hidayati, Sari Dewi, Adityo Suksmono. -- Jakarta : Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional, 2008.

vi, 218 hlm . : ilus . ; 25 Cm.

Bibliografi: hlm. 218

Indeks

ISBN 979-462-941-3

1. Matematika-Studi dan Pengajaran I. Judul
II. Dewi, Sari III. Suksmono, Adityo

Diterbitkan oleh Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional
Tahun 2008

Diperbanyak oleh ...



Kata Sambutan

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT, berkat rahmat dan karunia-Nya, Pemerintah, dalam hal ini, Departemen Pendidikan Nasional, pada tahun 2008, telah membeli hak cipta buku teks pelajaran ini dari penulis/penerbit untuk disebarluaskan kepada masyarakat melalui situs internet (website) Jaringan Pendidikan Nasional.

Buku teks pelajaran ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan dan telah ditetapkan sebagai buku teks pelajaran yang memenuhi syarat kelayakan untuk digunakan dalam proses pembelajaran melalui Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 34 Tahun 2008.

Kami menyampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada para penulis/penerbit yang telah berkenan mengalihkan hak cipta karyanya kepada Departemen Pendidikan Nasional untuk digunakan secara luas oleh para siswa dan guru di seluruh Indonesia.

Buku-buku teks pelajaran yang telah dialihkan hak ciptanya kepada Departemen Pendidikan Nasional ini, dapat diunduh (down load), digandakan, dicetak, dialihmediakan, atau difotokopi oleh masyarakat. Namun, untuk penggandaan yang bersifat komersial harga penjualannya harus memenuhi ketentuan yang ditetapkan oleh Pemerintah. Diharapkan bahwa buku teks pelajaran ini akan lebih mudah diakses sehingga siswa dan guru di seluruh Indonesia maupun sekolah Indonesia yang berada di luar negeri dapat memanfaatkan sumber belajar ini.

Kami berharap, semua pihak dapat mendukung kebijakan ini. Kepada para siswa kami ucapkan selamat belajar dan manfaatkanlah buku ini sebaik-baiknya. Kami menyadari bahwa buku ini masih perlu ditingkatkan mutunya. Oleh karena itu, saran dan kritik sangat kami harapkan.

Jakarta, Juli 2008
Kepala Pusat Perbukuan



Kata Pengantar

Matematika merupakan ilmu yang sangat berkaitan dengan kehidupan. Sebagai ibu dari ilmu pengetahuan, matematika merupakan ilmu dasar yang dapat digunakan untuk memecahkan masalah dalam bidang ilmu yang lain. Misalnya, Fisika, Kimia, Biologi, Akuntansi, Ekonomi, Sosial, dan Astronomi.

Melihat betapa pentingnya matematika maka perlu adanya peningkatan kualitas pendidikan matematika di sekolah agar membentuk manusia yang memiliki daya nalar dan data pikir yang kreatif dan cerdas dalam memecahkan masalah, serta mampu mengomunikasikan gagasan-gagasannya. Pendidikan matematika harus dapat membantu Anda menyongsong masa depan dengan lebih baik.

Atas dasar inilah, kami menerbitkan buku Aktif Menggunakan Matematika ini ke hadapan Anda, khususnya para siswa sekolah menengah kejuruan. Buku ini menghadirkan aspek konstektual bagi Anda dengan menggunakan pemecahan masalah sebagai bagian dari pembelajaran untuk memberikan kesempatan kepada Anda membangun pengetahuan dan mengembangkan potensi diri.

Materi pelajaran matematika dalam buku ini bertujuan membekali Anda dengan pengetahuan dan sejumlah kemampuan untuk memasuki jenjang yang lebih tinggi, serta mengembangkan ilmu matematika dalam kehidupan sehari-hari. Oleh karena itu, menempatkan Aktif Menggunakan Matematika sebagai teori dalam kelas akan membantu pencapaian tujuan pembelajaran.

Materi-materi bab di dalam buku ini disesuaikan dengan perkembangan ilmu dan teknologi terkini. Buku ini juga diajikan dengan bahasa yang mudah dipahami dan komunikatif sehingga mempermudah siswa dalam mempelajari buku ini.

Kami menyadari bahwa penerbitan buku ini tidak akan terlaksana dengan baik tanpa dukungan dan bantuan dari berbagai pihak. Untuk itu, dengan hati yang tulus, kami ucapkan terima kasih atas dukungan dan bantuan yang diberikan. Semoga buku ini dapat memberi kontribusi bagi perkembangan dan kemajuan pendidikan di Indonesia.

Tim Penyusun



Daftar Isi

Kata Sambutan • iii

Kata Pengantar • iv

Bab 1 Logika Matematika.....	1
A. Pernyataan dan Kalimat Terbuka	3
B. Pernyataan Majemuk.....	7
C. Invers, Konvers, dan Kontraposisi.....	25
D. Pernyataan Berkuantor.....	28
E. Pernyataan Majemuk Bersusun.....	30
F. Penarikan Kesimpulan	34
Evaluasi Materi Bab 1.....	41



Bab 2 Relasi dan Fungsi	45
A. Pengertian Relasi dan Fungsi.....	47
B. Fungsi Linear	54
C. Fungsi Kuadrat.....	61
Evaluasi Materi Bab 2.....	76
Evaluasi Semester 1	81
Tugas Observasi Semester 1	84



Bab 3 Barisan dan Deret Bilangan	85
A. Pengertian Barisan dan Deret Bilangan	87
B. Barisan dan Deret Aritmetika.....	95
C. Barisan dan Deret Geometri.....	104
Evaluasi Materi Bab 3.....	117



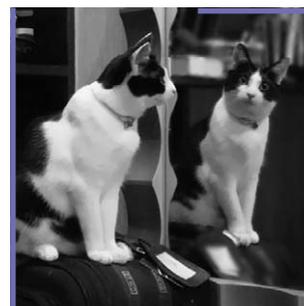
Bab 4 Geometri Dimensi Dua 119

A. Sudut 121
B. Bangun Datar 131
Evaluasi Materi Bab 4..... 151



Bab 5 Transformasi Bidang Datar 155

A. Translasi 157
B. Refleksi 162
C. Rotasi 182
D. Dilatasi 188
E. Komposisi Transformasi 195
Evaluasi Materi Bab 5..... 200
Evaluasi Semester 2 203
Tugas Observasi Semester 2 206
Evaluasi Akhir Tahun..... 207
Kunci Jawaban..... 211
Daftar Istilah 212
Indeks..... 215
Daftar Simbol..... 217
Daftar Pustaka..... 218



Bab 1



Sumber: pkss.co.id

Logika Matematika

Pada bab ini, Anda akan diajak untuk memecahkan masalah yang berhubungan dengan konsep Logika Matematika, di antaranya mendeskripsikan pernyataan dan bukan pernyataan (kalimat terbuka), mendeskripsikan ingkaran, konjungsi, disjungsi, implikasi, biimpikasi, dan ingkarannya, mendeskripsikan invers, konvers, kontraposisi, menerapkan modus ponens, modus tollens, prinsip silogisme dalam menarik kesimpulan

Logika adalah ilmu yang mempelajari cara berpikir yang logis. Cara berpikir ini dapat berupa cara menentukan benar tidaknya suatu pernyataan. Misalnya, pernyataan "Air sungai bermuara di danau dan di laut" merupakan pernyataan yang benar karena tidak ada pertentangan di dalamnya. Bandingkan dengan pernyataan "Air adalah zat cair dan zat padat" yang merupakan pernyataan salah karena terkandung pertentangan di dalamnya.

Di dalam logika matematika, Anda akan mempelajari membuat suatu ingkaran dengan benar dari suatu pernyataan. Misalnya pernyataan "Semua kasir adalah perempuan", ingkarannya adalah "Ada kasir bukan perempuan", bukan "Semua kasir bukan perempuan", karena dengan cukup seorang kasir laki-laki akan mengingkari pernyataan pertama.

Selain itu, pada bab ini Anda juga akan mempelajari cara penarikan kesimpulan yang sah (valid), lebih jauhnya pelajilah materi pada bab ini dengan baik.

- A. **Pernyataan dan Kalimat Terbuka**
- B. **Pernyataan Majemuk**
- C. **Invers, Konvers, dan Kontraposisi**
- D. **Pernyataan Berkuantor**
- E. **Pernyataan Majemuk Bersusun**
- F. **Penarikan Kesimpulan**

A Pernyataan dan Kalimat Terbuka

Kata Kunci

- pernyataan
- kalimat terbuka
- ingkaran

1. Pernyataan

Sebelum Anda mempelajari definisi pernyataan, perhatikanlah beberapa contoh berikut.

- Manusia adalah makhluk hidup
- Air sungai mengalir dari hulu ke hilir
- Indonesia terletak di kutub utara
- $2 + 2 = 5$
- 4,5 adalah bilangan asli

Kalimat pertama dan kedua merupakan kalimat yang bernilai *benar*, sedangkan kalimat ketiga, keempat, dan kelima bernilai *salah*.

Kalimat-kalimat dalam logika haruslah mengandung nilai kebenaran, baik itu bernilai *benar* ataupun *salah*. Jadi, pernyataan dapat didefinisikan sebagai berikut.

Suatu pernyataan (atau proposisi) adalah suatu kalimat yang bernilai *benar* saja atau *salah saja*. Dengan kata lain, tidak sekaligus kedua-duanya.

Dalam logika, suatu pernyataan disimbolkan dengan huruf kecil, seperti p , q , r , s , dan sebagainya, misalnya pada pernyataan-pernyataan berikut.

p : Tiga puluh sembilan adalah bilangan prima

q : $39 - 8 > 20$

Dari pernyataan-pernyataan tersebut diketahui bahwa pernyataan p bernilai salah, sedangkan pernyataan q bernilai benar. Nilai kebenaran pernyataan p dinotasikan dengan $\tau(p)$ (τ dibaca: *Taw*). Demikian pula untuk pernyataan q , nilai kebenarannya dinotasikan dengan $\tau(q)$. Dengan demikian, pernyataan tersebut dapat dinotasikan $\tau(p) = S$ (salah) dan $\tau(q) = B$ (benar).

Contoh Soal 1.1

Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan berikut.

- p : Semua sekretaris adalah perempuan,
- q : Satu hari lamanya 24 jam,
- r : Ikan dapat hidup di darat,
- s : π adalah bilangan irasional,
- t : Jam kantor adalah 8 jam,



Sumber : www.pearsall.k12.tx.us

Gambar 1.1

"Semua sekretaris adalah perempuan" adalah pernyataan yang bernilai salah.



Sumber: *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia*, 2002

Di Abad ke-19, ahli matematika berkebangsaan Inggris, **George Boole** (1815-1864) yang tidak pernah menyelesaikan kuliahnya, ternyata menjadi profesor matematika. Beliau menyelidiki hukum dasar logika dan menyatakannya dalam istilah aljabar. Pada tahun 1854, ia menerbitkan aljabar temuannya, yaitu suatu cara untuk menggabungkan lambang-lambang yang menyatakan aturan-aturan logika secara sempurna. Sekarang, Anda mengenal aljabar Boolean yang dapat menjelaskan logika matematika pada komputer.

Sumber: *Finite Mathematics and Its Application*, 2nd Edition, 1994

Jawab:

- a. $\tau(p) = S$ d. $\tau(s) = B$
 b. $\tau(q) = B$ e. $\tau(t) = S$
 c. $\tau(r) = S$

Tidak semua kalimat merupakan pernyataan. Kalimat-kalimat yang tidak mengandung nilai kebenaran, seperti kalimat perintah, kalimat tanya, dan kalimat harapan bukan merupakan pernyataan. Kalimat yang nilai kebenarannya relatif juga *bukan* pernyataan.

Berikut ini adalah kalimat-kalimat yang bukan pernyataan.

1. Berapa nilai ulanganmu? (kalimat tanya)
2. Tolong buka pintunya! (kalimat perintah)
3. Mudah-mudahan besok hujan. (kalimat harapan)
4. Barang ini mahal.

Kalimat ke-4 bukan merupakan pernyataan karena kalimat ini memiliki nilai kebenarannya relatif, yaitu ukuran mahal untuk setiap orang bisa berbeda. Menurut seseorang mahal, bisa jadi menurut orang lain tidak mahal.

2. Kalimat Terbuka

Kalimat terbuka adalah kalimat yang belum dapat ditentukan nilai kebenarannya. Kalimat terbuka selalu mengandung peubah-peubah atau variabel-variabel.

Perhatikan beberapa kalimat berikut.

- $x + 2 < 4$, x bilangan real.
- $y = 2x + 1$, x dan y bilangan real.
- B dijuluki kota hujan.

Kalimat-kalimat tersebut tidak dapat ditentukan benar atau salahnya, sehingga kalimat-kalimat itu belum dapat dikatakan sebagai pernyataan. Kalimat yang belum dapat ditentukan nilai kebenarannya disebut *Kalimat Terbuka*. Ciri kalimat terbuka adalah adanya *peubah* atau *variabel*.

Pada $x + 2 < 4$, variabelnya adalah x . Untuk $y = 2x + 1$ memiliki 2 variabel, yaitu x dan y . Adapun untuk " B dijuluki kota hujan" variabelnya adalah B .

Kalimat terbuka dapat diubah menjadi suatu pernyataan jika peubah-peubah atau variabel-variabel dalam kalimat tersebut diganti dengan suatu nilai (dapat berupa bilangan,

nama kota, nama penyanyi dan sebagainya) sehingga kalimat tersebut mempunyai nilai kebenaran. Kalimat terbuka pada kalimat-kalimat tersebut dapat menjadi pernyataan yang benar jika peubahnya berturut-turut diganti dengan $x = 1$, $x = 0$ dan $y = 3$, dan $B = \text{Bogor}$.

Nilai-nilai untuk peubah pada kalimat terbuka yang membuat kalimat terbuka tersebut menjadi pernyataan yang benar disebut *penyelesaian*. Himpunan dari nilai-nilai ini disebut *himpunan penyelesaian*.

Himpunan penyelesaian $x + 2 < 4$ adalah $\{x \mid x < 2, x \in R\}$. Himpunan penyelesaian $y = 2x + 1$ adalah $\{(x, y) \mid y = 2x + 1, x, y \in R\}$. Himpunan penyelesaian dari " B dijuluki kota hujan" adalah $\{\text{Bogor}\}$. Jika peubah dalam kalimat terbuka tidak diganti dengan nilai-nilai pada himpunan penyelesaiannya, kalimat terbuka tersebut akan menjadi pernyataan yang salah. Misalnya,

- Kalimat " $x + 2 < 4$, x bilangan real" akan menjadi pernyataan salah jika x diganti dengan 3.
- Kalimat " $y = 2x + 1$, x dan y bilangan real" akan menjadi pernyataan salah jika x dan y berturut-turut diganti dengan 0 dan 4.
- Kalimat " B dijuluki kota hujan" akan menjadi pernyataan salah jika B diganti dengan Bali.

3. Ingkaran

Suatu pernyataan yang diperoleh dari pernyataan sebelumnya dan mempunyai nilai kebenaran yang *berlawanan* dengan pernyataan sebelumnya disebut *ingkaran* atau *negasi*.

Ingkaran dari suatu pernyataan diperoleh dengan menambahkan kata "bukan" pada pernyataan tersebut. Berikut adalah definisi ingkaran.

Ingkaran dari pernyataan p , dilambangkan dengan $\sim p$ dan dibaca "bukan p ", yaitu suatu pernyataan yang nilai kebenarannya berlawanan dengan nilai kebenaran p . Jika p benar maka $\sim p$ salah dan jika p salah maka $\sim p$ benar.

p	$\sim p$
B	S
S	B

Solusi Cerdas

"Jika nilai Matematika Ani lebih dari 4 maka Ani lulus ujian". Negasi dari pernyataan tersebut adalah

- Jika nilai Matematika Ani lebih dari 4 maka Ani tidak lulus ujian
- Jika nilai Matematika Ani kurang dari 4 maka Ani lulus ujian
- Jika Ani lulus maka nilai Matematikanya lebih dari 4
- Nilai Matematika Ani lebih dari 4 dan Ani tidak lulus ujian
- Nilai Matematika Ani kurang dari 4 atau Ani lulus ujian

Jawab:

p : Nilai Matematika Ani lebih dari 4

q : Ani lulus ujian

Implikasi $p \Rightarrow q$

Ingkarannya adalah

$\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ atau "Nilai Matematika Ani lebih dari 4 dan Ani tidak lulus ujian"

Jawaban: **d**

UN SMK, 2004



Sumber : upload.wikimedia.org

Gambar 1.2

Ingkaran "penguin bukan burung" adalah "penguin adalah burung".

Contoh Soal 1.2

Tentukan ingkaran dari pernyataan berikut, kemudian tentukanlah nilai kebenarannya.

- p : Ibukota Jawa Barat adalah Surabaya.
- q : Penguin bukan burung.
- r : $1 + 1 = 2$
- t : Semua bilangan cacah adalah bilangan real.
- u : utang dagang termasuk pada kewajiban.

Jawab:

- p : Ibukota Jawa Barat adalah Surabaya.
 $\sim p$: Ibukota Jawa Barat bukan Surabaya.
 $\tau(p) = S, \tau(\sim p) = B$
- q : Penguin bukan burung.
 $\sim q$: Penguin adalah burung.
 $\tau(q) = S, \tau(\sim q) = B$
- r : $1 + 1 = 2$
 $\sim r$: $1 + 1 \neq 2$
 $\tau(r) = B, \tau(\sim r) = S$
- t : Semua bilangan cacah adalah bilangan real.
 $\sim t$: Ada bilangan cacah yang bukan bilangan real.
 $\tau(t) = B, \tau(\sim t) = S$
- u : utang dagang termasuk pada kewajiban.
 $\sim u$: surat-surat berharga termasuk pada kewajiban.
 $\tau(u) = B, \tau(\sim u) = S$

Evaluasi Materi 1.1

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

- Tentukan manakah dari kalimat-kalimat berikut yang merupakan pernyataan dan mana yang bukan pernyataan.
 - Saya suka akuntansi.
 - Harga perolehan sama dengan harga beli.
 - Apa yang dimaksud dengan pernyataan?
 - $4 + (-4) = 0$.
 - $\sqrt{2}$ adalah bilangan real.
 - $-6 > -5$
 - Hati-hati di jalan.
 - 3 adalah faktor dari 12.
 - Laporan keuangan harus dibuat tiap awal bulan.
 - Jika $4 < 5$ maka $2 < 5$
 - Akar dari $x^2 = 1$ adalah 1 atau -1
 - Harta adalah utang ditambah modal.

2. Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan berikut.
 - a. Deposito termasuk aktiva lancar.
 - b. 8 merupakan bilangan komposit.
 - c. $\log 10 = 1$
 - d. Perkalian bilangan bulat dengan bilangan ganjil akan menghasilkan bilangan ganjil.
 - e. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ adalah matriks satuan.
 - f. 51 habis dibagi 3.
 - g. Garis $y = x$ melewati titik $(0, 0)$.
 - h. 93 adalah bilangan prima.
 - i. Akar dari $x^2 = 4$ adalah 4 atau -4 .
 - j. Faktur adalah bukti pembelian atau penjualan barang secara kredit.
 - k. $2\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional.
3. Gantilah variabel-variabel pada kalimat-kalimat terbuka berikut sehingga kalimat tersebut menjadi pernyataan yang benar.
 - a. $x - 3 = 4$
 - b. $2x = 3$
 - c. $\log 100 = 2x$
 - d. pengorbanan untuk memperoleh penghasilan disebut A.
 - e. $y = x + 4$
 - f. $x^2 - 4x + 3 = 0$
 - g. $y < 2x$
 - h. $x^2 < 4$
 - i. x adalah salah satu bukti transaksi.
 - j. $y + 3x > 3$
4. Buatlah ingkaran dari pernyataan-pernyataan berikut.
 - a. Manusia adalah makhluk sosial.
 - b. Semua bilangan bulat adalah bilangan real.
 - c. $\sqrt{2}$ adalah bilangan rasional.
 - d. Di Kepulauan Seribu ada seribu pulau.
 - e. $2^4 = 2 + 2 + 2 + 2$
 - f. Beberapa provinsi di Indonesia adalah daerah istimewa.
 - g. $\log(ab) = \log a + \log b$
 - h. Semua penduduk Indonesia wajib mempunyai KTP.
 - i. Beberapa negara tidak mempunyai kepala pemerintahan.
 - j. Posting merupakan pemindahan bukuan catatan jurnal ke buku besar.

B Pernyataan Majemuk

Pada bagian sebelumnya, pernyataan-pernyataan yang Anda pelajari lebih banyak merupakan pernyataan-pernyataan tunggal. Jika pernyataan-pernyataan tunggal ini digabungkan menggunakan kata *dan*, *atau*, *jika...maka...*, atau *...jika dan hanya jika...* maka akan terbentuk suatu *pernyataan majemuk*. Perhatikan pernyataan-pernyataan berikut.

- Pontianak adalah ibu kota provinsi Kalimantan Barat.
- Pontianak dilalui garis khatulistiwa.

Kedua pernyataan tersebut adalah pernyataan tunggal. Kedua pernyataan tunggal tersebut jika Anda gabung dengan kata hubung "dan" akan menjadi kalimat majemuk, "Pontianak adalah ibu kota provinsi Kalimantan Barat dan dilalui garis khatulistiwa".



Sumber : www.gemari.or.id

Gambar 1.3

"Pontianak adalah ibu kota Provinsi Kalimantan Barat dan dilalui garis khatulistiwa" merupakan pernyataan majemuk.

Terdapat empat bentuk pernyataan majemuk yang terbentuk dari dua pernyataan, yaitu konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi.

1. Konjungsi

Konjungsi adalah pernyataan majemuk yang dibentuk dari dua pernyataan yang dihubungkan dengan kata "dan". Kata "dan" dilambangkan dengan " \wedge ". Jika p dan q pernyataan tunggal maka konjungsi dari p dan q dinyatakan dengan

$$p \wedge q$$



Sumber : wolstenholme.com

Gambar 1.4

"Perahu berlayar dengan mesin dan angin" adalah pernyataan konjungsi.

Contoh Soal 1.3

Tentukan konjungsi dari pernyataan-pernyataan berikut.

- p : Perahu berlayar dengan bantuan mesin.
 q : Perahu berlayar dengan bantuan angin.
- r : Gaji pegawai termasuk beban operasional
 s : Harga pokok barang yang dijual termasuk beban operasional
- t : $\sqrt{\frac{5}{2}}$ adalah bilangan irasional
 u : $\frac{5}{2}$ adalah bilangan rasional

Jawab:

- $p \wedge q$: perahu berlayar dengan bantuan mesin dan angin
- $r \wedge s$: gaji pegawai dan harga pokok barang yang dijual termasuk beban operasional.
- $t \wedge u$: $\sqrt{\frac{5}{2}}$ adalah bilangan irasional dan $\frac{5}{2}$ adalah bilangan rasional

Misalkan p dan q adalah suatu pernyataan maka terdapat 4 kemungkinan komposisi nilai kebenaran dari p dan q pada suatu konjungsi $p \wedge q$. Komposisi-komposisi tersebut di antaranya:

- p benar dan q benar
- p benar dan q salah
- p salah dan q benar
- p salah dan q salah

Konjungsi hanya bernilai benar jika kedua pernyataannya bernilai benar. Selain dari itu bernilai salah. Pada Contoh Soal 1.3, keempat konjungsi bernilai benar.

Nilai-nilai kebenaran dari suatu konjungsi dapat ditunjukkan dengan tabel nilai kebenaran sebagai berikut.

p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Contoh Soal 1.4

Jika pernyataan p bernilai benar dan q bernilai salah, tentukan nilai kebenaran dari konjungsi-konjungsi berikut.

- a. $p \wedge q$ c. $\sim q \wedge p$
b. $p \wedge \sim q$ d. $q \wedge p$

Jawab:

- a. p benar dan q salah maka $\tau(p \wedge q) = S$
b. p benar dan $\sim q$ benar maka $\tau(p \wedge \sim q) = B$
c. $\sim q$ benar dan p benar maka $\tau(\sim q \wedge p) = B$
d. q salah dan p benar maka $\tau(q \wedge p) = S$

Pada Contoh Soal 1.4 tampak nilai kebenaran $p \wedge q$ sama dengan nilai kebenaran $q \wedge p$ dan nilai kebenaran $p \wedge \sim q$ sama dengan nilai kebenaran $\sim q \wedge p$. Dengan demikian, dapat diuji bahwa pada konjungsi berlaku hukum komutatif.

Jika p dan q adalah pernyataan maka berlaku hukum komutatif $p \wedge q \equiv q \wedge p$.

Contoh Soal 1.5

Tentukan nilai-nilai x sehingga kalimat-kalimat berikut menjadi konjungsi yang benar.

- a. $x + (-2) = 5$ dan $2 + (-2) = 0$
b. $x^2 + x - 6 = 0$ dan $x^2 = 4$, $x \in R$
c. $x > 0$ dan $x^2 - 3x + 2 = 0$, $x \in R$

Jawab:

- a. Untuk menjadi konjungsi yang benar, kedua kalimat pada $x + (-2) = 5$ dan $2 + (-2) = 0$ harus bernilai benar. $2 + (-2) = 0$ adalah pernyataan benar. $x + (-2) = 5$ akan menjadi pernyataan benar jika x diganti dengan 7. Dengan demikian, kalimat $x + (-2) = 5$ dan $2 + (-2) = 0$ akan menjadi konjungsi benar jika $x = 7$.
- b. Agar $x^2 + x - 6 = 0$ dan $x^2 = 4$, $x \in R$ bernilai benar, harus dicari nilai x yang memenuhi kedua persamaan.

Jelajah Matematika



Sumber: *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia*, 2002

Kode Biner dalam Program Komputer

George Boole (1815 - 1864), ahli matematika Inggris adalah orang pertama yang menggantikan nilai kebenaran "benar" dengan "1" dan nilai kebenaran "salah" dengan "0". Sistem bilangan yang hanya terdiri atas dua macam bilangan tersebut dinamakan sistem biner. Temuan ini sangat berguna untuk menyusun program komputer. Proses pengubahan data ke dalam sistem bilangan biner disebut konversi biner, dan notasi yang dihasilkan dari konvensi ini dinamakan kode biner.

Sumber: *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia*, 2002

Notes

Pada konjungsi berlaku hukum komutatif $p \wedge q \equiv q \wedge p$

Notes

Notasi \equiv dibaca ekuivalen. Dua pernyataan disebut *equivalen* jika nilai kebenaran kedua pernyataan tersebut sama. Nilai kebenarannya dapat ditunjukkan dengan membuat tabel nilai kebenaran.

Pertama, harus dicari terlebih dahulu himpunan penyelesaian dari masing-masing persamaan. Himpunan penyelesaian dari $x^2 + x - 6 = 0$ adalah $\{-3, 2\}$.

Himpunan penyelesaian dari $x^2 = 4$ adalah $\{-2, 2\}$.

Kemudian, substitusikan $x = -3$, $x = -2$, dan $x = 2$ pada $x^2 + x - 6 = 0$ dan $x^2 = 4$ diperoleh:

- untuk $x = -3$: $(-3)^2 + (-3) - 6 = 9 - 3 - 6 = 0$
 $(-3)^2 = 9 \neq 4$
 $x = -3$ tidak memenuhi persamaan $x^2 = 4$. Jadi, $x = -3$ bukan penyelesaian untuk $x^2 + x - 6 = 0$ dan $x^2 = 4$, $x \in R$.
- Untuk $x = -2$: $(-2)^2 + (-2) - 6 = 4 - 2 - 6 = -4 \neq 0$
 $(-2)^2 = 4$
 $x = -2$ tidak memenuhi persamaan $x^2 + x - 6 = 0$. Jadi, $x = -2$ bukan penyelesaian untuk $x^2 + x - 6 = 0$ dan $x^2 = 4$, $x \in R$.
- Untuk $x = 2$: $(2)^2 + 2 - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$
 $2^2 = 4$
 $x = 2$ memenuhi persamaan $x^2 + x - 6 = 0$ dan $x^2 = 4$. Jadi $x = 2$ penyelesaian untuk $x^2 + x - 6 = 0$ dan $x^2 = 4$, $x \in R$.
 Jadi, kalimat $x^2 + x - 6 = 0$ dan $x^2 = 4$, $x \in R$ akan menjadi konjungsi yang benar jika $x = 2$.

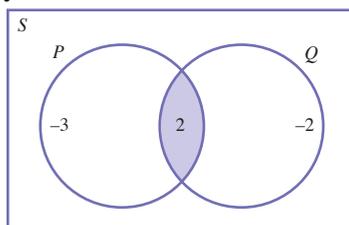
- c. Dengan cara yang sama dengan (b), diperoleh kalimat $x > 0$ dan $x^2 - 3x + 2 = 0$, $x \in R$ akan menjadi konjungsi jika $x = 1$ atau $x = 2$. Jadi, kalimat $x > 0$ dan $x^2 - 3x + 2 = 0$, $x \in R$ mempunyai himpunan penyelesaian $\{1, 2\}$.

Perhatikan kembali Contoh Soal 1.5. Pada Contoh Soal 1.5 (b), himpunan penyelesaian dari $x^2 + x - 6 = 0$ adalah $P = \{-3, 2\}$ dan himpunan penyelesaian dari $x^2 = 4$ adalah $Q = \{-2, 2\}$.

Oleh karena itu, $x = 2$ adalah irisan dari P dan Q , yaitu

$$P \cap Q = \{-3, 2\} \cap \{-2, 2\} = \{2\}.$$

Diagram Vennnya adalah

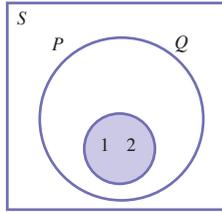


Untuk Contoh Soal 1.5 (c), misalkan himpunan penyelesaian dari $x > 0$ adalah $P = \{x \mid x > 0, x \in R\}$ dan himpunan penyelesaian dari $x^2 - 3x + 2 = 0$ adalah $Q = \{1, 2\}$.

Oleh karena itu, $x = 1$ atau $x = 2$ adalah irisan dari P dan Q , yaitu

$$P \cap Q = \{x \mid x \in R\} \cap \{1, 2\} = \{1, 2\}.$$

Diagram Vennnya adalah



Dengan demikian, uraian di atas menggambarkan ketentuan berikut. Jika P adalah himpunan penyelesaian untuk $p(x)$ dan Q adalah himpunan penyelesaian untuk $q(x)$, himpunan penyelesaian dari $p(x) \wedge q(x)$ adalah $P \cap Q$.

Contoh Soal 1.6

Diketahui $p(x) = x^2 - x - 2 \geq 0$, $q(x) = x^2 - 4x + 3 = 0$, $x \in R$. Tentukan himpunan penyelesaian dari $p(x) \wedge q(x)$ sehingga kalimat tersebut menjadi konjungsi yang benar. Kemudian, gambarkan diagram Vennnya.

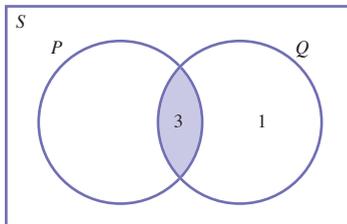
Jawab:

Himpunan penyelesaian dari $p(x) = x^2 - x - 2 \geq 0$ adalah $P = \{x \mid x \leq -1 \text{ atau } x \geq 2, x \in R\}$.

Himpunan penyelesaian dari $q(x) = x^2 - 4x + 3 = 0$ adalah $Q = \{1, 3\}$.

Himpunan penyelesaian dari $p(x) \wedge q(x)$ adalah $P \cap Q = \{x \mid x \leq -1 \text{ atau } x \geq 2, x \in R\} \cap \{1, 3\} = \{3\}$

Diagram Vennnya:



Kata Kunci

- konjungsi
- disjungsi
- implikasi
- biimplikasi

2. Disjungsi

Disjungsi adalah pernyataan majemuk yang dibentuk dari dua pernyataan tunggal yang dihubungkan dengan kata "atau". Kata *atau* dilambangkan dengan " \vee ". Jika p dan q pernyataan tunggal maka disjungsi dari p dan q dinyatakan dengan

$$p \vee q$$

Perhatikan beberapa pernyataan disjungsi berikut.

1. Timor Leste terletak di Timur Tengah *atau* di Asia Tenggara.
2. Air adalah zat cair *atau* padat.
3. Akar dari $x^2 = 2$ adalah -2 *atau* 2 .
4. Kas adalah jumlah uang yang tersedia di tangan *atau* uang perusahaan yang disimpan di bank.

Seperti juga konjungsi, terdapat 4 kemungkinan komposisi dari p dan q pada suatu disjungsi $p \vee q$, yaitu:

- p benar dan q benar
- p benar dan q salah
- p salah dan q benar
- p salah dan q salah

Disjungsi hanya bernilai salah jika kedua pernyataannya bernilai salah. Selain dari itu, disjungsi bernilai benar. Perhatikan tabel nilai kebenaran berikut.

p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

1. "Timor Leste terletak di Timur Tengah" adalah pernyataan salah dan "Timor Leste terletak di Asia Tenggara" adalah pernyataan benar maka disjungsi bernilai benar.
2. "Air adalah zat cair" merupakan pernyataan benar dan "air adalah zat padat" merupakan pernyataan salah maka disjungsi bernilai benar.
3. "Akar dari $x^2 = 2$ adalah -2 " merupakan pernyataan benar dan "akar dari $x^2 = 2$ adalah 2 " merupakan pernyataan benar maka disjungsi bernilai benar.
4. "Kas adalah jumlah uang yang tersedia di tangan" adalah pernyataan yang benar dan "Kas adalah uang perusahaan yang disimpan di bank" adalah pernyataan yang benar maka konjungsi bernilai benar.



Sumber : upload.wikimedia.org

Gambar 1.5

"Air adalah zat cair atau padat" merupakan pernyataan disjungsi.

Contoh Soal 1.7

Jika pernyataan p salah dan q benar, tentukan nilai kebenaran dari disjungsi-disjungsi berikut.

- a. $p \vee q$ c. $\sim q \vee p$
b. $p \vee \sim q$ d. $q \vee p$

Jawab:

- a. p salah dan q benar, maka $\tau(p \vee q) = B$
b. p salah dan $\sim q$ salah, maka $\tau(p \vee \sim q) = S$
c. $\sim q$ salah dan p salah, maka $\tau(\sim q \vee p) = S$
d. q benar dan p salah, maka $\tau(q \vee p) = B$

Notes

Pada disjungsi berlaku hukum komutatif
 $p \vee q \equiv q \vee p$

Pada Contoh Soal 1.7 tampak nilai kebenaran $p \vee q$ sama dengan nilai kebenaran $q \vee p$. Nilai kebenaran $p \vee \sim q$ sama dengan nilai kebenaran $\sim q \vee p$. Dengan demikian, pada disjungsi berlaku hukum komutatif, yaitu jika p dan q adalah pernyataan maka berlaku

$$p \vee q \equiv q \vee p \text{ Hukum komutatif}$$

Contoh Soal 1.8

Tentukan himpunan penyelesaian dari kalimat-kalimat berikut sehingga menjadi disjungsi yang benar.

- a. $\log 100 = 2$ atau $\log x = 1$.
b. $x^2 + x - 2 = 0$ atau $x^2 + 5x + 6 = 0, x \in R$.
c. $x^2 - 3x + 2 < 0$ dan $x^2 + x = 0, x \in R$.

Jawab:

- a. $\log 100 = 2$ adalah pernyataan benar.
Oleh karena pernyataan pertama benar, Anda dapat memasukkan nilai-nilai $x > 0$ pada $\log x = 1$ sehingga kalimat $\log 100 = 2$ atau $\log x = 1$ menjadi disjungsi benar. Jadi, himpunan penyelesaian untuk $\log 100 = 2$ atau $\log x = 1$ adalah $\{x \mid x > 0, x \in R\}$.
- b. Misalkan $p(x) = x^2 - 2x + 1 = 0$ dan $q(x) = x^2 + 5x + 6 = 0$.
Agar $p(x) \vee q(x), x \in R$ bernilai benar, cukup dicari nilai x yang memenuhi salah satu persamaan. Oleh karena itu, penyelesaiannya adalah gabungan dari himpunan penyelesaian masing-masing persamaan.
Himpunan penyelesaian dari $p(x) = x^2 + x - 2 = 0$ adalah $P = \{-2, 1\}$.
Himpunan penyelesaian dari $q(x) = x^2 + 5x + 6 = 0$ adalah $Q = \{-2, -3\}$.
Jadi, himpunan penyelesaian dari $x^2 + x - 2 = 0$ atau $x^2 + 5x + 6 = 0, x \in R$ adalah $P \cup Q = \{-2, 1\} \cup \{-2, -3\} = \{-2, -3, 1\}$.

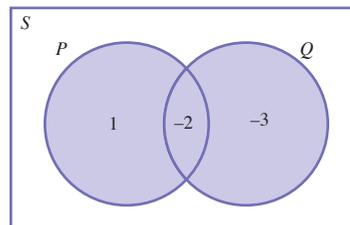
- c. Dengan cara yang sama dengan nomor 2, diperoleh himpunan penyelesaian untuk $x^2 - 3x + 2 < 0$ dan $x^2 + x = 0, x \in R$ adalah $\{x \mid x = -1 \text{ atau } x = 0 = 1 \text{ atau } 1 < x < 2, x \in R\}$.

Perhatikan kembali Contoh Soal 1.8.

Untuk Contoh Soal 1.8 (b), himpunan penyelesaian dari $p(x) = x^2 - 2x + 1 = 0$ adalah $P = \{-2, 1\}$. Himpunan penyelesaian dari $q(x) = x^2 + 5x + 6 = 0$ adalah $Q = \{-2, -3\}$.

Himpunan penyelesaian dari $x^2 + x - 2 = 0$ atau $x^2 + 5x + 6 = 0, x \in R$ adalah $P \cup Q = \{-2, 1\} \cup \{-2, -3\} = \{-2, -3, 1\}$.

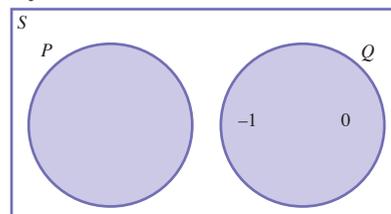
Diagram Vennnya adalah



Untuk Contoh Soal 1.8 (c), misalkan himpunan penyelesaian dari $x^2 - 3x + 2 < 0$ adalah $P = \{x \mid 1 < x < 2, x \in R\}$ dan himpunan penyelesaian dari $x^2 + x = 0$ adalah $Q = \{-1, 0\}$.

Oleh karena, $x = -1$ atau $x = 0$ adalah gabungan dari P dan Q , yaitu $\{x \mid x = -1 \text{ atau } x = 0 \text{ atau } 1 < x < 2, x \in R\}$ atau dapat ditulis $\{x \mid 1 < x < 2, x \in R\} \cup \{-1, 0\} = P \cup Q$.

Diagram Vennnya adalah



Uraian tersebut menggambarkan ketentuan berikut.

Jika P adalah himpunan penyelesaian untuk $p(x)$ dan Q adalah himpunan penyelesaian untuk $q(x)$, maka himpunan penyelesaian dari $p(x) \vee q(x)$ adalah $P \cup Q$.

Contoh Soal 1.9

Diketahui $p(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$, $q(x) = x^2 - 5x + 6 = 0$, $x \in R$. Tentukan himpunan penyelesaian dari $p(x) \vee q(x)$ sehingga kalimat tersebut menjadi disjungsi yang benar. kemudian gambarkan diagram Vennnya.

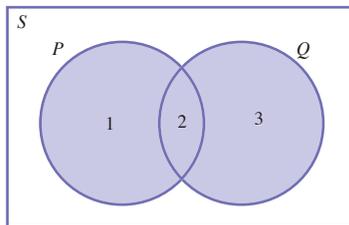
Jawab:

Himpunan penyelesaian dari $p(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$ adalah $P = \{1, 2\}$.

Himpunan penyelesaian dari $q(x) = x^2 - 5x + 6 = 0$ adalah $Q = \{2, 3\}$.

Himpunan penyelesaian dari $p(x) \vee q(x)$ adalah $P \cup Q = \{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$

Diagram Vennnya adalah sebagai berikut.



3. Ingkaran dari Konjungsi dan Disjungsi

a. Ingkaran dari Konjungsi

Ingkaran dari suatu konjungsi mempunyai nilai yang berlawanan dari konjungsi sebelumnya.

Misalkan p dan q adalah suatu pernyataan maka tabel nilai kebenaran dari konjungsi dan ingkarannya adalah sebagai berikut.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$
B	B	B	S
B	S	S	B
S	B	S	B
S	S	S	B

Perhatikan contoh soal berikut agar Anda memahami cara menarik ingkaran dari pernyataan yang mengandung konjungsi.

Jelajah Matematika



Sumber: media-2.web. britannica.com

Russel (1872-1970)

Seorang filsuf dan ahli logika asal Inggris yang memperoleh hadiah nobel untuk bidang kesastraan pada tahun 1950.

Kejeniusannya mulai terlihat pada saat ia kuliah di universitas Cambridges Inggris, di mana ia belajar matematika dan filsofi. Ia berkeinginan mengekspresikan ilmu pengetahuan dalam bentuk yang disederhanakan, dan menghubungkan logika secara langsung dengan matematika.

Sumber: *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia*, 2002

Contoh Soal 1.10

Buatlah tabel nilai kebenaran dari $\sim p \vee \sim q$.

Jawab:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
B	B	S	S	S
B	S	S	B	B
S	B	B	S	B
S	S	B	B	B

Tampak pada Contoh Soal 1.10, nilai kebenaran $\sim p \vee \sim q$ sama dengan $\sim(p \wedge q)$. Dengan demikian, diperoleh

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

Sifat ini dikenal dengan Hukum de Morgan.

Contoh Soal 1.11

Tentukan ingkaran dari pernyataan "2 adalah bilangan genap dan bilangan prima".

Jawab:

Berdasarkan Hukum de Morgan, ingkaran dari "2 adalah bilangan genap dan bilangan prima" adalah "2 bukan bilangan genap atau 2 bukan bilangan prima".

b. Ingkaran dari Disjungsi

Ingkaran dari suatu disjungsi mempunyai nilai yang berlawanan dari disjungsi sebelumnya.

Misalkan p dan q adalah suatu pernyataan, maka tabel nilai kebenaran dari disjungsi dan ingkarannya adalah sebagai berikut.

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$
B	B	B	S
B	S	B	S
S	B	B	S
S	S	S	B

Contoh Soal 1.12

Buatlah tabel nilai kebenaran dari $\sim p \wedge \sim q$.

Jawab:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
B	B	S	S	S
B	S	S	B	S
S	B	B	S	S
S	S	B	B	B

Tampak pada Contoh Soal 1.12, nilai kebenaran $\sim p \wedge \sim q$ sama dengan $\sim(p \vee q)$. Dengan demikian diperoleh

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

Sifat ini dikenal dengan Hukum de Morgan.

Notes

Hukum de Morgan
 $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
 $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

Contoh Soal 1.13

Tentukan ingkaran dari pernyataan " $\sqrt{2}$ adalah bilangan rasional atau bilangan irasional".

Jawab:

Berdasarkan Hukum de Morgan, ingkaran dari " $\sqrt{2}$ adalah bilangan rasional atau bilangan irasional" adalah " $\sqrt{2}$ bukan bilangan rasional dan bukan bilangan irasional".

4. Implikasi

Implikasi adalah pernyataan majemuk yang dibentuk dari dua pernyataan yang dihubungkan dengan "jika ... maka" Implikasi dilambangkan dengan " \Rightarrow ". Jika p dan q adalah pernyataan, maka implikasi "jika p maka q " ditulis $p \Rightarrow q$. Implikasi merupakan pernyataan sebab akibat. Pada implikasi $p \Rightarrow q$, maka p disebut *sebab* atau *alasan*, dan q disebut *akibat* atau *kesimpulan*.

Berikut adalah pernyataan-pernyataan implikasi.

1. Jika tanggal di kalender merah maka hari libur.
2. Jika harga naik maka permintaan turun.
3. Jika $a > 0$ maka $\frac{1}{a} > 0$.
4. Jika 2 faktor dari 6 maka 6 bilangan genap.

Sama seperti konjungsi dan disjungsi, terdapat empat kemungkinan komposisi nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan pada suatu implikasi, yaitu sebagai berikut.

- jika p (alasan) benar maka q (kesimpulan) benar
- jika p (alasan) benar maka q (kesimpulan) salah
- jika p (alasan) salah maka q (kesimpulan) benar
- jika p (alasan) salah maka q (kesimpulan) salah

Implikasi hanya bernilai salah jika pernyataan yang merupakan kesimpulannya bernilai salah. Perhatikan tabel nilai kebenaran berikut.

p (alasan)	q (kesimpulan)	$(p \Rightarrow q)$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Contoh Soal 1.14

Jika pernyataan p benar dan q salah, tentukan nilai kebenaran dari disjungsi-disjungsi berikut.

- a. $p \Rightarrow q$ c. $p \Rightarrow (\sim q \vee p)$
 b. $p \Rightarrow \sim q$ d. $(q \vee p) \Rightarrow \sim q$

Jawab:

- a. p benar dan q salah, maka $\tau(p \Rightarrow q) = S$.
 b. p benar dan $\sim q$ benar, maka $\tau(p \Rightarrow \sim q) = B$.
 c. $\sim q$ benar, p benar, dan $\tau(\sim q \vee p) = B$, maka $\tau(p \Rightarrow (\sim q \vee p)) = B$
 d. q salah, p benar, dan $\tau(q \vee p) = B$, maka $\tau((q \vee p) \Rightarrow \sim q) = B$

Pada contoh berikut, Anda akan mempelajari cara membuat suatu implikasi yang bernilai benar.

Contoh Soal 1.15

Tentukan nilai-nilai x sehingga $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0$, $x \in R$ menjadi implikasi yang benar.

Jawab:

Misalkan $p(x)$: $x^2 - 5x + 6 = 0$ dan $q(x)$: $x^2 - 2x = 0$

Agar $p(x) \Rightarrow q(x)$, $x \in R$ bernilai benar, harus dicari nilai x yang membuat $q(x)$ menjadi pernyataan benar atau nilai x yang membuat $p(x)$ dan $q(x)$ menjadi pernyataan salah.

Himpunan penyelesaian dari $p(x)$: $x^2 - 5x + 6 = 0$ adalah $P = \{2, 3\}$.

Himpunan penyelesaian dari $q(x)$: $x^2 - 2x = 0$ adalah $Q = \{0, 2\}$.

Substitusikan $x = 2$ pada $x^2 - 5x + 6 = 0$ dan $x^2 - 2x = 0$, maka

$$\underset{B}{2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0} \Rightarrow \underset{B}{0^2 - 2 \cdot 0 = 0}$$

Diperoleh implikasi bernilai benar.

Substitusikan $x = 3$ pada $x^2 - 5x + 6 = 0$ dan $x^2 - 2x = 0$, maka

$$\underset{B}{3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0} \Rightarrow \underset{S}{3^2 - 2 \cdot 3 = 3 \neq 0}$$

Diperoleh implikasi bernilai salah.

Substitusikan $x = 0$ pada $x^2 - 5x + 6 = 0$ dan $x^2 - 2x = 0$, maka

$$\underset{S}{0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 6 \neq 0} \Rightarrow \underset{B}{0^2 - 0 \cdot 0 = 0}$$

Diperoleh implikasi bernilai benar.

Selanjutnya, Anda cari nilai x yang membuat $p(x)$ dan $q(x)$ menjadi pernyataan salah.

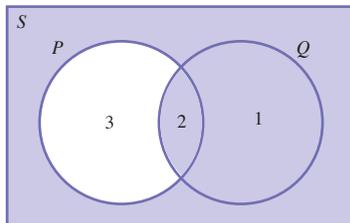
Ambil, $x = 4$. Substitusikan $x = 4$ ke persamaan $x^2 - 5x + 6 = 0$ dan $q(x) : x^2 - 2x = 0$, diperoleh

$$\underset{S}{4^2 - 5 \cdot 4 + 6 = 2 \neq 0} \Rightarrow \underset{S}{4^2 - 2 \cdot 4 = 8 \neq 0}$$

Diperoleh implikasi bernilai benar.

Jadi, $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0$, $x \in R$ hanya akan bernilai salah untuk $x = 3$. Dengan demikian, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x \neq 3, x \in R\}$.

Diagram Vennnya adalah sebagai berikut.



5. Biimplikasi

Biimplikasi adalah pernyataan majemuk yang dibentuk dari dua pernyataan yang dihubungkan dengan kata. Jika dan hanya jika... Kata "*Implikasi*" dilambangkan dengan \Leftrightarrow . Jika p dan q adalah pernyataan, maka biimplikasi " p jika dan hanya jika q " dinyatakan dengan $p \Leftrightarrow q$.

Misalkan:

1. Karyawan akan dapat bonus jika dan hanya jika ia tidak pernah datang terlambat.
2. $\log b = c$ jika dan hanya jika $10^c = b$.
3. $2n$ bilangan genap jika dan hanya jika n bilangan bulat.
4. $a + b = 0$ jika dan hanya jika $b = -a$.



Sumber : www.kanwilpajakkhusus.depkeu.go.id

Gambar 1.6

Karyawan akan dapat bonus jika dan hanya jika ia tidak pernah datang terlambat.

Biimplikasi bernilai benar jika kedua pernyataan yang menyusunnya benar atau kedua pernyataan yang menyusunnya salah. Perhatikan tabel nilai kebenaran berikut.

p	q	$p \leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Contoh Soal 1.16

Buktikan $p \leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

Jawab:

Buktikan dengan membuat tabel nilai kebenaran $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$, kemudian Anda bandingkan hasilnya dengan tabel nilai kebenaran $p \leftrightarrow q$.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
B	B	B	B	B
B	S	S	B	S
S	B	B	S	S
S	S	B	B	B

Soal Pilihan

Tentukan nilai kebenaran dari biimplikasi-biimplikasi berikut.

- $2^3 = 8 \leftrightarrow \sqrt[3]{8} = 2$
- $x^2 = 4 \leftrightarrow x = 2$
- $x^2 > 9 \leftrightarrow x < -3$ atau $x > 3$

Tampak nilai-nilai pada tabel nilai kebenaran $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ sama dengan nilai-nilai pada tabel nilai kebenaran $p \leftrightarrow q$. Dengan demikian, terbukti $p \leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

Contoh Soal 1.17

Jika pernyataan p salah dan q benar, tentukan nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan berikut.

- $p \leftrightarrow q$
- $p \leftrightarrow \sim q$
- $(\sim q \vee p) \leftrightarrow q$
- $q \wedge (\sim p \leftrightarrow q)$

Jawab:

Diketahui p salah dan q benar.

- $\tau(p \leftrightarrow q) = S$
- $\tau(p \leftrightarrow \sim q) = B$
- $\tau(\sim q \vee p) = S$, maka $\tau((\sim q \vee p) \leftrightarrow q) = B$
- $\tau(\sim p \leftrightarrow q) = B$, maka $\tau(q \wedge (\sim p \leftrightarrow q)) = B$

Pada contoh soal berikut, Anda akan mempelajari cara membuat suatu biimplikasi bernilai benar.

Contoh Soal 1.18

Tentukan himpunan penyelesaiannya sehingga menjadi biimplikasi yang benar.

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0, x \in R.$$

Jawab:

Misalkan $p(x)$: $x^2 - 3x + 2 = 0$ dan $q(x)$: $x^2 - x = 0$.

Agar $p(x) \Leftrightarrow q(x)$, $x \in R$ bernilai benar, harus dicari nilai x yang membuat $p(x)$ dan $q(x)$ menjadi pernyataan benar atau nilai x yang membuat $p(x)$ dan $q(x)$ menjadi pernyataan salah.

Himpunan penyelesaian dari $p(x)$: $x^2 - 3x + 2 = 0$ adalah $P = \{1, 2\}$.

Himpunan penyelesaian dari $q(x)$: $x^2 - x = 0$ adalah $Q = \{0, 1\}$.

Substitusikan $x = 1$ pada $x^2 - 3x + 2 = 0$ dan $x^2 - x = 0$, maka

$$\begin{array}{ccc} 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 0 & \Leftrightarrow & 1^2 - 1 = 0 \\ B & & B \end{array}$$

Diperoleh biimplikasi bernilai benar.

Substitusikan $x = 2$ pada $x^2 - 3x + 2 = 0$ dan $x^2 - x = 0$, maka

$$\begin{array}{ccc} 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0 & \Leftrightarrow & 2^2 - 2 = 2 \neq 0 \\ B & & S \end{array}$$

Diperoleh implikasi bernilai salah.

Substitusikan $x = 0$ pada $x^2 - 3x + 2 = 0$ dan $x^2 - x = 0$, maka

$$\begin{array}{ccc} 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2 \neq 0 & \Leftrightarrow & 0^2 - 0 = 0 \\ S & & B \end{array}$$

Diperoleh implikasi bernilai salah.

Selanjutnya, Anda cari nilai x yang membuat $p(x)$ dan $q(x)$ menjadi pernyataan salah.

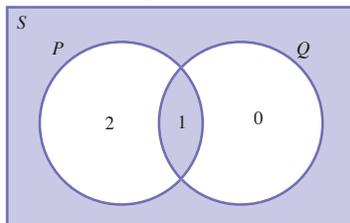
Ambil $x = 10$. Substitusikan $x = 10$ ke persamaan $x^2 - 3x + 2 = 0$ dan $x^2 - x = 0$, diperoleh

$$\begin{array}{ccc} 10^2 - 3 \cdot 10 + 2 = 72 \neq 0 & \Leftrightarrow & 10^2 - 10 = 90 \neq 0 \\ S & & S \end{array}$$

Diperoleh implikasi bernilai benar.

Jadi, $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0$, $x \in R$ hanya akan bernilai salah untuk $x = 0$ dan $x = 2$. Dengan demikian, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x \neq 0 \text{ dan } x \neq 2, x \in R\}$.

Diagram Vennnya adalah sebagai berikut.



6. Ingkaran dari Implikasi dan Biimplikasi

a. Ingkaran dari Implikasi

Ingkaran dari suatu implikasi mempunyai nilai yang berlawanan dari implikasi sebelumnya.

Misalkan p dan q adalah suatu pernyataan yang berbeda, maka tabel nilai kebenaran dari implikasi dan ingkarannya adalah sebagai berikut.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$
B	B	B	S
B	S	S	B
S	B	B	S
S	S	B	S

Contoh Soal 1.19

Buatlah tabel nilai kebenaran dari $p \wedge \sim q$.

Jawab:

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
B	B	S	S
B	S	B	B
S	B	S	S
S	S	B	S

Tampak pada Contoh Soal 1.19 nilai kebenaran untuk $\sim(p \Rightarrow q)$ sama dengan $p \wedge \sim q$. Dengan demikian, diperoleh

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

Dari hubungan tersebut, Anda peroleh hubungan implikasi dengan disjungsi, yaitu

$$p \Rightarrow q \equiv \sim(p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee q$$

Contoh Soal 1.20

Tentukan ingkaran dari pernyataan:
Jika harga naik maka permintaan turun.

Jawab:

Misalkan p : harga naik dan q : permintaan turun, maka pernyataan di atas menjadi $p \Rightarrow q$.

Telah diketahui bahwa $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ maka ingkaran dari pernyataan "Jika harga naik maka permintaan turun" adalah "Harga naik dan permintaan tidak turun".

Soal Pilihan

Tentukanlah ingkaran dari $\sqrt{14} < 4$ jika dan hanya jika $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

b. Ingkaran dari Biimplikasi

Sebelumnya telah diketahui bahwa pernyataan berikut ekuivalen $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ dan $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$.

maka diperoleh

$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)] \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

atau dapat ditulis

$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

Lebih jelasnya, pelajarilah Contoh Soal 1.21 berikut.

Contoh Soal 1.21

Tentukan ingkaran dari pernyataan berikut " x adalah segiempat jika dan hanya jika x mempunyai 4 titik sudut".

Jawab:

Misalkan,

p : x adalah segiempat

q : x mempunyai 4 titik sudut, maka pernyataan di atas menjadi $p \Leftrightarrow q$.

Diketahui $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$.

selanjutnya diperoleh ingkaran dari pernyataan " x adalah segiempat jika dan hanya jika x mempunyai 4 titik sudut" adalah " x adalah segiempat dan tidak mempunyai 4 titik sudut atau x mempunyai 4 titik sudut dan x bukan segiempat".

Evaluasi Materi 1.2

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

1. Tentukan nilai kebenaran konjungsi-konjungsi berikut.

- Jakarta dan Kuala Lumpur adalah kota besar di Indonesia.
- Indonesia terdiri atas 30 Provinsi dan setiap Provinsi di Indonesia memiliki ibukota.
- Thailand dan Perancis dikepalai oleh raja.
- 5 adalah bilangan asli dan bulat

e. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ adalah matriks identitas.

f. $\log 25 = {}^5\log 2$ dan $\log 4 = {}^2\log 2$

2. Jika p benar dan q salah, tentukan nilai kebenaran dari konjungsi-konjungsi berikut.

- $p \wedge q$
- $\sim p \wedge q$
- $p \wedge \sim q$
- $\sim(p \wedge q)$
- $\sim(\sim p \wedge q)$
- $\sim p(\wedge \sim q)$
- $\sim p \wedge \sim q$

3. Tentukan nilai x sehingga kalimat-kalimat berikut menjadi konjungsi yang benar.

- $x + 8 = 5$ dan $4 + 8 = 12$
- $(-5)^2 = 25$ dan $x^2 = 4$
- $\log 10 = 1$ dan $\log x = 2$

4. Jika p salah dan q benar, tentukan nilai kebenaran dari disjungsi-disjungsi berikut.

- $p \vee q$
- $\sim p \vee q$
- $p \vee \sim q$
- $\sim(p \vee q)$
- $\sim(\sim p \vee q)$
- $\sim p(\vee \sim q)$
- $\sim p \vee \sim q$

5. Tentukan nilai kebenaran disjungsi-disjungsi berikut.

- Ibukota Nusa Tenggara Timur adalah Mataram atau Kupang.

- Susilo Bambang Yudhoyono adalah Presiden RI ke-6 atau ke-7.



Sumber : www.antaratv.com

- $\frac{1}{2}$ adalah bilangan rasional atau irasional.

- Neraca atau laporan perubahan modal termasuk laporan keuangan.

6. Diketahui $p(x) = x^2 + 4x - 5 = 0$ dan $q(x) = x^2 - 1 = 0, x \in R$. Tentukan himpunan penyelesaian dari $p(x)$ dan $q(x)$ sehingga kalimat tersebut menjadi disjungsi yang benar dan gambarkan diagram Vennnya.

7. Tentukan nilai kebenaran dari implikasi-implikasi berikut.

- Jika Jakarta adalah ibukota Indonesia, maka Jakarta terletak di Indonesia.
- Jika suku Dayak ada di Sumatra maka suku Dayak ada di Indonesia.

c. Jika $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$ maka $\sqrt[3]{8} = 2$.

d. $\log 6 = (\log 2)(\log 3)$ dan $\log 8 = 2 \log 3$

8. Jika p salah dan q benar, tentukan nilai kebenaran dari implikasi-implikasi berikut.

- $p \Rightarrow q$
- $\sim p \Rightarrow q$
- $\sim(\sim p \Rightarrow q)$
- $\sim p(\Rightarrow \sim q)$

9. Tentukan nilai kebenaran biimplikasi-biimplikasi berikut.

- Jakarta adalah ibu kota Indonesia jika dan hanya jika pusat pemerintahan Indonesia ada di Jakarta.
- Inggris adalah kerajaan jika dan hanya jika Inggris dikepalai oleh seorang raja.

- c. $\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional jika dan hanya jika bilangan irasional adalah bilangan yang dapat ditulis dalam bentuk pembagian dua bilangan bulat.
- d. $\log 10 = 2$ jika dan hanya jika $\log 100 = 3$.

10. Jika p benar dan q salah, tentukan nilai kebenaran dari biimplikasi-biimplikasi berikut.
- a. $p \Leftrightarrow q$ c. $p \Leftrightarrow \sim q$
 b. $\sim(\sim p \Leftrightarrow q)$ d. $\sim(p \Leftrightarrow q)$

C Invers, Konvers, dan Kontraposisi

Perhatikan pernyataan implikasi berikut. "Jika Ira seorang penyanyi, maka ia seorang artis" Pada pernyataan ini, p : "Ira seorang penyanyi" sebagai hipotesis dan q : "Ia seorang artis" sebagai konklusi. Anda dapat membentuk beberapa pernyataan berhubungan dengan implikasi $p \Rightarrow q$, seperti

$q \Rightarrow p$: Jika Ira seorang artis, maka ia seorang penyanyi.
 $\sim p \Rightarrow \sim q$: Jika Ira *bukan* seorang penyanyi, maka ia *bukan* seorang artis.
 $\sim p \Rightarrow \sim q$: Jika Ira *bukan* seorang artis, maka ia *bukan* penyanyi.

Pernyataan $q \Rightarrow p$ disebut *konvers*, $\sim p \Rightarrow \sim q$ disebut *invers*, dan $\sim q \Rightarrow \sim p$ disebut *kontraposisi*. Dari uraian di atas dapat disimpulkan sebagai berikut.

- $\sim p \Rightarrow \sim q$ disebut invers dari $p \Rightarrow q$
- $q \Rightarrow p$ disebut konvers dari $p \Rightarrow q$
- $\sim q \Rightarrow \sim p$ disebut kontraposisi dari $p \Rightarrow q$

Pelajarilah contoh berikut agar Anda memahami penggunaan dari konvers, invers, dan kontraposisi.

Contoh Soal 1.22

Diketahui

p : I adalah matriks identitas ordo 2

$$q: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} I = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Nyatakan pernyataan-pernyataan berikut dalam kalimat yang benar.

- a. $p \Rightarrow q$ c. $q \Rightarrow p$
 b. $\sim q \Rightarrow \sim p$ d. $\sim p \Rightarrow \sim q$

Jawab:

- a. Jika I adalah matriks identitas ordo 2 maka $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} I = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Kata Kunci

- invers
- konvers
- kontraposisi

- b. Jika $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} I \neq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ maka I bukan matriks identitas ordo 2.
- c. Jika $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} I = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ maka I adalah matriks identitas ordo 2.
- d. Jika I bukan matriks identitas ordo 2 maka $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} I \neq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Notes

- Ingkaran dari implikasi adalah
 $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$
- Ingkaran dari konvers:
 $q \Rightarrow p$ adalah
 $\sim(p \Rightarrow p) \equiv q \wedge \sim p$
- Ingkaran dari invers:
 $\sim p \Rightarrow \sim q$ adalah
 $\sim(\sim p \Rightarrow \sim q) \equiv \sim p \wedge q \equiv q \wedge \sim p$
- Ingkaran dari kontraposisi:
 $\sim q \Rightarrow \sim p$ adalah
 $\sim(\sim p \Rightarrow \sim p) \equiv \sim q \wedge p \equiv p \wedge \sim q$

Bagaimanakah hubungan antara implikasi $p \Rightarrow q$ dengan invers, konvers, dan kontraposisinya? Perhatikan tabel nilai kebenaran berikut.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$q \Rightarrow p$	$\sim p \Rightarrow \sim q$
B	B	S	S	B	B	B	B
B	S	S	B	S	S	B	B
S	B	B	S	B	B	S	S
S	S	B	B	B	B	B	B

Tampak dari tabel tersebut nilai kebenaran implikasi $p \Rightarrow q$ sama dengan nilai kebenaran kontraposisinya $\sim q \Rightarrow \sim p$. Nilai kebenaran konvers suatu implikasi $q \Rightarrow p$ sama dengan invers dari implikasinya $\sim p \Rightarrow \sim q$. Dengan demikian, diperoleh

$$\begin{aligned} p \Rightarrow q &\equiv \sim q \Rightarrow \sim p \\ q \Rightarrow p &\equiv \sim p \Rightarrow \sim q \end{aligned}$$

Pada Contoh Soal 1.22, pernyataan "Jika I adalah matriks identitas ordo 2, maka $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} I = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ " ekuivalen dengan

"Jika $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} I \neq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ maka I bukan matriks identitas ordo 2".

Pernyataan "Jika $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} I = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ maka I adalah matriks identitas ordo 2" ekuivalen dengan "Jika I bukan matriks identitas ordo 2 maka $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} I \neq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ".

Contoh Soal 1.23

Tentukan invers, konvers, dan kontraposisi dari implikasi-implikasi berikut.

- a. Jika tidak ada pejabat korupsi maka pembangunan berjalan lancar.

- b. Jika waktu istirahat tiba maka Rifki dan Rizky meninggalkan ruangan.

Jawab:

- a. Invers dari pernyataan "Jika tidak ada pejabat korupsi maka pembangunan berjalan lancar" adalah "Jika ada pejabat korupsi maka pembangunan tidak lancar".
Konversnya adalah "Jika pembangunan lancar maka tidak ada pejabat korupsi".
Kontraposisinya adalah "Jika pembangunan tidak lancar maka ada pejabat korupsi".
- b. Invers dari pernyataan " Jika waktu istirahat tiba maka Rifki dan Rizky meninggalkan ruangan".
Konversnya adalah "Jika Rifky dan Rizky meninggalkan ruangan maka waktu istirahat tiba".
Kontraposisinya adalah "Jika Rifky dan Rizky tidak meninggalkan ruangan maka waktu istirahat belum tiba".

Evaluasi Materi 1.3

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

- Tentukan invers, konvers, dan kontraposisi dari implikasi berikut.
 - Jika Bandung ibukota Jawa Barat maka Bandung terletak di Jawa Barat.
 - Jika Fandi suku Jawa maka Fandi orang Indonesia.
 - Jika Pak Odi anggota DPR maka Pak Odi anggota MPR.
 - Jika 4 bilangan bulat maka 4 bilangan real.
 - Jika ${}^a\log b = x$ maka $2^{\log b} = 2x$.
 - Jika x bilangan irasional maka x bilangan real.
 - Jika x adalah bilangan positif maka $-x$ adalah bilangan negatif.
 - Jika $a - 1 = \frac{1}{a}$, $a \neq 0$ maka $2^{-1} = \frac{1}{2}$
- Tentukan invers, konvers, dan kontraposisi implikasi berikut.
 - $\sim p \Rightarrow \sim q$
 - $(p \wedge \sim q) \Rightarrow q$
 - $(p \wedge q) \Rightarrow \sim q$
 - $(p \vee \sim q) \Rightarrow (\sim p \vee q)$
 - $\sim q \Rightarrow (p \vee q)$
 - $p \Rightarrow \sim(p \vee \sim q)$

Tugas Siswa

Dengan menggunakan tabel kebenaran, buktikanlah ekuivalensi berikut ini. Hasilnya diskusikan dengan teman-teman Anda.

- $\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim q \Rightarrow \sim p) \equiv p \wedge \sim q$
- $\sim(q \Rightarrow p) \equiv \sim(\sim p \Rightarrow \sim q) \equiv q \wedge \sim p$

D Pernyataan Berkuantor

Anda telah sedikit mempelajari di awal bab tentang pernyataan-pernyataan berkuantor. Pada bagian ini, akan dibahas lebih lanjut tentang pernyataan-pernyataan berkuantor.

Pernyataan berkuantor terdiri atas *kuantor universal* dan *kuantor eksistensial*.

Kuantor universal dilambangkan dengan " \forall " (dibaca: untuk setiap) dan kuantor eksistensial dilambangkan dengan " \exists " (dibaca: terdapat).

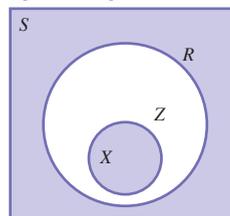
Jadi, $\forall x \in R, p(x)$ artinya untuk setiap $x \in R$ berlaku $p(x)$ dan $\exists x \in R, p(x)$ artinya terdapat x sehingga $p(x)$. Ingkaran dari pernyataan berkuantor universal adalah pernyataan berkuantor eksistensial dan sebaliknya. Misalnya, $\forall x, y \in R, x + y = y + x$, maka ingkarannya $\exists x, y \in R, x + y \neq y + x$. Sekarang, perhatikan pernyataan berkuantor universal berikut.

"Semua bilangan bulat adalah bilangan real."

Jika Z adalah himpunan bilangan bulat dan R adalah himpunan bilangan real maka pada pernyataan tersebut menyiratkan $Z \subset R$, sehingga pernyataan tersebut dapat ditulis

$$\forall x \in Z \Rightarrow x \in R$$

Jika digambarkan dengan diagram Venn diperoleh



Pernyataan berkuantor universal "Semua P adalah Q " ekuivalen dengan implikasi "Jika $x \in P$ maka $x \in Q$ ".

Contohnya pernyataan "Semua tumbuhan adalah makhluk hidup" ekuivalen dengan "Jika x tumbuhan maka x makhluk hidup".

Selanjutnya, perhatikan pernyataan berkuantor eksistensial berikut.

"Ada mamalia yang hidup di air"

Pada pernyataan ini, tersirat sekurang-kurangnya ada satu jenis mamalia yang hidup di air, misalnya ikan paus.



Sumber : www.sharkattackphotos.com

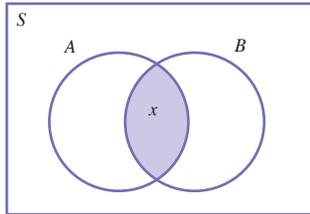
Gambar 1.7

"Ada mamalia yang hidup di air" adalah pernyataan berkuantor eksistensial.

Jika A adalah himpunan mamalia dan B adalah himpunan makhluk hidup yang hidup di air maka pada pernyataan tersebut dapat ditulis

$$\exists x, x \in A \text{ dan } x \in B$$

Jika digambarkan dengan diagram Venn, diperoleh



Pernyataan berkuantor eksistensial "Terdapat P anggota Q " ekuivalen dengan "Sekurang-kurangnya ada sebuah $x \in P$ yang merupakan $x \in Q$ ".

Contohnya pernyataan "Ada bilangan genap yang merupakan bilangan prima" ekuivalen dengan "Sekurang-kurangnya ada satu bilangan genap yang merupakan bilangan prima".

Contoh Soal 1.24

Tentukan ingkaran setiap pernyataan berikut.

- Semua orang menyukai Matematika.
- $\forall x \in \text{bilangan asli}, x \in R$.
- Ada nilai x sehingga $x + 1 = 5$ dan untuk setiap x berlaku $x^2 > 0$.

Jawab:

- p : "Semua orang menyukai Matematika"

$\sim p$: "Tidak setiap orang menyukai Matematika" atau dapat juga dengan pernyataan "Ada beberapa orang tidak menyukai Matematika"
- Inkaran dari " \forall " adalah " \exists " dan ingkaran dari " $x \in A$ " adalah " $x \in R$ ".
- Misalkan,

p : Ada nilai x sehingga $x + 1 = 5$

$\sim p$: Untuk setiap nilai x berlaku $x + 1 \neq 5$

q : Untuk setiap nilai x berlaku $x^2 > 0$

$\sim q$: Ada nilai x sehingga $x^2 \leq 0$

Oleh karena $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$, ingkaran dari pernyataan berkuantor tersebut adalah

$$\underbrace{\text{Untuk setiap nilai } x \text{ berlaku } x + 1 \neq 5}_{\sim p} \text{ atau } \underbrace{\text{Ada nilai } x \text{ sehingga } x^2 \leq 0}_{\sim q}$$



Sumber : urip.files.wordpress.com

Gambar 1.8

Implikasi "Semua orang menyukai Matematika" adalah "Ada beberapa orang tidak menyukai Matematika".

Evaluasi Materi 1.4

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

- Ubahlah pernyataan berkuantor universal berikut ke dalam bentuk implikasi.
 - Semua makhluk hidup memerlukan oksigen.
 - Semua negara mempunyai kepala pemerintahan.
 - Semua ikan dapat berenang.
 - Semua pernyataan mempunyai nilai kebenaran.
 - Semua bilangan asli adalah bilangan cacah.
 - Semua bilangan komposit adalah bilangan bulat.
 - Semua bilangan rasional adalah bilangan real.
 - Semua bentuk akar adalah bilangan irasional.
- Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan berikut.
 - $\exists x \in R, x^2 - 2x + 1 = 0$
 - $\exists x \in A = \{1, 2, 3\}, x^2 + 4x - 5 = 0$
 - $\forall x \in R, 2x^2 + 7x + 1 < 0$
 - $\forall x \in \{\text{bilangan asli}\}, {}^2\log x > 0$
- Jika A = himpunan bilangan asli, C = himpunan bilangan cacah dan R = himpunan bilangan real, tentukan ingkaran dari pernyataan berkuantor berikut ini.
 - $\forall x \in A ; x \in C$
 - $\forall x \in R ; 0 < a < 1, \text{berlaku } a^x > 0$
 - $\exists x \in R ; x^2 + 2 - 15 \leq 0$
 - Ada nilai x sehingga $x^2 - 4 = 21$ dan untuk setiap x berlaku $x^2 > 0$.

E Pernyataan Majemuk Bersusun

Anda telah mempelajari pernyataan majemuk yang dibentuk dari dua pernyataan yang berbeda, yaitu p dan q , serta ingkarannya. Pernyataan majemuk dapat juga disusun lebih dari dua pernyataan yang berbeda, misalnya p, q, r , dan ingkarannya atau p, q, r, s , dan ingkarannya. Bagaimanakah nilai kebenaran dari pernyataan majemuk yang disusun dari tiga pernyataan atau lebih? Perhatikan contoh berikut.

Contoh Soal 1.25

Jika p, q , dan r adalah pernyataan tunggal yang berbeda, buatlah tabel nilai kebenaran dari $(p \wedge q) \vee r$.

Jawab:

Tabel nilai kebenaran dari $(p \wedge q) \vee r$ adalah sebagai berikut.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$
B	B	B	B	B
B	B	S	B	B
B	S	B	S	B
B	S	S	S	S
S	B	B	S	B
S	B	S	S	S
S	S	B	S	B
S	S	S	S	S

Perhatikan susunan nilai benar dan salah antara p , q , dan r pada tabel Contoh Soal 1.25. Susunan ini dibuat sedemikian rupa sehingga pada setiap barisnya diperoleh susunan p , q , dan r yang berbeda.

Tampak dari contoh soal tersebut, tabel memuat 8 kemungkinan komposisi nilai kebenaran p , q , dan r . Pada uraian sebelumnya, terdapat dua kemungkinan komposisi nilai kebenaran untuk pernyataan yang terbentuk dari pernyataan tunggal p pada tabel nilai kebenaran. Sekarang, pelajari cara mendapatkan 4 kemungkinan komposisi nilai kebenaran untuk pernyataan yang terbentuk dari pernyataan tunggal p dan q pada tabel nilai kebenaran. Perhatikan hubungan berikut.

- 2 komposisi nilai kebenaran – 1 pernyataan tunggal
- 4 komposisi nilai kebenaran – 2 pernyataan tunggal
- 8 komposisi nilai kebenaran – 3 pernyataan tunggal
- 5 pernyataan tunggal

Ternyata ini memenuhi rumus 2^n dengan n adalah banyaknya pernyataan tunggal. Jadi, jika terdapat 5 pernyataan tunggal maka terdapat $2^5 = 32$ kemungkinan komposisi nilai kebenaran pernyataan-pernyataan komponennya.

Contoh Soal 1.26

Jika pernyataan p benar, q salah, dan r salah, tentukan nilai kebenaran dari pernyataan majemuk bersusun berikut.

- a. $p \Rightarrow (q \wedge r)$
- b. $(p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee r)$

Jawab:

Diketahui p benar, q salah, dan r salah

- a. $\tau(q \wedge r) = S$, maka $\tau(p \Rightarrow (q \wedge r)) = S$.
- b. $\tau(p \vee q) = B$ dan $\tau(p \vee r) = B$, maka $\tau((p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee r)) = B$.

Kata Kunci

- komposisi
- kontradiksi
- kontingensi
- hukum komutatif
- hukum asosiatif
- hukum distributif
- tautologi

Notes

Jika terdapat n pernyataan tunggal maka terdapat 2^n komposisi nilai kebenaran.

Pelajarilah contoh soal berikut agar Anda memahami cara pembuatan tabel kebenaran untuk pernyataan majemuk bersusun.

Contoh Soal 1.27

Tunjukkanlah bahwa $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

Jawab:

Anda gunakan tabel nilai kebenaran untuk menunjukkan bahwa $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

p	$p \vee q$	$(q$	$q \wedge r$	$r)$
B	B	B	B	B
B	B	B	S	S
B	B	S	S	B
B	B	S	S	S
S	B	B	B	B
S	S	B	S	S
S	S	S	S	B
S	S	S	S	S
1	3	1	2	1

$(p$	\vee	$q)$	\wedge	$(p$	\vee	$r)$
B	B	B	B	B	B	B
B	B	B	B	B	B	S
B	B	S	B	B	B	B
B	B	S	B	B	B	S
S	B	B	B	S	B	B
S	S	B	B	S	B	S
S	S	S	S	S	B	B
S	S	S	S	S	S	S
1	2	1	3	1	2	1

Dari tabel nilai kebenaran pada Contoh Soal 1.27, tampak nilai kebenaran $p \vee (q \wedge r)$ sama dengan $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$. Jadi, terbukti $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ adalah hukum distributif terhadap konjungsi. Hukum-hukum lain yang berlaku pada konjungsi dan disjungsi adalah sebagai berikut.

Jika p , q , dan r adalah suatu pernyataan tunggal maka pada konjungsi dan disjungsi berlaku:

1. $p \wedge q \equiv q \wedge p$ hukum komutatif
2. $p \vee q \equiv q \vee p$ hukum komutatif
3. $(p \vee q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ hukum asosiatif
4. $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ hukum asosiatif
5. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ hukum distributif
6. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ hukum distributif

Perhatikan kembali tabel pada Contoh Soal 1.26. Tampak cara pembuatan tabel berbeda dengan pembuatan tabel sebelumnya. Ini merupakan cara singkat membuat tabel. Banyaknya kolom sesuai dengan banyaknya pernyataan tunggal dan operasinya. Cara mengisi kolom sebagai berikut. Misalnya pada tabel $p \vee (q \wedge r)$, kolom pertama yang diisi dengan nilai kebenaran adalah kolom-kolom yang memuat pernyataan tunggal. Kemudian, isi kolom yang memuat operator yang berada di dalam tanda kurung. Terakhir isi kolom yang memuat operator di luar tanda kurung. Pada tabel di atas, angka 1, 2, dan 3 di bawah tabel menunjukkan urutan pengisian kolom. Jika pada pernyataan terdapat operasi ingkaran pada pernyataan tunggalnya maka setelah mengisi kolom-kolom yang memuat pernyataan tunggal, isi kolom-kolom yang memuat operator ingkaran.

Pada tabel kebenaran, pernyataan majemuk yang memuat dua atau lebih pernyataan berbeda akan terlihat adanya kombinasi nilai B dan S dalam kolom-kolom tertentu. Anda akan mendapatkan suatu pernyataan majemuk dengan semua nilai kebenarannya B atau S . Pernyataan dengan semua nilai kebenarannya B dinamakan *Tautologi*.

Dari tabel pada Contoh Soal 1.26, terlihat semua kemungkinan komposisi nilai kebenarannya merupakan benar. Jadi, $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ adalah tautologi.

Pelajarilah contoh soal berikut agar Anda memahami pengertian tautologi.

Contoh Soal 1.28

Tunjukkan pernyataan $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ adalah tautologi.

Jawab:

Anda tunjukkan bahwa $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ adalah tautologi dengan menggunakan tabel nilai kebenaran berikut.

Notes

- *Tautologi* adalah pernyataan majemuk dengan semua nilai kebenarannya adalah benar.
- *Kontradiksi* adalah majemuk pernyataan dengan semua nilai kebenarannya adalah salah.
- *Kontingensi* adalah peringatan majemuk yang nilai kebenarannya kombinasi benar dan salah.

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	B	S	B
S	S	B	S	B

Sebaliknya dari tautologi adalah *kontradiksi*, yaitu pernyataan majemuk yang semua kemungkinan komposisi nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan komponennya adalah salah. Contohnya $\sim[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$.

Kontingensi adalah pernyataan majemuk yang kemungkinan komposisi nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan komponennya adalah kombinasi antara benar dan salah. Contoh kontingensi di antaranya $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$, dan $p \Leftrightarrow q$.

Evaluasi Materi 1.5

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

- Jika p salah, q benar, dan r salah, tentukan nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan berikut.
 - $(p \wedge q) \vee \sim r$
 - $(p \Rightarrow q) \wedge r$
 - $(\sim p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$
 - $p \Rightarrow (q \Rightarrow \sim r)$
 - $(\sim p \vee \sim r) \Rightarrow (p \wedge q)$
- Tunjukkan bahwa pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen. Gunakan tabel nilai kebenaran.
 - $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
 - $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q \equiv [(\sim p \vee q)p] \Rightarrow q$
 - $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$
 $\equiv [(\sim p \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$
 - $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)](p \Rightarrow r)$
 $\equiv [(p \Rightarrow q)(\sim r \Rightarrow \sim q)](p \Rightarrow r)$
 - $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)](p \Rightarrow r)$
 $\equiv [(\sim p \vee q)(q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
- Tunjukkan bahwa pernyataan pernyataan berikut adalah tautologi.
 - $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$
 - $[(\sim p \vee q) \wedge p] \Rightarrow q$
 - $[(\sim p \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$
 - $[(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge p] \Rightarrow q$
 - $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

F Penarikan Kesimpulan

Salah satu metode penarikan kesimpulan pada logika yaitu metode deduksi. Metode ini merupakan penarikan kesimpulan yang bersifat khusus dari pernyataan yang bersifat umum. Metode deduksi selalu memuat tiga pernyataan. Dua pernyataan

pertama disebut *premis* dan pernyataan yang terakhir disebut *kesimpulan* atau *konklusi*. Premis-premis ini mendukung kesimpulan. Jika salah satu premis salah maka kesimpulan akan salah. Susunan penarikan kesimpulan sebagai berikut.

Premis 1
 Premis 2
 Kesimpulan

Rangkaian premis-premis dan kesimpulannya disebut juga *argumen*. Argumen dikatakan sah jika proses penarikan kesimpulannya benar. Dengan demikian, dapat terjadi kesimpulan berupa pernyataan yang salah meskipun argumennya sah. Argumen yang sah merupakan tautologi. Metode penarikan kesimpulan yang akan dipelajari pada bagian ini adalah silogisme, modus ponens, dan modus tollens.

Kata Kunci

- argumen
- premis
- konklusi
- silogisme
- modus ponens
- modus tollens

1. Silogisme

Silogisme adalah suatu metode penarikan kesimpulan dengan aturan sebagai berikut. Misalkan p , q , dan r adalah suatu pernyataan.

$$\begin{array}{ll} p \Rightarrow q & \text{premis 1} \\ q \Rightarrow r & \text{premis 2} \\ \hline \therefore p \Rightarrow r & \text{kesimpulan} \end{array}$$

\therefore dibaca "jadi"

Bentuk di atas dapat ditulis

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

Argumen yang memenuhi silogisme merupakan argumen yang sah, ini dapat ditunjukkan dengan tabel nilai kebenaran untuk $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ sebagai berikut.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
B	B	B	B	B	B	B	B
B	B	S	B	S	S	S	B
B	S	B	S	B	B	B	B
B	S	S	S	S	S	S	B
S	B	B	B	B	B	B	B
S	B	S	B	S	B	S	B
S	S	B	B	B	B	B	B
S	S	S	B	S	B	S	B

Pada tabel tersebut tampak $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ merupakan tautologi.

Soal Pilihan

Beberapa filsafat memperhatikan bagaimana manusia berdebat. Ketika Anda berdebat, tentu Anda akan melakukannya dengan baik dan masuk akal (logis). Aristoteles, seorang filsafat Yunani, menulis tentang jenis argumen yang disebut silogisme. Semua jenis sapi berkaki empat. Daisy adalah seekor sapi maka Daisy berkaki empat. Namun bagaimana dengan pernyataan "Semua sapi berkaki empat. Anjingnya, si Rover, berkaki empat. Jadi, "Rover adalah sapi". Dapatkah Anda lihat, apa yang salah dari argumen ini?

Contoh Soal 1.29

Buatlah kesimpulan dari premis-premis berikut sehingga terbentuk argumen yang sah.

- a. Jika matahari bersinar maka cuaca cerah. premis 1
Jika cuaca cerah maka hujan tidak turun. premis 2
- b. Jika 2 bilangan cacah maka 2 bilangan bulat. premis 1
Jika 2 bilangan bulat maka 2 bilangan real. premis 2
- c. Jika $x > y$ maka $-x < -y$ premis 1
 $-x \geq -y$ atau $-2x < -2y$ premis 2

Jawab:

- a. Misalkan p : matahari bersinar, q : cuaca cerah, dan r : hujan tidak turun.

maka pernyataan-pernyataan tersebut dapat dinyatakan dengan

$$p \Rightarrow q \quad \text{premis 1}$$

$$q \Rightarrow r \quad \text{premis 2}$$

Agar menjadi argumen yang sah, maka penarikan kesimpulan harus memenuhi aturan silogisme, yaitu sebagai berikut.

$$p \Rightarrow q \quad \text{premis 1}$$

$$q \Rightarrow r \quad \text{premis 2}$$

$$\hline \therefore p \Rightarrow r \quad \text{kesimpulan}$$

Dengan demikian, kesimpulannya adalah

"Jika matahari bersinar, maka tidak turun hujan".

- b. Dengan cara yang sama, diperoleh kesimpulan

"Jika 2 bilangan cacah, maka 2 bilangan real".

- c. Misalkan p : $x > y$, q : $-x < -y$, dan r : $-2x < -2y$.

maka pernyataan-pernyataan tersebut dapat dinyatakan dengan

$$p \Rightarrow q \quad \text{premis 1}$$

$$\sim q \vee r \quad \text{premis 2}$$

Telah diketahui bahwa $q \Rightarrow r \equiv \sim q \vee r$ maka pernyataan di atas menjadi

$$\text{Jika } x > y \text{ maka } -x < -y \quad \text{premis 1}$$

$$\text{Jika } -x < -y \text{ maka } -2x < -2y \quad \text{premis 2}$$

Dengan demikian, kesimpulannya adalah

"Jika $x > y$, maka $-2x < -2y$ "

2. Modus Ponens

Modus ponens adalah suatu metode penarikan kesimpulan dengan aturan sebagai berikut. Misalkan p dan q adalah suatu pernyataan.

$$p \Rightarrow q \quad \text{premis 1}$$

$$p \quad \text{premis 2}$$

$$\hline \therefore q \quad \text{kesimpulan}$$

Bentuk di atas dapat ditulis

$$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$$

Argumen yang memenuhi modus ponens merupakan argumen yang sah, hal ini dapat ditunjukkan dengan tabel nilai kebenaran untuk $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ berikut.

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow p$
B	B	B	B	B
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
B	S	S	S	B
S	B	B	B	B
S	B	B	B	B
S	S	B	B	B
S	S	B	B	B

Tampak $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ merupakan tautologi.

Contoh Soal 1.30

Tariklah kesimpulan dari premis-premis berikut sehingga terbentuk argumen yang sah.

- | | |
|--|----------|
| 1. Jika x burung maka x dapat terbang.
Gagak burung. | premis 1 |
| 2. Jika x bilangan asli maka x bilangan cacah.
Jika 3 adalah bilangan asli. | premis 2 |
| 3. Jika $x > y$ maka $-x < -y$.
$3 > 2$. | premis 1 |
| | premis 2 |

Jawab:

- Misalkan p : x burung dan q : x dapat terbang.
maka pernyataan di atas menjadi

$$\begin{array}{ll} p \Rightarrow q & \text{premis 1} \\ p & \text{premis 2} \end{array}$$
 Agar menjadi argumen yang sah, maka kesimpulan yang ditarik harus memenuhi aturan ponens, yaitu

$$\begin{array}{ll} p \Rightarrow q & \text{premis 1} \\ p & \text{premis 2} \\ \hline \therefore q & \text{kesimpulan} \end{array}$$
 Dengan demikian, kesimpulannya adalah "Gagak dapat terbang".
- Dengan cara yang sama, diperoleh kesimpulan "3 adalah bilangan cacah".
- Dengan cara yang sama, diperoleh kesimpulan " $-3 < -2$ ".

Search

Ketik: [www.e-dukasi.net/mapok/penarikan kesimpulan](http://www.e-dukasi.net/mapok/penarikan_kesimpulan)

Website ini memuat materi penarikan kesimpulan pada logika matematika, seperti modus ponens, modus tollens, dan silogisme. Selain itu, memuat latihan dan simulasi dengan animasi yang memungkinkan Anda berlatih secara *on-line*.

Solusi Cerdas

Diketahui premis-premis:

P_1 : Jika ia dermawan
maka ia disenangi
masyarakat

P_2 : Ia tidak disenangi
masyarakat

Kesimpulan yang sah
untuk dua premis di atas
adalah

- Ia tidak dermawan
- Ia dermawan tetapi
tidak disenangi
masyarakat
- Ia tidak dermawan
dan tidak disenangi
masyarakat
- Ia dermawan
- Ia tidak dermawan
tetapi tidak disenangi
masyarakat

Jawab:

Jika

p : Ia dermawan

q : Ia disenangi
masyarakat

maka sesuai dengan
modus tollens

P_1 : $p \Rightarrow q$

P_2 : $\sim q$
 $\hline \therefore \sim p$

sehingga kesimpulan
adalah "Ia tidak
dermawan".

Jawaban: **a**
UAN SMK, 2003

3. Modus Tollens

Modus tollens adalah metode penarikan kesimpulan dengan kaidah sebagai berikut. Misalkan p dan q adalah pernyataan tunggal.

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \quad \text{premis 1} \\ \sim q \quad \text{premis 2} \\ \hline \therefore \sim p \quad \text{kesimpulan} \end{array}$$

Bentuk tersebut dapat ditulis sebagai berikut

$$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$$

Argumen yang memenuhi modus tolles merupakan argumen yang sah, ini dapat ditunjukkan dengan tabel nilai kebenaran untuk $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ sebagai berikut.

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
B	B	B	B	B
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
B	S	S	S	B
S	B	B	B	B
S	B	B	S	B
S	S	B	S	B
S	S	B	S	B

Tampak $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$ merupakan tautologi.

Contoh Soal 1.31

Tariklah kesimpulan dari premis-premis berikut sehingga terbentuk argumen yang sah.

- Jika bulan di atas laut maka laut pasang
Laut tidak pasang premis 1
premis 2
- Jika $\log x = y, x > 0$ maka $10y = x$
 $10^2 \neq 1.000$ premis 1
premis 2
- Jika $x > 0$ maka $-x < 0$
 $-x \geq 0$ premis 1
premis 2

Jawab:

- Misalkan p : bulan di atas laut dan q : laut pasang.
maka pernyataan tersebut dapat dinyatakan menjadi

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \quad \text{premis 1} \\ \sim q \quad \text{premis 2} \end{array}$$

Agar menjadi argumen yang sah, maka kesimpulan yang ditarik harus memenuhi aturan tollens, yaitu

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \quad \text{premis 1} \\ \sim q \quad \text{premis 2} \\ \hline \therefore \sim p \quad \text{kesimpulan} \end{array}$$

Dengan demikian, kesimpulannya adalah "Bulan tidak di atas laut".

2. Dengan cara yang sama, diperoleh kesimpulan "3 adalah bilangan cacah".
3. Dengan cara yang sama, diperoleh kesimpulan " $x \leq 0$ ".

Evaluasi Materi 1.6

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

1. Tentukan kesimpulan dari premis-premis berikut sehingga menjadi argumen yang sah.
 - a. Jika kita rajin berolahraga maka badan kita sehat.
Jika badan kita sehat maka pikiran kita sehat.
 \therefore
 - b. Jika Fifi bersuku Sunda maka Fifi orang Jawa Barat.
Jika Fifi orang Jawa Barat maka Fifi orang Indonesia.
 \therefore
 - c. Jika pemanasan global terjadi maka suhu udara naik.
Jika suhu udara naik maka es di kutub mencair.
 \therefore
 - d. Jika x bilangan bulat maka x bilangan rasional.
Jika x bilangan rasional maka x bilangan real.
 \therefore
 - e. Jika x bilangan genap maka x bilangan bulat.
Jika x bilangan bulat maka x bilangan rasional.
 \therefore
2. Periksalah sah atau tidak argumen berikut.
 - a.
$$\frac{p \Rightarrow \sim q}{\sim q \Rightarrow r} \therefore p \Rightarrow r$$
 - b.
$$\frac{\sim p \Rightarrow q}{\sim r \Rightarrow \sim q} \therefore \sim p \Rightarrow r$$
 - c.
$$\frac{p \Rightarrow q}{\sim q \Rightarrow \sim r} \therefore p \Rightarrow \sim r$$
3. Tentukan kesimpulan dari premis-premis berikut sehingga menjadi argumen yang sah.
 - a. Jika kita rajin berolahraga maka badan kita sehat.
Badan tidak sehat
 \therefore
 - b. Jika x bersuku Asmat maka x orang Papua.
Roni bukan orang Papua.
 \therefore
 - c. Jika harga minyak dunia naik maka harga bahan pokok naik.
Harga bahan pokok tidak naik.
 \therefore
 - d. Jika x bilangan prima maka x bilangan ganjil
2 bukan bilangan ganjil
 \therefore
 - e. Jika x bilangan bulat maka x bilangan rasional.
bukan bilangan rasional.
 \therefore
4. Periksalah sah atau tidak argumen berikut.
 - a.
$$\frac{p \Rightarrow \sim q}{q} \therefore \sim p$$
 - b.
$$\frac{\sim p \Rightarrow q}{\sim q} \therefore \sim p$$
 - c.
$$\frac{p \Rightarrow q}{\sim q} \therefore \sim q$$

Ringkasan

- Pernyataan (proposisi) adalah kalimat yang bernilai benar saja atau salah saja, tetapi tidak keduanya sekaligus.
- Kalimat terbuka adalah kalimat yang nilai kebenarannya belum dapat ditentukan.
- Ingkaran dari pernyataan p , dilambangkan dengan $\sim p$ dan dibaca "bukan p ", jika suatu pernyataan yang nilai kebenarannya berlawanan dengan nilai kebenaran p . Jika p benar maka $\sim p$ salah dan jika p salah maka $\sim p$ benar.
- Konjungsi $p \wedge q$ (dibaca " p dan q ") hanya benar jika p dan q keduanya adalah benar.
- Disjungsi $p \vee q$ (dibaca " p atau q ") hanya salah jika p dan q keduanya salah
- Implikasi $p \Rightarrow q$ (dibaca " p jika dan hanya jika q ") adalah benar jika p dan q keduanya adalah benar atau jika p dan q keduanya adalah salah.
- Tautologi adalah pernyataan majemuk dengan semua nilai kebenarannya adalah benar. Negasi dari tautologi adalah kontradiksi, yaitu pernyataan majemuk dengan semua nilai kebenarannya adalah salah. Adapun kontingensi adalah pernyataan yang bukan tautologi ataupun kontradiksi.
- Jika terdapat implikasi: $p \Rightarrow q$ maka
Konvers : $q \Rightarrow p$
Invers : $\sim p \Rightarrow \sim q$
Kontraposisi : $\sim q \Rightarrow \sim p$
- Ada dua macam pernyataan berkuantor, yaitu kuantor eksistensi dan kuantor universal. Kuantor eksistensi dilambangkan dengan " \exists " (dibaca "ada beberapa"). Kuantor universal dilambangkan dengan " \forall " (dibaca "untuk setiap" atau "untuk semua").
- Argumen adalah penarikan kesimpulan dari serangkaian premis. Argumen adalah sah jika bentuk argumen merupakan tautologi.
- Silogisme adalah suatu metode penarikan kesimpulan yang sah dengan bentuk
Premis (1) : $p \Rightarrow q$
Premis (2) : $q \Rightarrow r$
Konklusi : $\therefore p \Rightarrow r$
- Modus Ponens adalah suatu argumen yang sah dengan bentuk
Premis (1) : $p \Rightarrow q$
Premis (2) : p
Konklusi : $\therefore q$
- Modus Tollens adalah suatu argumen yang sah dengan bentuk
Premis (1) : $p \Rightarrow q$
Premis (2) : $\sim q$
Konklusi : $\therefore \sim p$

Kaji Diri

Setelah mempelajari materi tentang Logika Matematika, tuliskan bagian mana saja yang belum Anda pahami. Selain itu, tuliskan juga materi yang Anda senangi beserta alasannya. Bacakan tulisan Anda di depan kelas.

Evaluasi Materi Bab 1

- I. Pilihlah salah satu jawaban yang tepat. Tuliskanlah jawabannya di buku latihan Anda.**
- Dari kalimat-kalimat di bawah ini yang merupakan pernyataan adalah
 - $2x + y < 1$
 - Benarkah $1 + 1 = 2$
 - Buku adalah gudang ilmu
 - Lukisan ini indah sekali
 - $\log 10 = x$
 - Nilai-nilai x berikut menjadikan kalimat terbuka $x + 5 < 4$ menjadi pernyataan yang benar, *kecuali*
 - $x = -4$
 - $x = -2$
 - $x = -6$
 - $x = 0$
 - $x = -5$
 - Ingkaran dari pernyataan "Semua penduduk Indonesia makan nasi" adalah
 - Semua penduduk Indonesia tidak makan nasi.
 - Semua penduduk Indonesia makan sagu.
 - Ada penduduk Indonesia yang makan nasi.
 - Ada penduduk Indonesia yang tidak memakan nasi.
 - Ada penduduk Indonesia yang makan sagu.
 - Pernyataan-pernyataan berikut yang merupakan konjungsi yang benar adalah
 - $2 > 1$ dan $1 > 3$.
 - $\sqrt{4}$ adalah bilangan rasional dan bilangan real.
 - ${}^2\log 4 = 2$ dan ${}^2\log 8 = 3$.
 - Ibukota Jawa Tengah adalah Semarang dan Surabaya.
 - Presiden RI pertama adalah Soekarno dan Soeharto.
 - Pernyataan berikut yang merupakan disjungsi yang salah adalah
 - Akar dari 25 adalah 5 atau -5
 - $\sqrt{4}$ adalah bilangan rasional atau real
 - $2(-3)$ sama dengan 6 atau -6
 - $\frac{1}{\sqrt{3}}$ sama dengan $\sqrt{3}$ atau $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 - $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ adalah matriks berordo 2×3 atau 3×2
 - Jika p benar dan q salah maka pernyataan berikut yang benar adalah
 - $\sim(p \wedge q)$
 - $\sim(p \vee q)$
 - $\sim p \wedge q$
 - $\sim p \vee q$
 - $\sim(p \wedge \sim q)$
 - Jika p salah dan q benar maka pernyataan berikut yang salah adalah
 - $p \Rightarrow \sim q$
 - $\sim(q \Rightarrow p)$
 - $\sim p \Rightarrow q$
 - $\sim q \Rightarrow p$
 - $\sim(p \Rightarrow q)$
 - Pernyataan "Jika x bilangan ganjil maka x bilangan bulat" ekuivalen dengan
 - Jika x bilangan bulat maka x bilangan ganjil

- b. Jika x bukan bilangan ganjil maka x bukan bilangan bulat
- c. Jika x bukan bilangan ganjil maka x bilangan genap
- d. x bukan bilangan ganjil dan x bilangan bulat
- e. x bukan bilangan ganjil atau x bilangan bulat.
9. Konvers dari pernyataan "Jika A bersuku Sunda maka A orang Indonesia" adalah
- a. Jika A orang Indonesia maka A bersuku Sunda.
- b. Jika A tidak bersuku Sunda maka A bukan orang Indonesia.
- c. Jika A bukan orang Indonesia maka A tidak bersuku Sunda.
- d. Jika A bersuku Sunda maka A orang Jawa Barat.
- e. Jika A tidak bersuku Sunda maka A bersuku Jawa.
10. Jika p salah, q benar, dan r salah, pernyataan berikut yang benar adalah
- a. $p \Leftrightarrow q$
- b. $(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow r$
- c. $\sim p \Leftrightarrow (q \wedge r)$
- d. $q \Rightarrow p$
- e. $(p \vee q) \Leftrightarrow r$
11. Diketahui pernyataan berikut.
Jika x bilangan genap maka x bilangan bulat.
Jika x bilangan bulat maka x bilangan rasional.
Kesimpulan dari pernyataan di atas agar terbentuk argumen yang sah adalah
- a. Jika x bilangan genap maka x bilangan rasional.
- b. Jika x bukan bilangan genap maka x bukan bilangan rasional.
- c. Jika x bilangan rasional maka x bilangan genap.
- d. Jika x bilangan genap maka x bukan bilangan bulat.
- e. Jika x bilangan bulat maka x bilangan genap.
12. Pernyataan "Semua pelajar berseragam" ekuivalen dengan
- a. A pelajar jika dan hanya jika A berseragam.
- b. A pelajar dan berseragam.
- c. Jika A berseragam maka A pelajar.
- d. Jika A bukan pelajar maka A tidak berseragam.
- e. Jika A pelajar maka A berseragam.
13. Argumen-argumen berikut sah, *kecuali*
- a.
$$\frac{p \Rightarrow q}{p} \therefore q$$
- b.
$$\frac{p \Rightarrow q}{\sim p} \therefore \sim q$$
- c.
$$\frac{\sim p \Rightarrow \sim q}{\sim p} \therefore \sim q$$
- d.
$$\frac{\sim p \Rightarrow \sim q}{p} \therefore q$$
- e.
$$\frac{q \Rightarrow \sim p}{p} \therefore \sim q$$
14. Argumen-argumen berikut adalah tidak sah, *kecuali*
- a.
$$\frac{p \Rightarrow q}{q \Rightarrow r} \therefore r$$
- b.
$$\frac{p \Rightarrow q}{\sim p} \therefore \sim q$$
- c.
$$\frac{\sim p \Rightarrow \sim q}{\sim p} \therefore \sim q$$

$$\begin{array}{l} \text{d. } \sim p \Rightarrow \sim q \\ \sim p \Rightarrow r \\ \hline \therefore \Rightarrow \sim r \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{e. } q \Rightarrow \sim p \\ \sim p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

15. Diketahui pernyataan-pernyataan berikut.
Jika harga minyak dunia naik maka harga bahan pokok naik.
Harga minyak dunia naik.

Kesimpulan dari pernyataan di atas agar terbentuk argumen yang sah adalah

- Harga bahan pokok turun
- Harga bahan pokok tidak naik
- Harga bahan pokok naik
- Harga bahan pokok stabil
- Harga bahan pokok naik turun

II. Kerjakanlah soal-soal berikut.

- Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan berikut.
 - $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$, $a, b > 0$, $b \neq 0$
 - Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dengan pembagian dua bilangan bulat.
 - 8 adalah bilangan komposit dan bilangan bulat
 - Akar dari $x^2 - 2x + 1$ adalah $x = 1$ atau $x = -1$
 - Jika $-2 < -3$ maka $2 > 3$
 - $\sqrt{9}$ adalah bilangan irasional jika dan hanya jika $= 3$
- Tentukan ingkaran dari pernyataan-pernyataan berikut.
 - Semua burung dapat terbang.
 - Ada raja yang tidak berkuasa.
 - $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ adalah matriks persegi dan matriks identitas.
 - $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$ atau $2^3 \cdot 2^4 = (2 + 2 + 2) \cdot (2 + 2 + 2 + 2)$
 - Jika $a > b$, maka $-a < -b$
- Diketahui pernyataan "Jika x ikan maka x hidup di air"
"Kucing tidak hidup di air"
Tentukan kesimpulannya sehingga terbentuk argumen yang sah.
- Diketahui pernyataan "Semua makhluk hidup dapat bernafas"
"Tumbuhan makhluk hidup"
Tentukan kesimpulannya sehingga terbentuk argumen yang sah.
- Diketahui pernyataan "Jika 6 bilangan komposit maka 6 bilangan bulat"
"Jika 6 bilangan bulat maka 6 bilangan rasional"
Tentukan kesimpulannya sehingga terbentuk argumen yang sah.
- Diketahui suatu pernyataan "Jika devisa negara bertambah maka pembangunan berjalan lancar" Tentukan Invers, konvers, dan kotraposisi dari pernyataan tersebut.
- Diketahui premis-premis berikut.
 P_1 : Jika $x^2 - 2 < x < 2$
 P_2 : $x < -2$ atau $x > 2$
Tariklah kesimpulan dari premis-premis tersebut sehingga menjadi argumen yang sah.

8. Tunjukkan dengan tabel kebenaran singkat bahwa pernyataan $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$ adalah tautologi.
9. Gambarkan diagram listrik dari pernyataan berikut.
 $[\{(p \vee q) \wedge r\} \wedge \{s \wedge (t \vee \sim q)\}] \wedge [(\sim p \vee \sim q)]$
10. Jika $A = \{2, 3, 5\}$, tentukan nilai kebenaran dari:
 a. $(\forall x \in A), [(x + 3)^2 = x^2 + 9]$
 b. $(\exists x \in A), (x^2 - x = 20)$

Pilihan Karir

Dalam praktiknya, Pengacara atau Advokat dikenal juga dengan istilah Konsultan Hukum, yaitu seseorang yang melakukan atau memberikan nasihat dan pembelaan mewakili orang lain. profesi ini biasanya berhubungan dengan penyelesaian suatu kasus hukum.

Istilah pengacara berkonotasi dengan jasa profesi hukum yang berperan dalam suatu sengketa yang dapat diselesaikan di luar atau di dalam sidang pengadilan. Dalam profesi hukum, dikenal istilah berita acara yang terkait dengan pengaturan hukum acara dalam Kitab Undang-Undang Hukum Acara Pidana dan Kitab Undang-Undang Hukum Acara Perdata. Istilah pengacara dibedakan dengan istilah Konsultan Hukum di mana kegiatannya lebih ke penyediaan jasa konsultasi hukum secara umum. Di Indonesia, untuk dapat menjadi seorang pengacara, seorang sarjana yang berlatar belakang pendidikan tinggi hukum harus mengikuti pendidikan khusus dan lulus ujian profesi yang dilaksanakan oleh suatu organisasi pengacara.

Bab 2



Relasi dan Fungsi

Pada bab ini, Anda akan diajak untuk memecahkan masalah yang berhubungan dengan konsep Relasi dan Fungsi, di antaranya mendeskripsikan perbedaan konsep antara relasi dan fungsi, menerapkan konsep fungsi linear, menggambarkan fungsi kuadrat, dan menerapkan konsep fungsi kuadrat

Di negara-negara berkembang, angka kriminalitas, angka kematian bayi, dan jumlah pengangguran cenderung tinggi. Adakah relasi antara tingkat perekonomian suatu negara dengan angka kriminalitas, angka kematian bayi, dan jumlah pengangguran. Apakah yang dimaksud dengan relasi?

Di Kelas VIII, Anda telah mempelajari konsep relasi dan fungsi. Pada bab ini, konsep tersebut akan dipelajari kembali dan dikembangkan sehingga dapat diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari.

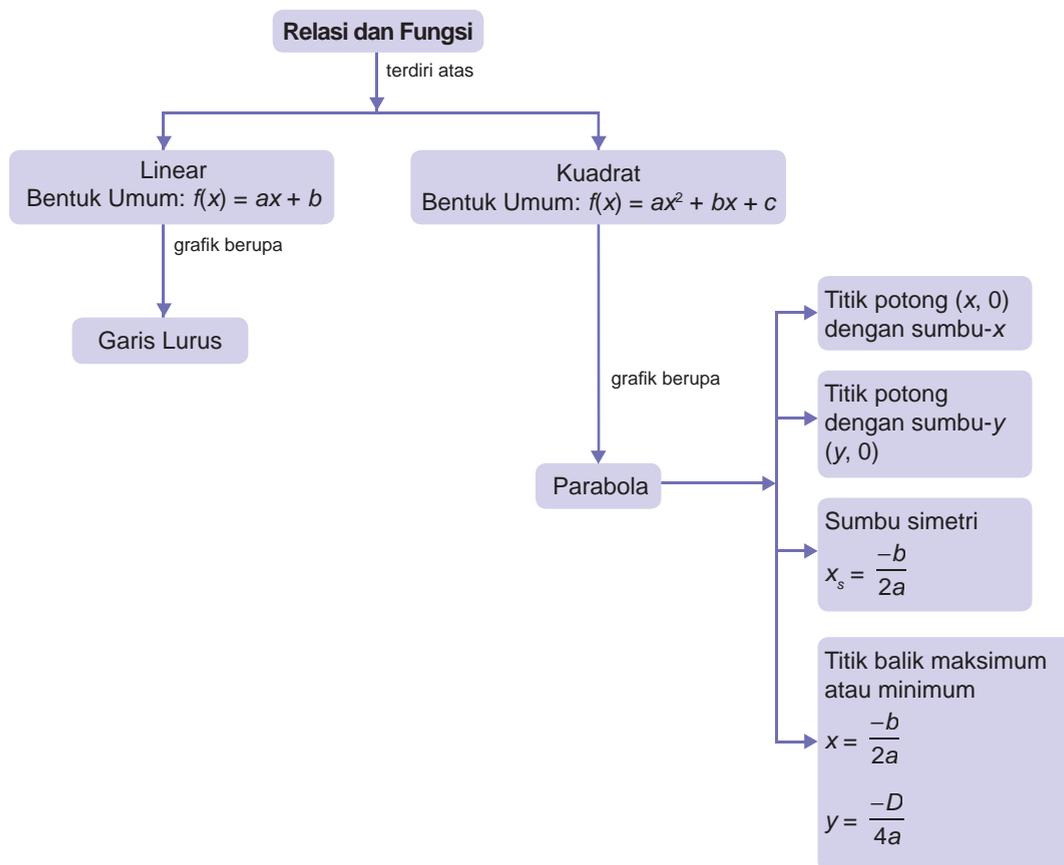
Contoh penggunaan relasi pada kehidupan sehari-hari adalah sebagai berikut.

Sebuah Perusahaan taksi menetapkan aturan Rp4.500,00 untuk "tarif buka pintu". Selanjutnya, penumpang dibebankan argo Rp3.500,00 setiap 1 km. Jika penumpang menempuh jarak 8 km, berapakah tarif taksi yang harus dibayar? Dengan konsep relasi dan fungsi, Anda dapat memecahkan masalah tersebut dengan lebih mudah.

- A. Pengertian Relasi dan Fungsi
- B. Fungsi Linear
- C. Fungsi Kuadrat

Peta Konsep

Materi tentang Relasi dan Fungsi dapat digambarkan sebagai berikut.



Soal Pramateri

Kerjakan soal-soal berikut, sebelum Anda mempelajari bab ini.

- Tentukan nilai y yang memenuhi persamaan berikut.
 - $y = 2x - 1$, untuk $x = -2$
 - $y = 2x^2 - 3x - 5$, untuk $x = 3$
 - $y = -x^2 - 5x + 2$, untuk $x = 1$
 - $y = 3x^2 - 4x + 5$, untuk $x = 3$
- Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan berikut.
 - $-3x + 5 = -x + 7$
 - $-2x + 5 = -9$
 - $y = x^2 + 6x + 8$, untuk $x = 1$
 - $y = -x^2 + 2x + 15$

A Pengertian Relasi dan Fungsi

Pada pembahasan kali ini, Anda akan mempelajari perbedaan konsep relasi dan fungsi. Pelajarilah uraian berikut dengan baik.

1. Relasi

Dalam kehidupan sehari-hari, Anda tentunya sering mendengar kata "relasi". Relasi memiliki arti *hubungan*. Dalam matematika, relasi diartikan sebagai hubungan antara dua himpunan. Perhatikan himpunan A dan B berikut ini.

$A = \{\text{Rupiah, Rupee, Baht, Ringgit}\}$

$B = \{\text{Indonesia, India, Thailand, Malaysia}\}$

Dapatkan Anda melihat relasi atau hubungan antara himpunan A dan B ? Anggota himpunan A terdiri atas nama-nama mata uang dan anggota himpunan B terdiri atas nama-nama negara. Jika Anda cermati maka Anda akan menemukan relasi antara anggota himpunan A dan B adalah sebagai berikut:

- Rupiah merupakan mata uang negara Indonesia
- Rupee merupakan mata uang negara India
- Baht merupakan mata uang negara Thailand
- Ringgit merupakan mata uang negara Malaysia

Jadi, relasi antara himpunan A dan B adalah "*mata uang negara*". Contoh lain relasi antara dua himpunan dapat Anda lihat dari dua pasang himpunan berikut ini.

- $C = \{\text{Jakarta, London, Cairo, Beijing}\}$
- $D = \{\text{Indonesia, Inggris, Mesir, China}\}$
- $E = \{\text{Indonesia, Brazil, Nigeria, Swiss}\}$
- $F = \{\text{Asia, Amerika, Afrika, Eropa}\}$

Anda telah mengetahui bahwa pada himpunan A dan himpunan B tersebut dapat ditemukan relasi atau hubungan. Dapatkan Anda menemukan relasi antara himpunan C dengan D ? Juga relasi antara himpunan E dengan F ? Diskusikan bersama teman Anda.

Untuk menyatakan relasi antara 2 himpunan, dapat digunakan 3 cara, yaitu diagram panah, diagram Cartesius, dan himpunan pasangan berurutan. Himpunan A dan B tersebut dapat dinyatakan dengan ketiga cara tersebut. Untuk lebih jelasnya, pelajari uraian berikut.

Kata Kunci

- relasi
- diagram panah
- diagram cartesius
- himpunan pasangan berurutan



Sumber : www.wisatathailand.com, rebekahcoolbeans.files.wordpress.com, www.heinzalbers.org, www.mir.com.

Gambar 2.1

Relasi "mata uang negara"



Sumber: www-history.mcs.st-and.ac.uk

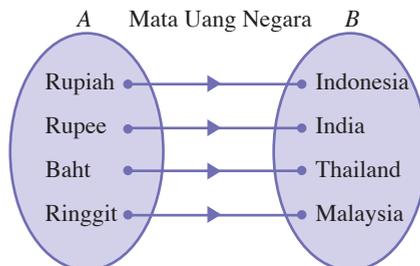
**Rene Descartes
(1888–199)**

Seorang ahli matematika berkebangsaan Perancis. Ia menciptakan cara menentukan letak suatu titik terhadap perpotongan dua sumbu, yaitu sumbu-x dan sumbu-y yang dikenal dengan sistem koordinat Cartesius.

Sumber: *Ensiklopedi Matematika & Peradaban Manusia*, 2002

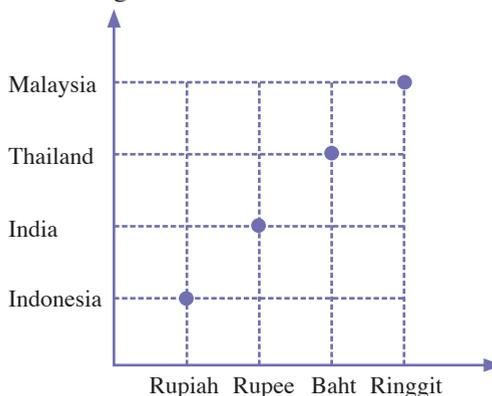
a. Diagram Panah

Perhatikan diagram panah berikut. Rupiah → Indonesia berarti rupiah merupakan mata uang Indonesia. Demikian pula untuk Rupee → India, Baht → Thailand, Ringgit → Malaysia. Pada diagram panah, relasi antara dua anggota himpunan dari dua himpunan yang berbeda dinyatakan dengan anak panah. Perhatikan gambar berikut.



b. Diagram Cartesius

Perhatikan diagram Cartesius berikut.



Anggota himpunan A berada pada sumbu mendatar dan anggota himpunan B berada pada sumbu tegak. Setiap anggota A yang berelasi dengan anggota B dinyatakan dengan tanda noktah (\bullet).

c. Pasangan Berurutan

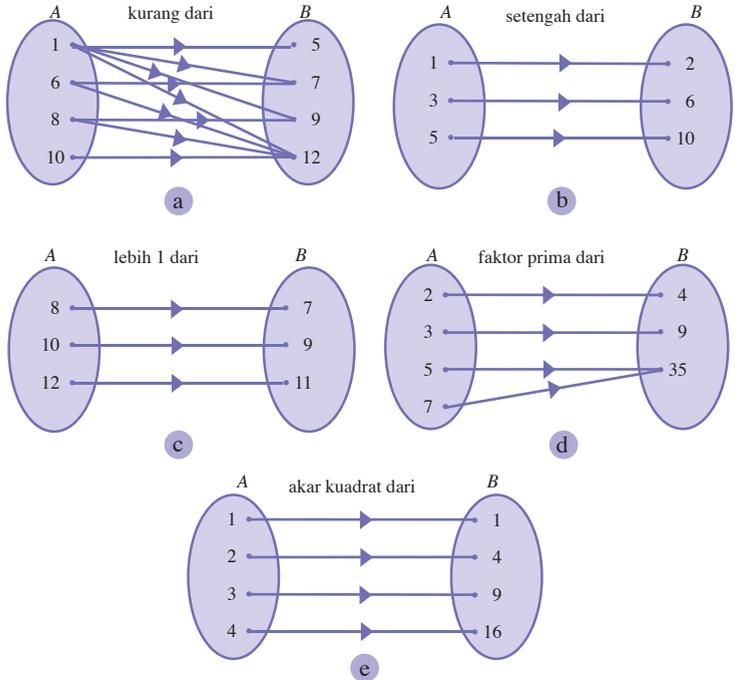
Relasi antara himpunan A dan B dapat dinyatakan sebagai pasangan berurutan seperti berikut ini.

- Rupiah, Indonesia
- Rupee, India
- Baht, Thailand
- Ringgit, Malaysia

Artinya, rupiah merupakan mata uang negara Indonesia dapat dinyatakan dengan (Rupiah, Indonesia), begitu pula dengan (Rupee, India), (Baht, Thailand), (Ringgit, Malaysia). Oleh karena itu, relasi antara himpunan A dan B dapat

dinyatakan dalam himpunan pasangan berurutan berikut
 {(Rupiah, Indonesia), (Rupee, India), (Baht, Thailand), (Ringgit, Malaysia)}

Untuk lebih memahami pengertian relasi, coba Anda perhatikan contoh-contoh relasi berikut.



Uraian tersebut memperjelas pengertian relasi, yaitu sebagai berikut.

Relasi antara dua himpunan adalah aturan yang memasangkan anggota-anggota suatu himpunan dengan anggota himpunan yang lain.

Tugas Siswa 2.1

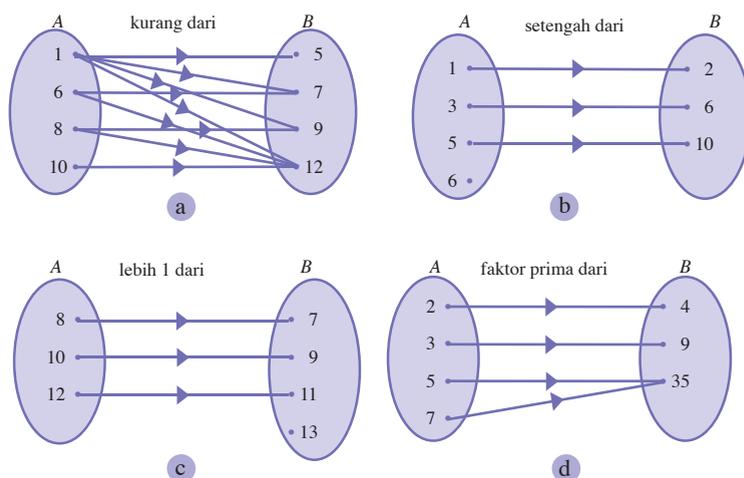
Buatlah dua himpunan. Himpunan pertama adalah beberapa peristiwa, misalnya inflasi, kenaikan BBM, bencana alam, dan lain sebagainya. Himpunan yang kedua adalah akibat dari peristiwa yang pertama seperti naiknya harga sembako dan hancurnya rumah-rumah. Tugas ini dilakukan bersama teman sebangku Anda, dan masing-masing membuat sebuah himpunan. Misalkan Anda membuat himpunan peristiwa, sedangkan teman sebangku Anda membuat akibatnya. Buatlah masing-masing minimal 10 anggota himpunan. Setelah selesai, coba dipasangkan, adakah relasi yang terbentuk? Ketika membuat tugas ini bersama teman sebangku Anda, usahakan tidak saling melihat.

2. Fungsi

Pada pembahasan sebelumnya, Anda telah memahami pengertian dari relasi. Pada pembahasan kali ini, Anda akan mempelajari pengertian fungsi atau pemetaan. Fungsi atau pemetaan merupakan relasi yang bersifat khusus. Dapat diartikan juga bahwa setiap fungsi pasti merupakan relasi, tetapi tidak semua relasi merupakan fungsi. Coba Anda perhatikan contoh relasi (a), (b), (c), dan (d) pada pembahasan sebelumnya.

Notes

Setiap fungsi adalah relasi, tetapi setiap relasi belum tentu merupakan fungsi.



- Pada relasi (a), ada anggota himpunan A , yaitu 1, 6, dan 8, yang memiliki pasangan lebih dari satu di himpunan B . Relasi seperti ini *bukan merupakan fungsi*.
- Pada relasi (b), ada anggota himpunan A , yaitu 6, yang tidak memiliki pasangan di himpunan B . Relasi seperti ini *bukan merupakan fungsi*.
- Pada relasi (c) setiap anggota himpunan A memiliki satu pasangan di himpunan B dan ada anggota himpunan B , yaitu 13, yang tidak memiliki pasangan di himpunan A , relasi seperti ini disebut *fungsi*.
- Pada relasi (d), setiap anggota himpunan A memiliki satu pasangan di himpunan B dan ada anggota himpunan B , yaitu 35, yang memiliki pasangan lebih dari 1 di himpunan A . Berarti relasi (d) merupakan *fungsi*.

Perhatikan kembali relasi (c):

$A = \{8, 10, 12\}$ disebut *daerah asal* atau *domain*

$B = \{7, 9, 11, 13\}$ disebut *daerah kawan* atau *kodomain*

$\{7, 9, 11\}$ disebut daerah hasil atau *range*

- 7 merupakan bayangan dari 8 atau peta dari 8.
- 9 merupakan bayangan dari 8 atau peta dari 10.
- 11 merupakan bayangan dari 8 atau peta dari 12.

Suatu fungsi dapat dinotasikan dengan huruf kecil seperti f , g , atau h .

$f: 8 \rightarrow 7$ dibaca "fungsi f memetakan 8 ke-7"

$g: 10 \rightarrow 9$ dibaca "fungsi g memetakan 10 ke-9"

$h: 12 \rightarrow 11$ dibaca "fungsi h memetakan 12 ke-11"

Pada relasi (d)

$A = \{2, 3, 5, 7\}$ disebut daerah asal atau domain

$B = \{4, 9, 35\}$ disebut daerah kawan atau kodomain

$\{4, 9, 35\}$ disebut daerah hasil atau range

- 4 merupakan bayangan dari 2 atau peta dari 2
- 9 merupakan bayangan dari 3 atau peta dari 3
- 35 merupakan bayangan dari 5 atau peta dari 5, dan 7.

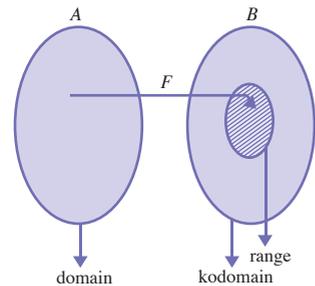
Uraian tersebut menggambarkan bahwa fungsi merupakan relasi yang memiliki ciri-ciri sebagai berikut:

1. Setiap anggota domain hanya memiliki 1 pasangan anggota di daerah kodomain, tetapi anggota kodomain boleh memiliki pasangan lebih dari 1 anggota domain.
2. Setiap anggota domain harus memiliki 1 pasangan anggota di daerah kodomain. Jadi, tidak ada anggota domain yang tidak memiliki pasangan, tetapi anggota kodomain boleh tidak memiliki pasangan anggota di daerah domain.

Untuk lebih memahami konsep dari fungsi, perhatikanlah contoh soal berikut.

Kata Kunci

- fungsi
- domain
- kodomain
- range
- peta

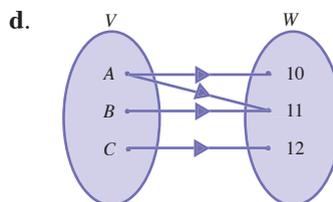
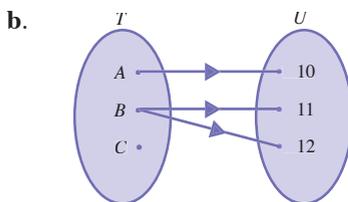
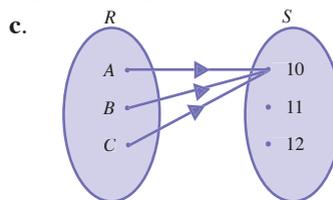
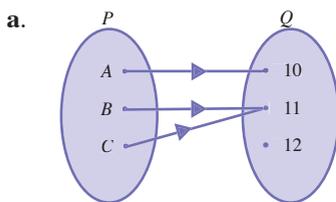


Gambar 2.2

Ilustrasi Pemetaan

Contoh Soal 2.1

Tentukan, apakah relasi berikut merupakan fungsi?



Jawab:

- a. Fungsi, karena setiap anggota himpunan P (domain) hanya memiliki 1 pasangan anggota di himpunan Q (kodomain).

- b. Bukan fungsi, karena ada anggota himpunan T , yaitu B , memiliki pasangan lebih dari satu anggota di himpunan Q .
- c. Fungsi, karena setiap anggota himpunan R (domain) hanya memiliki 1 pasangan anggota di himpunan Q (kodomain).
- d. Bukan fungsi, karena ada anggota himpunan V , yaitu A , memiliki pasangan lebih dari satu anggota di himpunan W .

Tugas Siswa 2.2

Diskusikan bersama teman sebangku Anda. Tentukan, apakah relasi berikut merupakan fungsi atau bukan dan jelaskan.

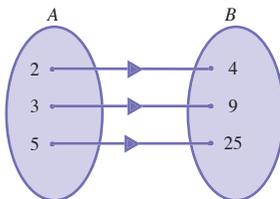
1. Nama-nama ibu kota negara-negara di dunia dengan negaranya.
2. Bendera negara-negara di dunia dengan negaranya.
3. Komoditas ekspor unggulan suatu negara dengan negaranya.
4. Bentuk negara (republik, kerajaan) dengan negaranya.

Evaluasi Materi 2.1

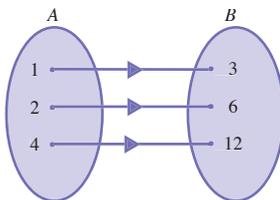
Kerjakan soal-soal berikut di buku latihan Anda.

1. Tentukan relasi antara himpunan A dan B berikut.

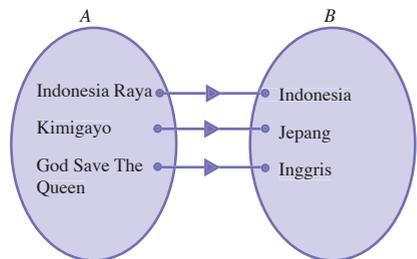
a.



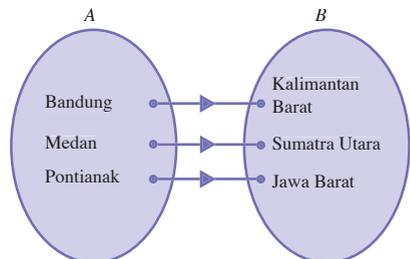
b.



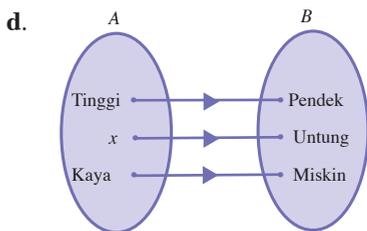
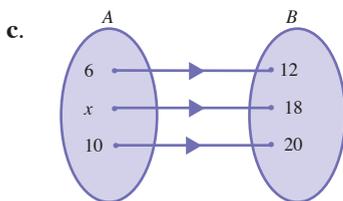
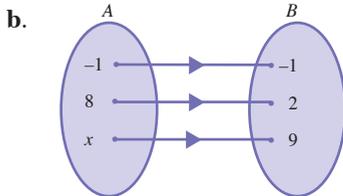
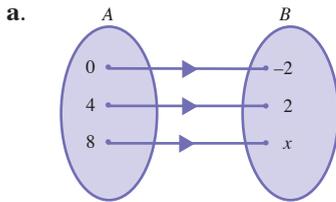
c.



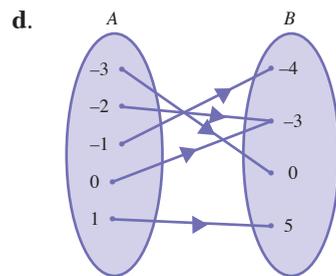
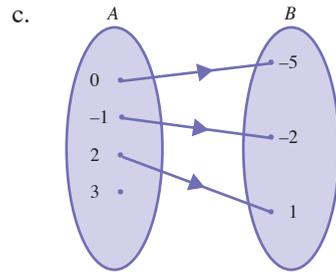
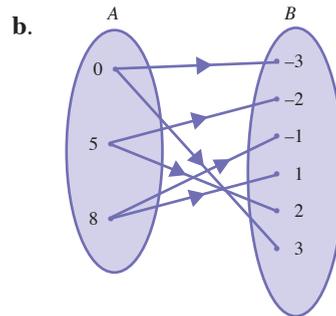
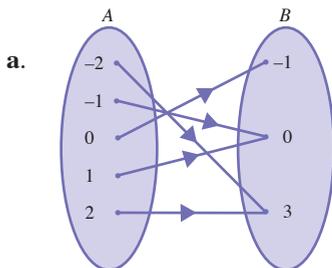
d.



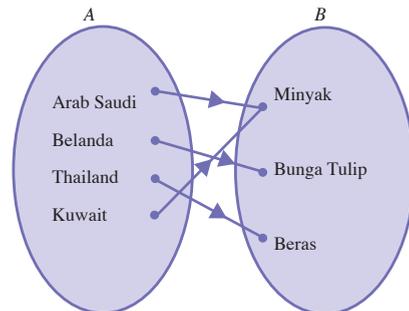
2. Tentukan nilai x pada relasi berikut.



3. Tentukan apakah relasi berikut merupakan fungsi atau bukan, jelaskan.



4. Perhatikan relasi berikut.



- Tentukan relasi yang tepat dari hubungan dua himpunan tersebut.
- Apakah relasi tersebut merupakan fungsi atau bukan? Jelaskan.
- Tentukan bayangan dari "Thailand".

B Fungsi Linear



Sumber : farm1.static.flickr.com

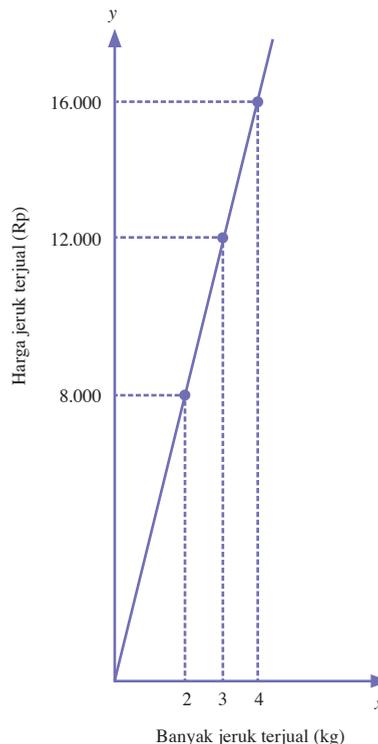
Gambar 2.3

Fungsi linear antara banyak jeruk dan harganya membentuk fungsi linear

Fungsi linear merupakan fungsi tak tentu yang paling sederhana. Untuk memahami konsep fungsi linear, perhatikanlah ilustrasi permasalahan berikut.

Pak Tono seorang pedagang jeruk. Ketika seseorang membeli 2 kg jeruk, dan membayar Rp8.000,00, kemudian pembeli lain membeli 3 kg jeruk, pembeli tersebut membayar Rp12.000,00. Selanjutnya, ada pembeli yang membeli 4 kg jeruk dan pak Tono mendapat Rp16.000,00. Berdasarkan uraian tersebut, dapat dibuat 2 buah himpunan, yaitu banyak jeruk terjual (kg) = {2, 3, 4} dan harga jeruk terjual (Rp) = {8.000, 12.000, 16.000}.

Jika himpunan banyak jeruk terjual merupakan domain dan harga jeruk terjual merupakan kodomain maka hubungan kedua himpunan tersebut dapat dinyatakan dengan diagram Cartesius berikut.



Gambar 2.3

Fungsi linear yang diperoleh dari seorang penjual jeruk.

Coba Anda amati diagram Cartesius pada Gambar 2.3. Dapatkah Anda menentukan fungsi atau aturan yang memasangkan antara anggota domain dengan kodomain? Jika x

merupakan peubah yang menyatakan anggota domain, dan $f(x)$ merupakan peubah yang menyatakan anggota kodomain, dapat diperoleh fungsi yang menghubungkan antara kedua himpunan tersebut adalah $f(x) = 4.000x$.

Perhatikan uraian berikut.

- Untuk $x = 2 \rightarrow f(2) = 4.000 \cdot 2 = 8.000$
- Untuk $x = 3 \rightarrow f(3) = 4.000 \cdot 3 = 12.000$
- Untuk $x = 4 \rightarrow f(4) = 4.000 \cdot 4 = 16.000$

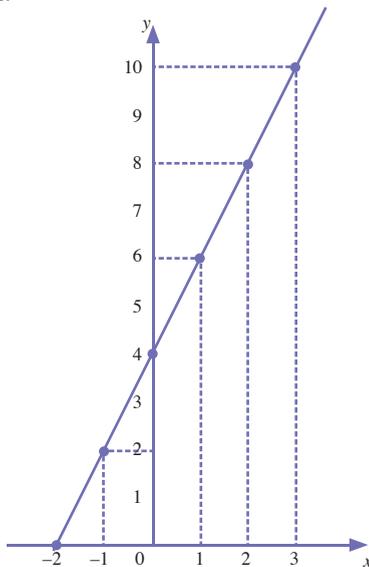
Amati noktah (titik) yang terbentuk pada diagram Cartesius pada Gambar 2.3. Jika noktah-noktah tersebut dihubungkan satu dengan yang lain ternyata membentuk *garis lurus*. Garis lurus yang terbentuk merupakan grafik fungsi $f(x) = 4.000x$ pada bidang Cartesius.

Berdasarkan uraian tersebut, diperoleh bahwa $f(x) = 4.000x$ merupakan fungsi linear.

Untuk lebih memahami konsep fungsi linear, coba Anda perhatikan fungsi $f(x) = 2x + 4$ dengan domain $\{x \mid -3 \leq x \leq 3, x \in R\}$. Untuk menggambar grafik fungsi tersebut pada bidang Cartesius, harus ditentukan terlebih dahulu kodomainnya.

- Untuk $x = -3 \rightarrow f(-3) = 2 \cdot (-3) + 4 = -2$
- Untuk $x = -2 \rightarrow f(-2) = 2 \cdot (-2) + 4 = 0$
- Untuk $x = -1 \rightarrow f(-1) = 2 \cdot (-1) + 4 = 2$
- Untuk $x = 0 \rightarrow f(0) = 2 \cdot 0 + 4 = 4$
- Untuk $x = 1 \rightarrow f(1) = 2 \cdot 1 + 4 = 6$
- Untuk $x = 2 \rightarrow f(2) = 2 \cdot 2 + 4 = 8$
- Untuk $x = 3 \rightarrow f(3) = 2 \cdot 3 + 4 = 10$

Dengan demikian, diperoleh grafik pada bidang Cartesius sebagai berikut.



Kata Kunci

- fungsi linear
- garis lurus

Notes

Setiap fungsi linear memiliki grafik pada bidang Cartesius yang berbentuk garis lurus.



Sumber: photos.somd.com

Grafik fungsi linear berbentuk garis. Garis merupakan bangun atau bagian paling sederhana di dalam geometri. Garis hanya memiliki satu dimensi, yaitu panjang. Garis dapat ditemukan di sekitar Anda, misalnya cahaya matahari yang bergerak dalam garis lurus.

Sumber: *Ensiklopedi Matematika & Peradaban Manusia*, 2002

Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa grafik fungsi $f(x) = 2x + 4$ pada bidang Cartesius berbentuk garis lurus, berarti $f(x) = 2x + 4$ merupakan fungsi linear.

Uraian tersebut memperjelas definisi dari fungsi linear, yaitu sebagai berikut.

fungsi linear adalah fungsi yang peubahnya paling tinggi berpangkat satu. Bentuk umum fungsi linear adalah $y = f(x) = ax + b$ (a dan $b \in R$, $a \neq 0$) untuk semua x dalam daerah asalnya.

Contoh Soal 2.2

Sebuah perusahaan travel mencatat penggunaan bahan bakar setiap 1 km dari mobil yang dioperasikannya. Datanya adalah sebagai berikut.

Jarak (km)	Bahan bakar (liter)
60	5
90	7,5

Dari ilustrasi tersebut, jawablah pertanyaan berikut.

- Tentukan fungsi linear yang menghubungkan antara jarak tempuh dengan bahan bakar yang dihabiskan.
- Jika mobil menempuh jarak 150 km, berapa liter bahan bakar yang dihabiskan?
- Jika mobil menghabiskan bahan bakar sebanyak 20 liter, berapa km jarak yang ditempuh mobil?

Jawab:

- Jika x merupakan peubah yang menyatakan jarak tempuh mobil dan $f(x)$ menyatakan bahan bakar yang habis terpakai, diperoleh hubungan berikut.

$$\text{Untuk } x = 60 \text{ maka } f(60) = 5$$

$$\text{Untuk } x = 90 \text{ maka } f(90) = 7,5$$

$f(x)$ merupakan fungsi linear maka $f(x)$ dapat dimodelkan sebagai berikut.

$$f(x) = ax + b \quad (a \text{ dan } b \in R, a \neq 0)$$

$$\text{untuk } x = 60 \text{ maka } f(60) = 5 = a(60) + b \Leftrightarrow 5 = 60a + b \dots (1)$$

$$\text{untuk } x = 90 \text{ maka } f(90) = 7,5 = a(90) + b \Leftrightarrow 7,5 = 90a + b \dots (2)$$

Dengan eliminasi persamaan (1) dan (2), diperoleh

$$\begin{array}{r} 5 = 60a + b \\ 7,5 = 90a + b \\ \hline -2,5 = -30a \\ 30a = 2,5 \\ a = \frac{2,5}{30} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12} \end{array}$$

Nilai b dapat ditentukan dengan menyubstitusikan peubah a pada persamaan (1) atau (2). Jika disubstitusikan ke persamaan (1) maka diperoleh

$$5 = 60\left(\frac{1}{12}\right) + b$$

$$5 = 5 + b$$

$$-b = 5 - 5$$

$$-b = 0$$

$$b = 0$$

Dengan demikian, $f(x) = \left(\frac{1}{12}\right)x + 0$

$$f(x) = \left(\frac{1}{12}\right)x$$

Jadi, fungsi yang menghubungkan jarak tempuh mobil dengan bahan bakar yang terpakai adalah $f(x) = \left(\frac{1}{12}\right)x$, dengan x menyatakan jarak tempuh mobil dalam km, dan $f(x)$ menyatakan bahan bakar yang terpakai dalam liter.

- b. Jika mobil menempuh jarak sejauh 150 km, berapa liter bahan bakar yang dihabiskan? Persoalan ini dapat diselesaikan

menggunakan fungsi $f(x) = \left(\frac{1}{12}\right)x$

Dengan menyubstitusikan 150 pada peubah x , diperoleh

$$f(150) = \left(\frac{1}{12}\right)(150) = \frac{150}{12} = 12,25$$

Jadi, jika mobil menempuh jarak sejauh 150 km maka mobil tersebut menghabiskan bahan bakar sebanyak 12,25 liter.

- c. Jika mobil menghabiskan bahan bakar sebanyak 20 liter, berapa jarak yang ditempuh mobil? Persoalan ini dapat diselesaikan

menggunakan fungsi $f(x) = \left(\frac{1}{12}\right)x$

Jika a merupakan peubah yang menyatakan jarak yang ditempuh mobil saat menghabiskan bahan bakar sebanyak 20 liter maka diperoleh

$$f(a) = 20$$

$$f(a) = \frac{1}{12}(a), \text{ berarti}$$

$$20 = \frac{1}{12}(a)$$

$$20 \times 12 = a$$

$$240 = a$$

Jadi, jika mobil menghabiskan bahan bakar sebanyak 20 liter maka mobil menempuh jarak sejauh 240 km.



Sumber: eblog.exuberance.com

Gambar 2.4

Bahan bakar dan jarak tempuh mobil membentuk fungsi linear.

Soal Pilihan

Harga 1 liter bensin pada Desember 2007 adalah x rupiah. Pada April 2008, mengalami kenaikan sebesar Rp200,00 per liter.

- Nyatakan dalam x , berapa liter bensin yang dapat dibeli dengan uang Rp88.000,00 pada Desember 2007?
- Nyatakan dalam x , berapa liter bensin yang dapat dibeli dengan uang Rp88.000,00 pada April 2008?

Seperti pada Contoh Soal 2.2, fungsi linear sangat erat kaitannya dalam kehidupan sehari-hari. Contoh lainnya dapat Anda pelajari pada Contoh Soal 2.3 berikut.

Contoh Soal 2.3

Sebuah perusahaan taksi menerapkan aturan Rp4.500,00 untuk "tarif buka pintu". Selanjutnya, penumpang dibebankan argo Rp3.500,00 setiap 1 km.

- Tentukan fungsi linear yang menghubungkan antara jarak tempuh dan tarif yang dibebankan pada penumpang.
- Jika penumpang menempuh jarak 8 km, berapakah tarif taksi yang harus dibayarnya?
- Jika penumpang membayar tarif sebesar Rp25.500,00, berapakah jarak yang ditempuh penumpang tersebut?

Jawab:

- Tarif buka pintu sebesar Rp4.500,00. Artinya, penumpang dikenakan biaya minimal sebesar Rp 4.500,00 ketika naik taksi. Jika x merupakan peubah yang menyatakan jarak tempuh taksi dan $f(x)$ menyatakan tarif taksi yang harus dibayar penumpang, diperoleh hubungan berikut. Untuk $x = 0$ maka $f(0) = 4.500$ (artinya taksi belum berjalan penumpang sudah dibebani tarif sebesar Rp4.500,00). Jika $f(x)$ merupakan fungsi linear maka $f(x)$ dapat dimodelkan sebagai berikut.

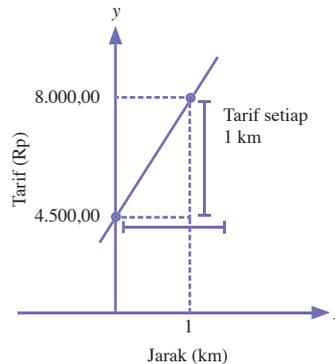
$$f(x) = ax + b \quad (a \text{ dan } b \in R, a \neq 0)$$

$$f(0) = a(0) + b = b \dots(1)$$

$$f(0) = 4.500 \dots (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2), diperoleh bahwa $b = 4.500$

Pernyataan "penumpang dibebankan argo Rp3.500 setiap 1 km" menyatakan gradien garis dari grafik fungsi linear.



Coba Anda ingat pelajaran di SMP tentang persamaan garis. Koefisien peubah x dari suatu persamaan garis menyatakan gradien garis. Fungsi linear yang Anda pelajari ini sebenarnya merupakan persamaan garis. Fungsi yang akan ditentukan di sini, adalah $f(x) = ax + b$, dengan nilai $a = 3.500$ dan $b = 4.500$.

Selanjutnya, fungsi linear yang menghubungkan antara jarak tempuh dengan tarif yang dibebankan pada penumpang, yaitu $f(x) = 3.500x + 4.500$

- b. Jika penumpang menempuh jarak sejauh 8 km, berapakah tarif taksi yang harus dibayarnya?

Persoalan ini dapat diselesaikan menggunakan fungsi $f(x) = 3.500x + 4.500$. Dengan menyubstitusikan 8 pada peubah x , diperoleh $f(8) = 3.500(8) + 4.500 = 32.500$. Jadi, jika penumpang menempuh jarak sejauh 8 km, tarif taksi yang harus dibayar adalah Rp32.500,00.

- c. Jika penumpang membayar tarif sebesar Rp25.500,00, berapakah jarak yang ditempuh penumpang tersebut? Persoalan ini dapat diselesaikan menggunakan fungsi $f(x) = 3.500x + 4.500$. Jika a merupakan peubah yang menyatakan jarak yang ditempuh taksi saat argonya menunjuk tarif sebesar Rp25.500,00 maka diperoleh

$$f(a) = 25.500$$

$$f(a) = 3.500a + 4.500 \text{ berarti}$$

$$25.500 = 3.500a + 4.500$$

$$25.500 - 4.500 = 3.500a$$

$$21.000 = 3.500a$$

$$a = \frac{21.000}{3.500}$$

$$a = 6$$

Jadi, jika penumpang membayar tarif sebesar Rp25.500,00 maka penumpang tersebut menggunakan taksi sejauh 6 km.



Sumber : www.kota-wisata.com

Gambar 2.5

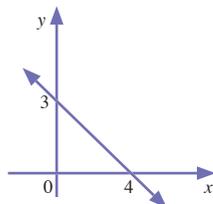
Penggunaan fungsi linear pada perusahaan taksi.

Evaluasi Materi 2.2

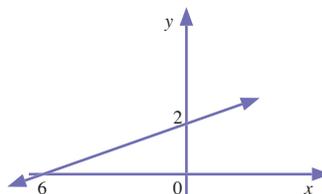
Kerjakan soal-soal berikut di buku latihan Anda.

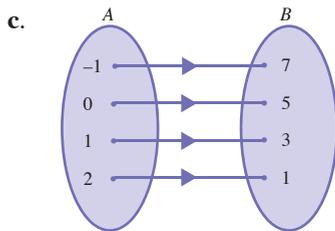
1. Tentukan persamaan fungsi yang digambarkan pada bidang Cartesius, diagram panah, dan pasangan berurutan berikut.

a.



b.





d. $\{(-1, -8), (0, -5), (1, -2), (0, -5), (1, -2)\}$

2. Seorang peternak memiliki domba sebanyak 60 ekor dan kerbau sebanyak 10 ekor. Peternak tersebut harus menyediakan 240 kg makanan domba setiap harinya dan 60 kg makanan kerbau setiap harinya.



Sumber : warintek.bantulkab.go.id

Sebulan kemudian, domba-dombanya bertambah $\frac{1}{3}$ dari jumlah semula, sedangkan jumlah kerbaunya tetap. Diketahui x menyatakan jumlah domba dan $f(x)$ menyatakan banyaknya makanan ternak yang harus disediakan peternak tersebut setiap harinya. Dengan asumsi jumlah kerbau selalu tetap, tentukan:

- persamaan fungsi $f(x)$,
 - banyaknya makanan ternak yang harus disediakan peternak sebulan kemudian,
 - jumlah seluruh ternak yang ada jika peternak tersebut harus menyediakan makanan ternak sebanyak 540 kg.
3. Sebuah hotel menerapkan tarif Rp500.000,00 per hari. Selain itu, setiap kali memesan kamar, konsumen dikenai tarif tambahan sebesar Rp300.000,00 untuk biaya administrasi.

- a. Tentukan fungsi linear yang menghubungkan antara lama konsumen menginap (hari) dengan tarif yang harus dibayarnya (termasuk biaya administrasi).



Sumber : www.parkplaza.com

- Jika seorang konsumen hotel membayar tarif hotel (termasuk biaya administrasi) sebesar Rp3.300.000,00, berapa hari konsumen itu menginap di hotel?
 - Jika seorang konsumen hotel menginap selama seminggu, berapakah tarif hotel (termasuk biaya administrasi) yang harus dibayarnya?
4. Sebuah perusahaan travel mencatat penggunaan bahan bakar per km dari mobil yang dioperasikannya adalah sebagai berikut.

Jarak (km)	Bahan Bakar (liter)
20	9
45	20,25

Dari ilustrasi tersebut, jawablah pertanyaan berikut ini.



Sumber : www.cipaganti.com

- a. Tentukan fungsi linear yang menghubungkan antara jarak tempuh dan bahan bakar yang diperlukan.
- b. Jika mobil menempuh jarak sejauh 60 km, berapa liter bahan bakar yang dihabiskan?
- c. Jika mobil menghabiskan bahan bakar sebanyak 22,5 liter, berapa jarak yang ditempuh mobil?

C Fungsi Kuadrat

Pada Subbab B, Anda telah mempelajari konsep fungsi linear. Pada subbab kali ini, Anda akan mempelajari fungsi kuadrat. Seperti halnya fungsi linear, fungsi kuadrat juga merupakan salah satu fungsi dalam matematika. Untuk membedakan kedua fungsi tersebut, perhatikan persamaan-persamaan berikut.

- a. $f(x) = 2x$
 b. $f(y) = -y + 4$
 c. $f(x) = x^2 - 2$
 d. $f(x) = x^2 + 3x - 12$
 e. $f(x) = -x^2 + 8x - 12$

Dapatkah Anda membedakan fungsi-fungsi tersebut? Pada persamaan **a** dan **b**, pangkat tertinggi yang dimiliki peubahnya adalah satu. Adapun pada persamaan **c**, **d**, dan **e**, pangkat tertinggi yang dimiliki peubahnya adalah dua. Persamaan seperti pada persamaan **a** dan **b** merupakan persamaan *fungsi linear*. Adapun persamaan seperti pada persamaan **c**, **d**, dan **e** merupakan persamaan *fungsi kuadrat*.

Perhatikan kembali persamaan **c**, **d**, dan **e**. Konstanta pada peubah berpangkat dua tidak boleh nol karena hal ini menyebabkan persamaan tersebut menjadi persamaan linear (bukan persamaan kuadrat).

Uraian tersebut memperjelas bahwa bentuk umum fungsi kuadrat adalah sebagai berikut.

$f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a , b , dan c merupakan bilangan real, dan $a \neq 0$.

Kata Kunci

- fungsi kuadrat
- parabola
- sumbu simetri
- titik balik
- titik potong



Sumber: *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia*, 2001

Leibniz Gottfried Wilhelm (1646–1717)

la adalah seorang tokoh filsafat matematika, ilmu alam, sejarah, sarjana hukum, dan diplomat Jerman. Leibniz dan Sir Isaac Newton, secara terpisah mengembangkan teori hitung pada kalkulus. Teori ini di dalamnya memuat beberapa jenis fungsi, seperti fungsi kuadrat, fungsi diferensial, dan fungsi integral. Ia juga mengembangkan sistem bilangan biner dan menemukan alat bantu hitung.

Sumber: *The World Book Encyclopedia*, 1995

Untuk memahami konsep fungsi kuadrat, pelajari uraian berikut dengan baik.

Coba Anda amati harga barang yang dijual di pasaran. Umumnya, harga barang akan naik menjelang hari raya dan turun setelah hari raya. Dapat dikatakan bahwa harga barang merupakan fungsi dari waktu, karena berfluktuasi menurut waktu.

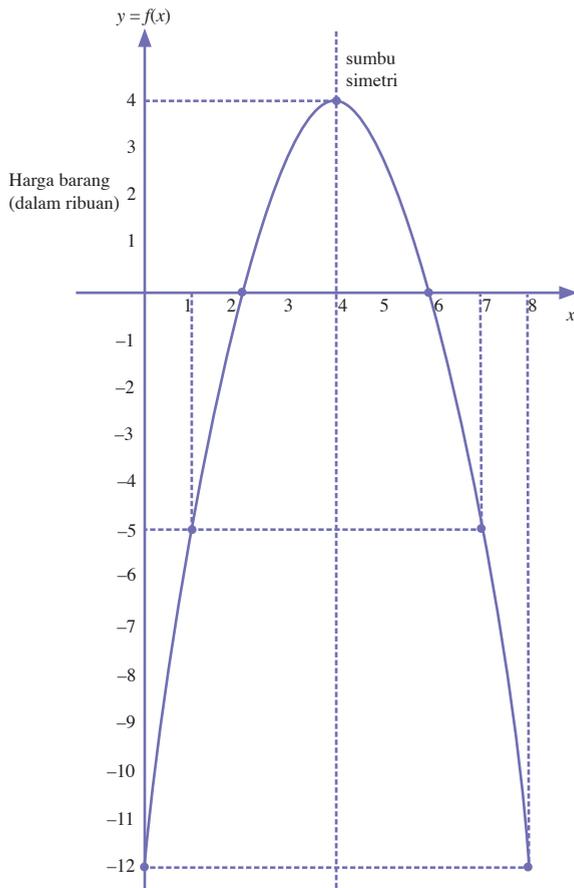
Asumsikan bahwa hubungan antara harga barang dengan waktu dinyatakan dengan fungsi, $f(x) = -x^2 + 8x - 12$ ribu rupiah, dengan x menyatakan bulan dan $f(x)$ menyatakan harga barang saat x .

Dapatkah Anda menentukan kapan harga barang sangat murah atau kapankah harga barang sangat mahal? Anda dapat menghitungnya dengan cara berikut.

- Untuk $x = 0$ maka $f(0) = -(0)^2 + 8(0) - 12 = -12$
- Untuk $x = 1$ maka $f(1) = -(1)^2 + 8(1) - 12 = -5$
- Untuk $x = 2$ maka $f(2) = -(2)^2 + 8(2) - 12 = 0$
- Untuk $x = 3$ maka $f(3) = -(3)^2 + 8(3) - 12 = 3$
- Untuk $x = 4$ maka $f(4) = -(4)^2 + 8(4) - 12 = 4$
- Untuk $x = 5$ maka $f(5) = -(5)^2 + 8(5) - 12 = 3$
- Untuk $x = 6$ maka $f(6) = -(6)^2 + 8(6) - 12 = 0$
- Untuk $x = 7$ maka $f(7) = -(7)^2 + 8(7) - 12 = -5$
- Untuk $x = 8$ maka $f(8) = -(8)^2 + 8(8) - 12 = -12$

Perhatikan harga barang berfluktuasi mulai dari Rp12.000,00 hingga Rp4.000,00. Pada fungsi tersebut terdapat harga barang negatif. Asumsikan untuk harga barang lebih kecil atau sama dengan nol atau $f(x) < 0$, barang menjadi barang bebas atau cuma-cuma. Jadi, barang tersebut sangat murah saat $x < 2$ (sebelum bulan ke-2) atau $x < 6$ (sesudah bulan ke-6), dan sangat mahal saat $x = 4$ (saat bulan ke-4).

Grafik fungsi kuadrat tersebut digambar pada bidang Cartesius. Hasilnya diperoleh seperti pada Gambar 2.6 berikut.

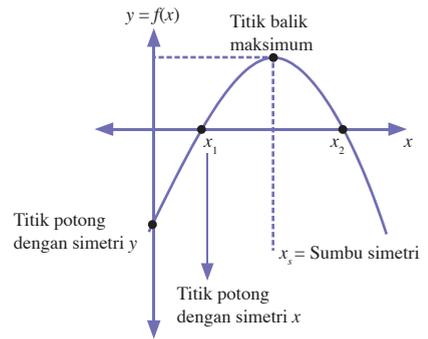
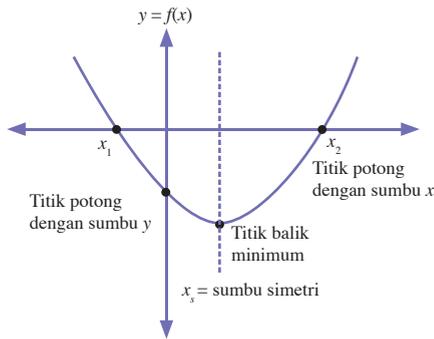


Gambar 2.6

Grafik fungsi kuadrat berbentuk parabola.

Perhatikan grafik fungsi $f(x) = -x^2 + 8x - 12$ pada gambar 2.6. Grafik tersebut memotong sumbu- x pada titik $(2, 0)$ dan $(6, 0)$, memotong sumbu- y pada titik $(0, 12)$, memiliki sumbu simetri pada $x_s = 4$, dan memiliki titik puncak atau titik balik maksimum $(4, 4)$. Untuk menggambar grafik fungsi kuadrat, Anda perlu mengetahui terlebih dahulu titik potong grafik fungsi kuadrat dengan sumbu- x dan sumbu- y , sumbu simetri, dan serta titik balik maksimum atau minimum.

Fungsi kuadrat memiliki titik balik maksimum atau minimum. Jika fungsi kuadrat memiliki titik balik *maksimum* maka grafik fungsi kuadrat *terbuka ke bawah*. Jika fungsi kuadrat memiliki titik balik *minimum* maka grafik fungsi kuadrat *terbuka ke atas*. Perhatikan grafik berikut.



Notes

Akar-akar persamaan kuadrat dapat diperoleh dengan cara:

- Perkantoran
- Kuadrat sempurna
- Menggunakan rumus kuadrat

Secara umum, fungsi kuadrat berbentuk

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0,$$

Oleh karena itu, grafiknya dapat digambar dengan langkah-langkah berikut.

- (i) Titik potong grafik fungsi kuadrat adalah $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$. x_1 dan x_2 adalah akar-akar dari persamaan kuadrat dan dapat ditentukan menggunakan rumus kuadrat sebagai berikut.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ dan } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ dan } x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

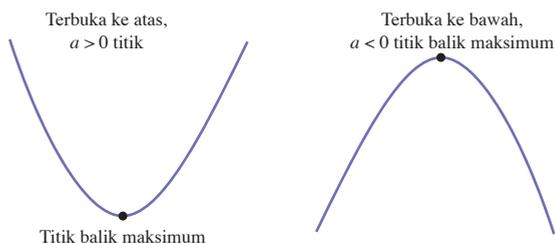
- (ii) Titik potong grafik kuadrat dengan sumbu-y adalah $(0, c)$. Perhatikan, grafik fungsi kuadrat memotong sumbu-y saat $x = 0$, untuk $x = 0$ maka $y = f(0) = a(0)^2 + b(0) + c = c$. Jadi, $y = f(0) = c$.

- (iii) Sumbu simetri grafik fungsi kuadrat adalah $x_s = \frac{-b}{2a}$

- (iv) Koordinat titik balik maksimum atau minimum adalah

$$x = \frac{-b}{2a} \text{ dan } y = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-D}{4a}$$

Dari mana mengetahui bahwa titik tersebut merupakan titik balik maksimum atau minimum? Untuk mengetahuinya, coba lihat koefisien dari peubah x^2 , yaitu a . Jika $a > 0$ maka fungsi terbuka ke atas. Jika $a < 0$ maka fungsi terbuka ke bawah $a < 0$.



Pelajarilah contoh soal berikut agar Anda memahami konsep-konsep tersebut.

Contoh Soal 2.4

Gambarlah grafik fungsi kuadrat $f(x) = -x^2 + 8x - 12$.

Jawab:

Untuk menggambar grafik fungsi kuadrat, harus ditentukan terlebih dahulu titik potong dengan sumbu- x , titik potong dengan sumbu- y , sumbu simetri, dan titik balik, yaitu sebagai berikut.

- Titik potong dengan sumbu- x adalah $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$ di mana x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat yang dapat diperoleh dengan rumus kuadrat $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Persamaan

$f(x) = -x^2 + 8x - 12$ dengan $a = -1$, $b = 8$, dan $c = -12$ memiliki

akar-akar sebagai berikut.

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-12)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 48}}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-8 + \sqrt{16}}{-2} \text{ dan } x_2 = \frac{-8 - \sqrt{16}}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-8 + 4}{-2} \text{ dan } x_2 = \frac{-8 - 4}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-4}{-2} \text{ dan } x_2 = \frac{-12}{-2}$$

$$x_1 = 2 \text{ dan } x_2 = 6$$

Jadi, titik potong dengan sumbu- x adalah $(2, 0)$ dan $(6, 0)$.

- Titik potong dengan sumbu- y adalah $(0, c)$ di mana $c = -12$
Jadi, titik potong dengan sumbu- y adalah $(0, -12)$
- Sumbu simetri adalah $x_s = \frac{-b}{2a}$ di mana $b = 8$ dan $a = (-1)$

$$\text{sehingga } x_s = \frac{-(8)}{2(-1)} = 4.$$

Jadi, sumbu simetrinya adalah $x_s = 4$

Notes

- $a > 0$, parabola membuka ke atas
- $a < 0$, parabola membuka ke bawah.

Solusi Cerdas

Grafik dari fungsi $f(x) = -x^2 + 4x - 6$ akan simetris terhadap garis

- $x = 3$
- $x = 2$
- $x = -2$
- $x = -3$
- $x = -4$

Pembahasan:

$f(x) = -x^2 + 4x - 6$ di mana $a = -1$, $b = 4$, $c = -6$
Sumbu simetri

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{-b}{2a} \\ &= \frac{-4}{2 \cdot (-1)} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Jawaban: **b**

EBTANAS SMK, 2001

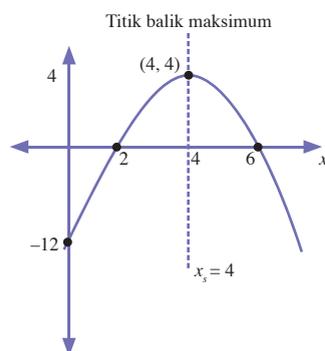
- Titik balik maksimum atau minimum adalah $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$

Jadi, titik balik maksimum atau minimumnya adalah

$$\left(\frac{-8}{2(-1)}, -\left(\frac{8^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-12)}{4(-1)}\right)\right)$$

$$\left(\frac{-8}{-2}, -\left(\frac{64 - 48}{-4}\right)\right) = (4, 4)$$

Pada fungsi kuadrat $-x^2 + 8x - 12$, $a = -1 < 0$, berarti $(4, 4)$ merupakan titik tidak maksimum. Berdasarkan perhitungan di atas, diperoleh grafik fungsi $f(x) = -x^2 + 8x - 12$ pada bidang koordinat sebagai berikut.

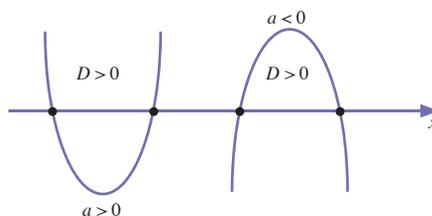


Notes

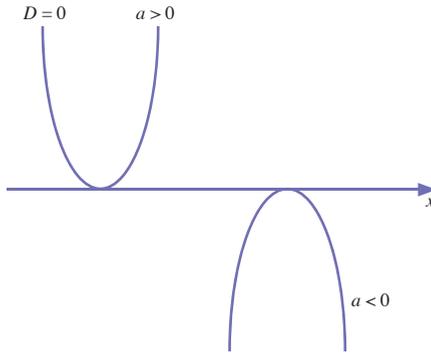
Ingat, D adalah diskriminan, yaitu pembeda akar-akar dari persamaan kuadrat.

Pada pembahasan sebelumnya, Anda telah mengetahui bahwa nilai a (koefisien peubah x^2) digunakan untuk menentukan apakah fungsi memiliki titik balik maksimum atau minimum. Sebelumnya juga telah dibahas bahwa diskriminan $D = b^2 - 4ac$ merupakan pembeda jenis akar-akar persamaan kuadrat tersebut (materi ini telah Anda pelajari di Kelas X). Selain untuk menentukan jenis akar, diskriminan juga dapat digunakan untuk mengetahui posisi grafik fungsi kuadrat pada bidang koordinat Cartesius, yaitu sebagai berikut.

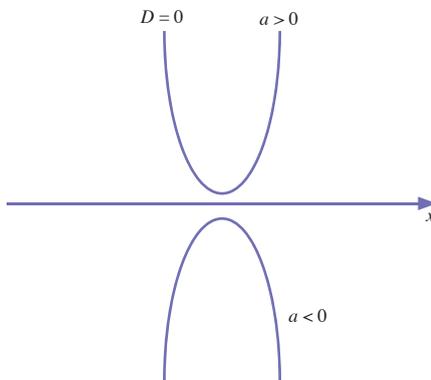
- Jika $D > 0$ maka grafik fungsi kuadrat memotong di 2 titik.



- Jika $D = 0$ maka grafik fungsi kuadrat menyinggung sumbu- x di 1 titik.



- Jika $D < 0$ maka grafik fungsi kuadrat tidak memotong sumbu- x .



Dari uraian tersebut dapat dilihat jika $a > 0$ dan $D < 0$ maka grafik kuadrat selalu berada di atas sumbu- x , berarti fungsi selalu bernilai *positif*. Jika $a < 0$ dan $D < 0$ maka grafik fungsi kuadrat selalu berada di bawah sumbu- x , berarti fungsi selalu bernilai *negatif*.

- $a > 0$ dan $D < 0$ maka fungsi disebut *definit positif*
- $a < 0$ dan $D < 0$ maka fungsi disebut *definit negatif*

Berikut ini contoh penerapan fungsi kuadrat pada kehidupan sehari-hari. Pelajarilah dengan baik.

Contoh Soal 2.5

Tentukan posisi grafik fungsi kuadrat berikut terhadap sumbu- x . Tentukan pula apakah parabola terbuka ke atas atau ke bawah.

- $f(x) = x^2 + 2x - 24$
- $f(x) = x^2 + 4x + 15$
- $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$

Kata Kunci

- koefisien
- diskriminan
- definit positif
- definit negatif

Soal Pilihan

Sebuah peluru ditembakkan ke atas. Tinggi peluru pada t detik dirumuskan oleh $h(t) = 40t - 5t^2$ (dalam meter). Tentukan tinggi maksimum yang dapat ditempuh peluru itu.

UN, 2004

Solusi Cerdas

Nilai a agar grafik fungsi $y = (a - 1)x^2 - 2ax + (a - 3)$ selalu berada di bawah sumbu- x (definit negatif) adalah

- $a = 1$
- $a > 1$
- $a < 1$
- $a > \frac{3}{4}$
- $a < \frac{3}{4}$

Pembahasan:

$y = (a - 1)x^2 - 2ax + (a - 3)$ di mana $p = a - 1$, $q = -2a$, $r = a - 3$ definit negatif berarti $D < 0$ dan $a > 0$

$$D < 0$$

$$q^2 - 4pr < 0$$

$$(-2a)^2 - 4(a - 1)(a - 3) < 0$$

$$4a^2 - 4(a^2 - 4a + 3) < 0$$

$$4a^2 - 4a^2 + 16a - 12 < 0$$

$$16a - 12 < 0$$

$$16a < 12$$

$$a < \frac{12}{16}$$

$$a < \frac{3}{4}$$

Jawaban: **e**

EBTANAS SMK, 2001

Jawab:

Untuk menentukan posisi grafik pada bidang koordinat Cartesius, harus ditentukan nilai diskriminannya terlebih dahulu.

a. $f(x) = x^2 + 2x - 24$, $a = 1$, $b = 2$, $c = -24$

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ &= 2^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-24) \\ &= 4 + 96 \\ &= 100 \end{aligned}$$

Oleh karena $D > 0$ dan $a > 0$, grafik fungsi $f(x) = x^2 + 2x - 24$ memotong sumbu- x di dua titik dan membuka ke atas.

b. $f(x) = x^2 + 4x + 15$, $a = 1$, $b = 4$, $c = 15$

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ &= 4^2 - 4 \cdot (1) \cdot (15) \\ &= 16 - 60 \\ &= -44 \end{aligned}$$

Oleh karena $D < 0$ dan $a > 0$, grafik fungsi $f(x) = x^2 + 4x + 15$ tidak memotong sumbu- x dan membuka ke atas.

c. $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$, $a = -4$, $b = -13$, $c = 9$

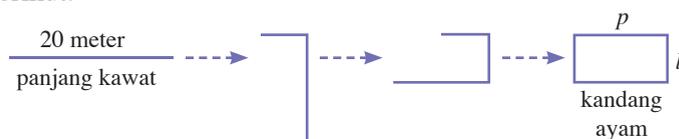
$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ &= (-12)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 9 \\ &= 144 - 144 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Oleh karena $D = 0$ dan $a > 0$ grafik fungsi $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$ memotong x di satu titik dan membuka ke atas.

Pada pembahasan sebelumnya, Anda telah mempelajari cara menggambar grafik fungsi kuadrat. Pada pembahasan kali ini, Anda akan mempelajari penerapan konsep dari fungsi kuadrat. Aplikasi atau penerapan konsep dari fungsi kuadrat dalam kehidupan sehari-hari khususnya dalam hal mencari nilai maksimum atau minimum dari suatu keadaan. Untuk memahaminya, perhatikan uraian berikut.

Untuk menambah pendapatannya, Pak Anwar berniat membuka usaha di bidang peternakan Ayam. Ia memiliki kawat sepanjang 20 meter. Pak Anwar berencana membuat kandang ayam berbentuk segi empat dari kawat tersebut. Berapakah luas maksimum kandang ayam yang dapat dibuat Pak Anwar? Berapa pula ukuran panjang dan lebar kandangnya?

Coba perhatikan gambar rencana kandang ayam pak Anwar berikut.



p = panjang kandang ayam

l = lebar kandang ayam

Panjang kawat sama dengan keliling kandang ayam maka dapat dituliskan

keliling kandang ayam = panjang kawat

$$p + p + l + l = 20$$

$$2p + 2l = 20$$

$$2(p + l) = 20$$

$$p + l = 10 \quad \dots(1)$$

Luas kandang ayam, dapat dimodelkan dengan persamaan berikut.

$$\text{Luas kandang ayam} = p \times l$$

$$L = p \times l \quad \dots(2)$$

Perhatikan kembali persamaan (1). Dari persamaan (1), dapat dibuat persamaan berikut.

$$p + l = 10 \Rightarrow p = 10 - l \quad \dots(3),$$

Kemudian, substitusi persamaan (3) pada persamaan (2), sehingga diperoleh

$$L = (10 - l) \times l$$

$$L = 10l - l^2 \quad \dots(4)$$

Perhatikan, persamaan (4) merupakan fungsi kuadrat dengan peubah l . Koefisien peubah l^2 adalah -1 , koefisien peubah l adalah 10 , dan konstanta fungsi kuadrat tersebut adalah 0 maka diperoleh nilai $a = -1$, $b = 10$, dan $c = 0$. (Coba Anda ingat kembali koefisien a , b , dan c pada bentuk umum persamaan kuadrat).

Persamaan (4) menyatakan luas kandang ayam (L) sebagai fungsi dari lebar (l) maka persamaan (4) dapat juga ditulis dalam bentuk $L(l) = 10l - l^2$.

Jika grafik fungsi kuadrat pada persamaan (4) digambarkan pada bidang Cartesius, akan terlihat pada Gambar 2.7.

$$\text{Untuk } l = 0 \text{ maka } L(0) = 10(0) - 0^2 = 0$$

$$\text{Untuk } l = 1 \text{ maka } L(1) = 10(1) - 1^2 = 9$$

$$\text{Untuk } l = 2 \text{ maka } L(2) = 10(2) - 2^2 = 16$$

$$\text{Untuk } l = 3 \text{ maka } L(3) = 10(3) - 3^2 = 21$$

$$\text{Untuk } l = 4 \text{ maka } L(4) = 10(4) - 4^2 = 24$$

$$\text{Untuk } l = 5 \text{ maka } L(5) = 10(5) - 5^2 = 25$$

...

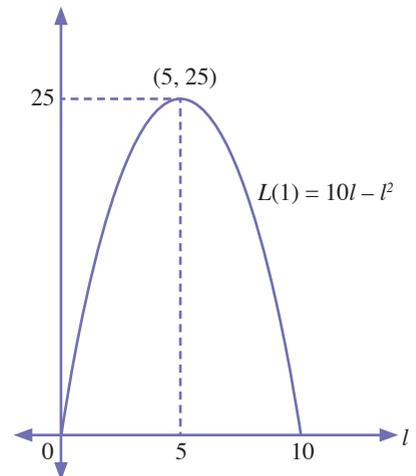
...

...

$$\text{Untuk } l = 10 \text{ maka } L(10) = 10(10) - 10^2 = 0$$

Titik potong fungsi kuadrat tersebut dengan sumbu mendatar adalah $(10, 0)$ dan $(0, 0)$, kemudian titik balik maksimumnya $(5, 25)$.

Pada gambar 2.7 dapat dilihat bahwa $L = 25$ merupakan nilai L maksimum dan $l = 5$ merupakan sumbu simetri. Berarti,



Gambar 2.7

Grafik fungsi $L = 10l - l^2$

luas maksimum kandang ayam yang dapat dibuat adalah 25 m^2 atau dapat dituliskan $L_{\max} = 25 \text{ m}^2$. Ukuran panjang dan lebar kandang ayam yang harus dibuat agar luas kandangnya maksimum adalah 5 m atau $l = 5 \text{ m}$.

Berdasarkan uraian sebelumnya, diperoleh bahwa luas kandang maksimum yang dapat dibuat merupakan nilai balik maksimum fungsi kuadrat $L = 10l - l^2$. Ukuran lebar kandang ayam yang menyebabkan kandang ayam memiliki luas maksimum merupakan sumbu simetri dari grafik fungsi kuadrat tersebut. Oleh karena itu, luas kandang ayam maksimum dapat dihitung menggunakan rumus

$$L_{\max} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}, \text{ dengan nilai } a, b, \text{ dan } c \text{ masing-masing adalah } -1, 10, \text{ dan } 0. \text{ Selanjutnya diperoleh } L_{\max} = -\frac{10^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}{4 \cdot (-1)}$$

$$= -\frac{100 - 0}{-4} = -\frac{100}{-4} = (25) = 25.$$

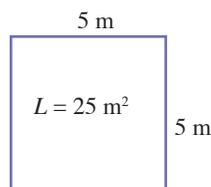
Ukuran lebar kandang ayam yang menyebabkan kandang ayam memiliki luas maksimum adalah

$$l = -\frac{b}{2a} = -\frac{10}{2 \cdot (-1)}$$

$$= -\frac{10}{-2} = -(-5) = 5.$$

Untuk menghitung panjang kandang ayam, nilai l dapat disubstitusikan ke persamaan (3), diperoleh $p = 10 - 5 = 5$.

Berdasarkan uraian tersebut maka kandang ayam milik Pak Anwar dapat digambarkan seperti berikut.



Dalam menyelesaikan suatu permasalahan dengan menggunakan konsep fungsi kuadrat, terlebih dahulu Anda harus membuat model matematika dari permasalahan tersebut. Pada pembahasan mengenai luas kandang ayam Pak Anwar di atas, persamaan (1) dan (2) merupakan model matematikanya.

$$\left. \begin{array}{l} p + l = 10 \quad \dots(1) \\ p \times l = L \quad \dots(2) \end{array} \right\} \text{ Model Matematika}$$

Setelah dibuat model matematikanya, kemudian substitusi dua persamaan tersebut. Perhatikan kembali langkah-langkah

dalam melakukan substitusi. Pada pembahasan permasalahan kandang ayam Pak Anwar, persamaan-persamaan yang disubstitusikan pada persamaan (3) merupakan modifikasi dari persamaan (1). Coba Anda perhatikan kembali uraian berikut. $p + l = 10 \dots (1)$ dimodifikasi menjadi $p = 10 - l \dots (3)$.

Setelah persamaan (3) disubstitusikan ke persamaan (2), barulah fungsi kuadrat yang digunakan untuk menentukan luas maksimum kandang ayam dapat diformulasikan. Fungsi kuadrat tersebut dinyatakan dalam persamaan (4).

Bagaimana jika persamaan (1) dimodifikasi menjadi $l = 10 - p$ kemudian disubstitusikan pada persamaan (2). Apakah permasalahan tersebut juga dapat dipecahkan? Coba Anda hitung dan diskusikan bersama teman sebangku Anda.

Tugas Siswa 2.3

Perhatikan kembali persamaan (1) dan (2) pada pembahasan mengenai kandang ayam Pak Anwar. Fungsi kuadrat yang dinyatakan dengan persamaan (4), dapat ditentukan setelah persamaan (1) dimodifikasi, kemudian substitusi ke persamaan (2). Coba langkahnya dibalik, modifikasi persamaan (2) menjadi $p = \frac{L}{l}$ atau $l = \frac{L}{p}$ kemudian Anda substitusi ke persamaan (1), apakah permasalahan tersebut juga dapat dipecahkan?

Agar anda lebih terampil dalam menerapkan konsep fungsi kuadrat dalam dunia kerja atau dalam kehidupan sehari-hari, pelajariah contoh soal berikut.

Contoh Soal 2.6

Dengan memperhitungkan upah lembur tenaga kerja *outsourcing*, biaya bahan baku, biaya transportasi, dan biaya operasional mesin produksi, diketahui bahwa biaya produksi 1 buah barang dapat dinyatakan dengan fungsi linear $h(x) = (2x - 200 + \frac{10.000}{x})$ ribu rupiah/buah, dengan peubah x menyatakan jumlah barang yang diproduksi, $x > 0$, dan $x \in$ bilangan bulat.

Berdasarkan ilustrasi permasalahan tersebut, hitunglah jumlah barang yang harus diproduksi agar biaya produksi total seminimal mungkin. Berapakah biaya produksi minimumnya itu?

Jawab:

Biaya produksi sebuah barang adalah

$$h(x) = (2x - 200 + \frac{10.000}{x}) \text{ ribu rupiah/ buah} \quad \dots (1)$$

Jumlah barang yang diproduksi = x buah ... (2)

Total biaya untuk memproduksi x barang = $P(x)$

Total biaya untuk memproduksi x barang merupakan hasil perkalian antara jumlah barang yang diproduksi dengan harga satuan produksi, sehingga diperoleh

$$P(x) = x \cdot h(x)$$

$$P(x) = x \cdot \left(2x - 200 + \frac{10.000}{x} \right)$$

$$P(x) = 2x^2 - 200x + 10.000 \quad \dots (3)$$

Persamaan (3) merupakan persamaan kuadrat yang menyatakan besar total biaya produksi ($P(x)$) sebagai fungsi dari jumlah barang yang diproduksi (x). Perhatikan persamaan (3) tersebut, nilai a , b , dan c nya masing-masing adalah 2, -200 , dan 10.000.

Jumlah barang yang harus diproduksi agar biaya produksi minimum merupakan sumbu simetri dari fungsi kuadrat $P(x) = 2x^2 - 200x + 10.000$. Berarti, jumlah barang yang harus diproduksi besarnya adalah

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-200)}{2 \cdot (2)} = \frac{200}{2 \cdot (2)} = 50 \text{ buah}$$

Untuk menghitung biaya produksi minimumnya, substitusi nilai peubah $x = 50$ ke persamaan (3), sehingga diperoleh

$$P(50) = 2(50)^2 - 200(50) + 10.000 = 5.000$$

atau dapat digunakan rumus untuk mencari nilai minimum fungsi kuadrat

$$\begin{aligned} P(x)_{\min} &= \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-((-200)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10.000)}{4 \cdot 2} \\ &= \frac{-(40.000 - 80.000)}{4 \cdot 2} = 5.000 \end{aligned}$$

Jadi, biaya produksi minimum adalah Rp5.000.000,00.

Contoh Soal 2.7

Nilai ekspor sebuah perusahaan tekstil pada 2007 dapat dinyatakan dengan fungsi kuadrat $P(x) = 4x^2 - 40x + 100$ milyar rupiah. Dengan $P(x)$ menyatakan besar nilai ekspornya, dan x menyatakan besaran bulan dalam 1 tahun. Untuk $x = 1$ menyatakan bulan Januari, $x = 2$ menyatakan bulan Februari, hingga $x = 12$ menyatakan bulan Desember.

- Gambarlah fungsi kuadrat $P(x) = 4x^2 - 40x + 100$ pada bidang Cartesius, kemudian jelaskan.
- Tentukan besar nilai ekspor pada bulan Juli.

Jawab:

- a. Sumbu- x menyatakan bulan dalam tahun dan sumbu- y menyatakan nilai ekspor perusahaan tekstil tersebut.

Persamaan kuadrat $P(x) = 4x^2 - 40x + 100$ memiliki nilai $a = 4$, $b = -40$, dan $c = 100$, oleh karena $a > 0$ maka grafik akan terbuka ke atas dan memiliki nilai balik minimum.

Nilai balik minimum grafik tersebut besarnya adalah

$$\begin{aligned} P_{\min} &= \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-((40)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 100)}{4 \cdot (4)} \\ &= \frac{-(1600 - 1600)}{16} = 0 \end{aligned}$$

Nilai minimum tersebut terjadi pada $x = x_s$ di mana

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-40)}{2 \cdot (4)} = \frac{40}{8} = 5$$

Berarti diperoleh titik balik minimumnya terletak pada koordinat $(5, 0)$.

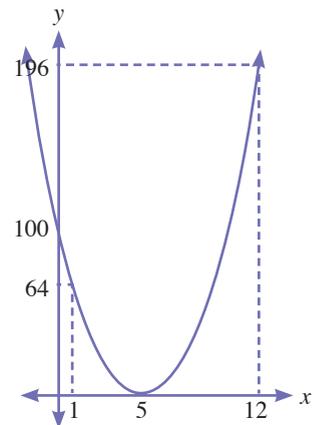
Titik potong grafik dengan sumbu- x dapat diperoleh dengan cara berikut.

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-(-40) \pm \sqrt{(-40)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 100}}{2 \cdot 4} \\ &= \frac{-(-40) \pm \sqrt{1600 - 1600}}{8} = \frac{-(-40) \pm 0}{8} = \frac{40}{8} = 5 \end{aligned}$$

Diperoleh $x_1 = x_2 = 5$, berarti grafik $P(x)$ menyinggung sumbu- x di titik $(5, 0)$. Titik potong grafik dengan sumbu- y terletak pada $x = 0$, pada $x = 0$ nilai $P(x)$ besarnya adalah $P(0) = 4(0)^2 - 40(0) + 100 = 100$, berarti grafik $P(x)$ memotong sumbu- y di titik $(0, 100)$. Berdasarkan Gambar 2.8, diperoleh keterangan bahwa selama periode tahun 2007, nilai minimum ekspor perusahaan tekstil tersebut besarnya adalah 0 rupiah yang terjadi pada bulan Mei ($x = 5$), dan nilai maksimum ekspornya besarnya adalah 196 milyar rupiah yang terjadi pada bulan desember ($x = 12$).

Grafik fungsi $P(x) = 4x^2 - 40x + 100$ pada bidang Cartesius terlihat pada Gambar 2.8.

- b. Besar ekspor pada bulan Juli dapat dihitung dengan menyubstitusikan nilai peubah $x = 7$ ke persamaan $P(x) = 4x^2 - 40x + 100$, diperoleh $P(7) = 4(7)^2 - 40(7) + 100 = 196 - 280 + 100 = 16$. Jadi, besar ekspor perusahaan tekstil pada bulan Juli besarnya adalah 16 milyar rupiah.



Gambar 2.8

Grafik fungsi $P(x) = 4x^2 - 40x + 100$

Evaluasi Materi 2.3

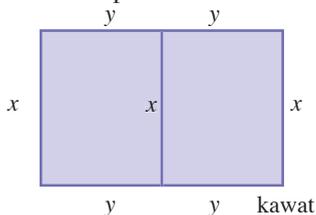
Kerjakan soal-soal berikut di buku latihan Anda.

- Gambarlah grafik fungsi kuadrat berikut.
 - $f(x) = x^2 - 11x + 10$
 - $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$
 - $f(x) = x^2 - 3x + 10$
 - $f(x) = -2x^2 - 3x + -5$
- Seorang peternak berencana membangun sebuah agro industri di bidang peternakan. Ia berencana membangun sebuah kandang unggas dengan kawat.



Sumber : karantina.deptan.go.id

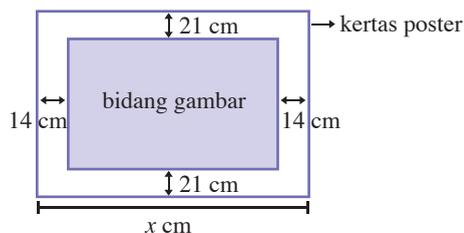
Penampang kandang tersebut jika digambar terlihat seperti berikut.



Untuk membangun kandang tersebut, peternak memiliki kawat dengan panjang 48 m. Tentukan ukuran x dan y agar luas kandang maksimum.

- Seorang *freelance* desainer poster, merencanakan membuat gambar pada kertas poster seluas 2 m^2 . Pada kertas poster tersebut akan

dibuat gambar dengan margin kanan, kiri, atas, dan bawah pada bidang gambar masing-masing adalah 14 cm, 14 cm, 21 cm, dan 21 cm. Perhatikan gambar berikut.



- Jika panjang kertas poster adalah x cm, tentukan luas bidang gambar sebagai fungsi dari x .
 - Tentukan panjang dan lebar kertas poster, agar luas bidang gambar mencapai maksimum.
- Andi seorang akuntan sebuah perusahaan manufaktur. Dia mengkalkulasi bahwa biaya produksi sebuah barang setiap harinya dapat dinyatakan dalam fungsi

$$(4x - 400 + \frac{30.000}{x}) \times 1000 \text{ rupiah/buah,}$$
 dimana x menyatakan jumlah barang yang diproduksi perharinya, $x > 0$, dan $x \in$ bilangan bulat. Andi diminta oleh atasannya untuk menentukan jumlah barang yang harus diproduksi perusahaan setiap harinya. Agar biaya produksi minimum, berapakah jumlah barang yang harus diproduksi perusahaan tersebut dan berapakah biaya produksi minimumnya?

Ringkasan

- Relasi antara dua himpunan adalah aturan yang memasangkan anggota-anggota himpunan yang pertama dengan anggota himpunan kedua.
- Relasi dapat dinyatakan oleh diagram panah, diagram Cartesius, dan himpunan pasangan berurutan.
- Fungsi antara dua himpunan adalah relasi yang memasangkan setiap anggota himpunan pertama tepat satu dengan anggota himpunan kedua.
- Pada fungsi dari himpunan A ke himpunan B , himpunan A disebut daerah asal (domain), himpunan B disebut daerah kawan (kodomain), dan himpunan bagian dari B yang merupakan hasil pemetaan disebut *range*.
- Grafik fungsi linear bentuk umum $y = f(x) = ax + b$, berupa garis lurus.
- Grafik fungsi kuadrat bentuk umum $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, berupa parabola yang memiliki karakteristik sebagai berikut.
 - Titik potong dengan sumbu- x ,
Syarat $y = 0$ atau $ax^2 + bx + c = 0$
Jika $D > 0 \Rightarrow$ ada dua titik potong
Jika $D = 0 \Rightarrow$ ada satu titik potong (parabola menyinggung sumbu- x)
Jika $D < 0 \Rightarrow$ grafik tidak memotong sumbu- x .
 - Titik potong dengan sumbu- y .
Syarat $x = 0$ diperoleh $y = c$, sehingga titik potong dengan sumbu- y adalah $(0, c)$
Jika $c > 0$, parabola memotong sumbu- y di atas titik $O(0, 0)$
Jika $c = 0$, parabola melalui titik $O(0, 0)$
Jika $c < 0$, parabola memotong sumbu- y di bawah titik $O(0, 0)$.
- Sumbu simetri: $x_s = -\frac{b}{2a}$.
- Titik puncak
 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{-4a} \right)$ atau $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a} \right)$
- Jika $a > 0$ maka fungsi kuadrat memiliki nilai minimum.
- Jika $a < 0$ maka fungsi kuadrat memiliki nilai maksimum.

Kaji Diri

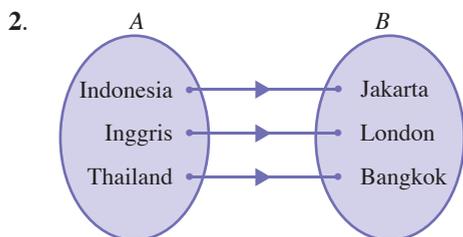
Setelah mempelajari materi tentang Relasi dan Fungsi, tuliskan bagian mana saja yang belum Anda pahami. Selain itu, tuliskan juga materi yang Anda senangi beserta alasannya. Bacakan tulisan Anda di depan kelas.

Evaluasi Materi Bab 2

I. Pilihlah salah satu jawaban yang tepat. Tuliskanlah jawabannya di buku latihan Anda.

1. Nama relasi pasangan berurutan $\{(6,3), (8,4), (10,5), (12,6)\}$ adalah

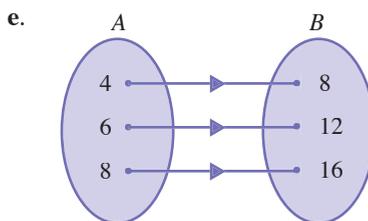
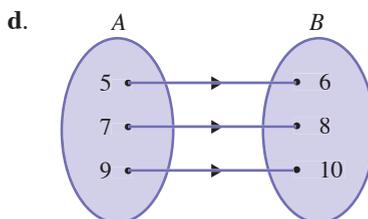
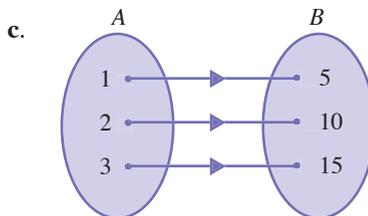
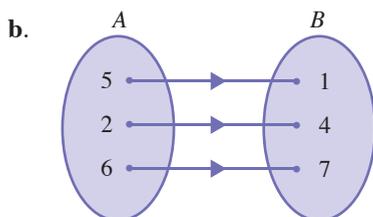
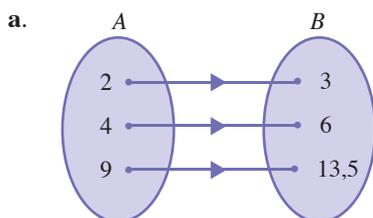
- setengah kali dari
- dua kali dari
- tiga kali dari
- empat kali dari
- lima kali dari



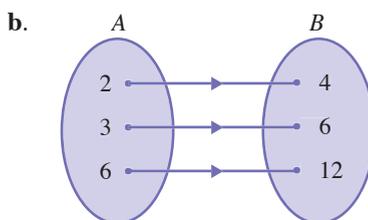
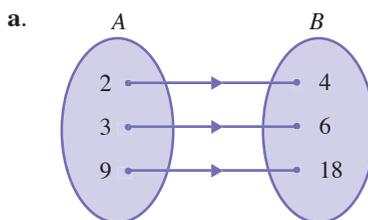
Nama relasi diagram panah tersebut adalah

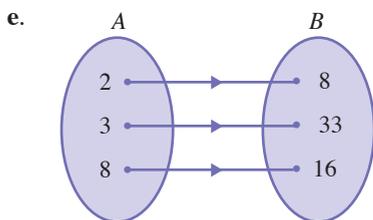
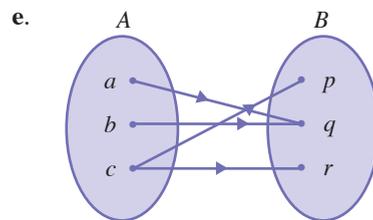
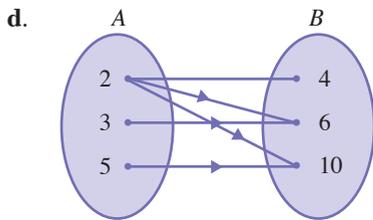
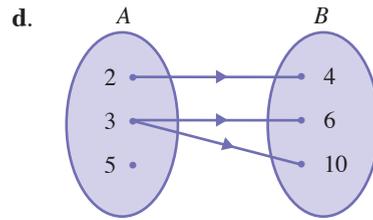
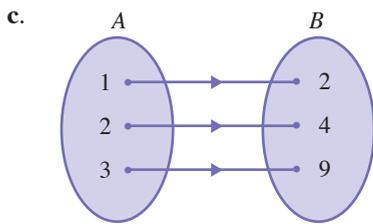
- memiliki hutan tropis di
- memiliki candi di
- bermata uang
- bernegara
- beribu kota di

3. Relasi berikut yang menyatakan " $\frac{2}{3}$ dari" adalah



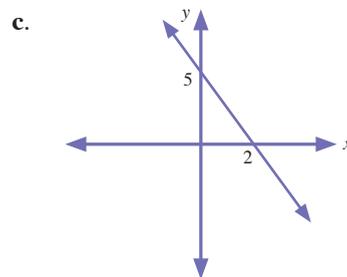
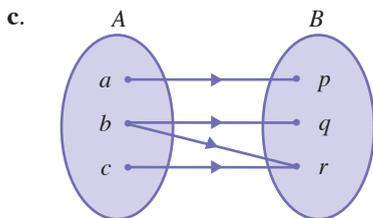
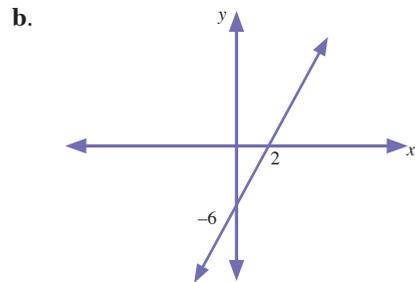
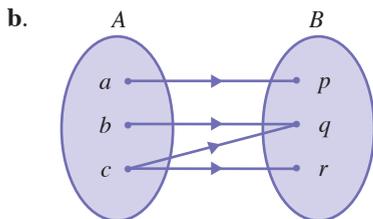
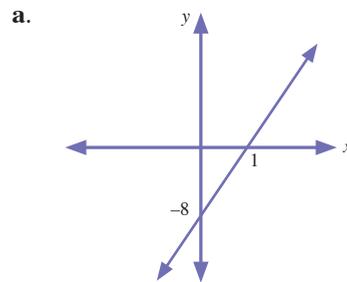
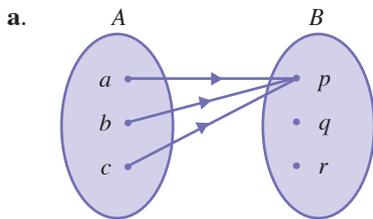
4. Relasi yang menyatakan "faktor prima dari" adalah



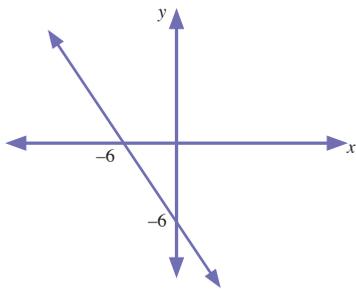


6. Grafik fungsi $f(x) = 3x - 6, x \in R$ adalah

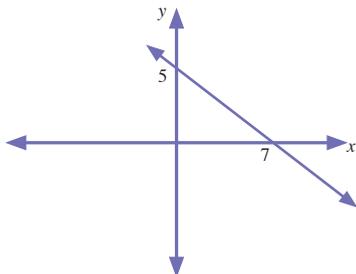
5. Relasi yang merupakan fungsi adalah



d.



e.



7. Fungsi linear yang memasangkan pasangan berurutan berikut adalah

- a. $y = 2x - 5$ d. $y = 4x - 5$
 b. $y = 2x - 5$ e. $y = 2x - 5$
 c. $y = 3x + 5$

8. Sebuah perusahaan taksi menetapkan "tarif buka pintu" sebesar Rp5.000,00. Selanjutnya, penumpang dibebankan argo Rp3.000,00 per km. Jika seorang konsumen menyewa taksi sejauh 8 km, tarif yang harus dibayarnya adalah

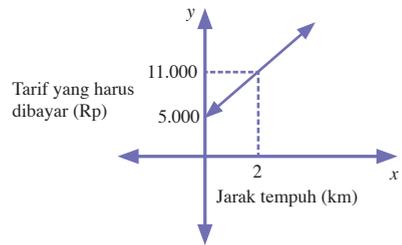
- a. Rp30.000,00 d. Rp31.000,00
 b. Rp50.000,00 e. Rp25.000,00
 c. Rp29.000,00

9. Jika seorang konsumen membayar tarif taksi sebesar Rp20.000, (pada soal no 8), konsumen tersebut menyewa taksi sejauh

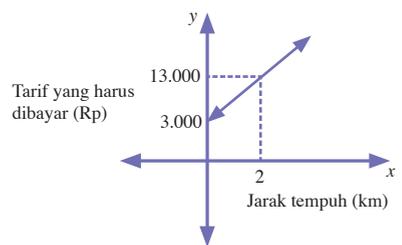
- a. 8 km d. 5 km
 b. 6 km e. 10 km
 c. 4 km

10. Grafik fungsi yang menghubungkan antara jarak tempuh taksi dan tarif yang harus dibayar konsumen (pada soal nomor 8) adalah

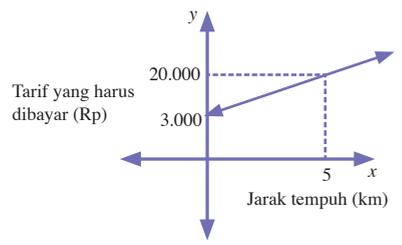
a.



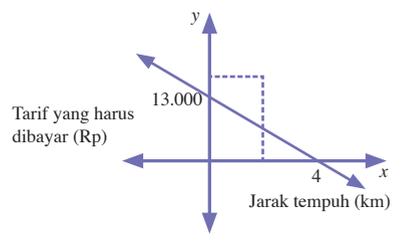
b.



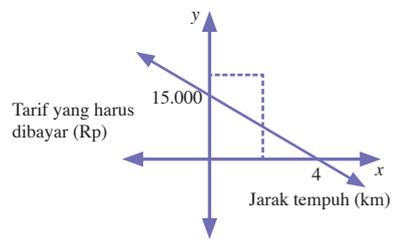
c.



d.



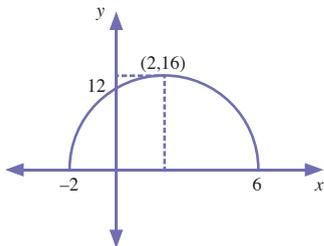
e.



11. Perhatikan fungsi kuadrat berikut.
 $f(x) = x^2 + 7x - 10$
- Fungsi kuadrat memiliki titik potong dengan sumbu- x pada titik $(5, 0)$ dan $(2, 0)$
 - Fungsi kuadrat memiliki titik potong dengan sumbu- y pada titik $(0, 7)$
 - Fungsi kuadrat memiliki sumbu simetri pada $x = -1\frac{1}{2}$
 - Fungsi kuadrat memiliki koordinat titik minimum pada $x = (1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4})$

Pernyataan yang benar mengenai fungsi tersebut adalah

- Pernyataan (i), (ii), dan (iii)
 - Pernyataan (i) dan (iii)
 - Pernyataan (i) dan (ii)
 - Pernyataan (ii) dan (iii)
 - Tidak ada pernyataan yang benar
12. Perhatikan grafik fungsi kuadrat berikut.



Persamaan fungsi kuadrat di atas adalah

- $x^2 + 4x + 12$
- $x^2 - 4x + 12$
- $2x^2 + 4x + 12$
- $x^2 + 4x + 12$
- $x^2 - 4x + 12$

II. Kerjakanlah soal-soal berikut.

- Buatlah 3 buah contoh diagram panah yang menyatakan fungsi.
- Gambarkan fungsi linear berikut pada bidang koordinat Cartesius.
 - $f(x) = 3x - 2$
 - $f(x) = 2x + 5$
- Tiga kilo mangga dijual dengan harga Rp12.000,00 dan 4 kg mangga dijual dengan harga Rp16.000,00. Buatlah diagram Cartesius yang menyatakan fungsi antara banyak buah yang dijual dan harganya.

13. Pak Toni memiliki sebidang tanah berbentuk persegi panjang yang akan digunakan untuk membuat kandang ayam. Panjang kawat yang akan digunakan untuk memagari kandang ayam tersebut adalah 60 m. Luas kandang ayam maksimal yang dapat dibuat Pak Toni adalah

- 220 m²
- 120 m²
- 225 m²
- 200 m²
- 100 m²

14. Grafik fungsi kuadrat berikut yang menyinggung sumbu- x di satu titik adalah

- $f(x) = x^2 + 6x - 7$
- $f(x) = x^2 - 5x + 4$
- $f(x) = x^2 - 5x + 6$
- $f(x) = x^2 + 6x + 5$
- $f(x) = x^2 - 4x + 4$

15. Harga suatu produk A dinyatakan dengan fungsi $f(x) = x^2 + 4x + 7$ (dalam ribuan rupiah) dengan $x > 0$, x menyatakan bulan ke ($x = 1 \rightarrow$ bulan Januari, $x = 2 \rightarrow$ bulan Februari, dan seterusnya), dan $f(x)$ menyatakan harga (dalam rupiah), harga produk tersebut bernilai Rp124.000,00 pada bulan

- Januari
- Maret
- April
- September
- Desember

4. Pak Anton seorang peternak unggas. Ia berencana membuat kandang ayam dari kawat berbentuk seperti gambar berikut ini. Jika panjang kawat yang dimiliki Pak Anton panjangnya 33 m, berapakah luas maksimum kandang unggas yang dapat dibuat pak Anton?
5. Gambarlah fungsi kuadrat berikut pada diagram Cartesius.

a. $f(x) = x^2 - 4x$

b. $f(x) = x^2 + 9x - 18$

c. $f(x) = 4x^2 - 8x + 4$



Pilihan Karir

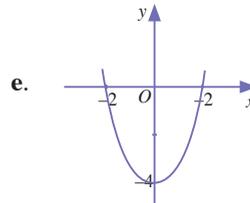
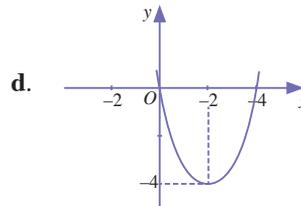
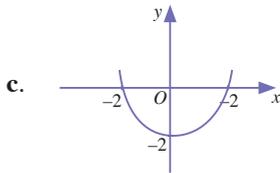
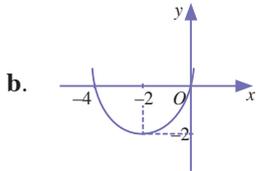
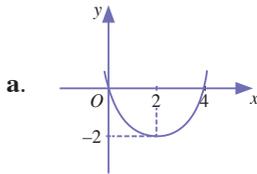
Operator telepon adalah orang yang bertanggung jawab menyampaikan sambungan telepon yang masuk kepada orang yang dituju. Selain itu, seorang operator telepon juga bertanggung jawab membuka saluran telepon jika ada karyawan yang hendak menghubungi pihak luar. Seorang operator telepon dalam sebuah perusahaan biasanya merangkap menjadi resepsionis.

I. Pilihlah salah satu jawaban yang tepat. Tuliskan jawabannya di buku latihan Anda.

1. Kalimat-kalimat berikut merupakan pernyataan, *kecuali*
 - a. Kuda dapat berlari kencang
 - b. Populasi penduduk Jakarta lebih dari 7 juta orang
 - c. Bandung adalah Ibukota Jawa Tengah
 - d. Benarkah $1 + 1 = 2$
 - e. Australia adalah benua terkecil
2. Kalimat $x + 3 = 5$ akan menjadi pernyataan benar jika nilai x
 - a. 0
 - b. 1
 - c. 2
 - d. 3
 - e. 4
3. Himpunan penyelesaian yang menyebabkan kalimat $y = x + 2$ menjadi pernyataan benar adalah
 - a. $\{x \mid x = y - 2, x \in R, y \in R\}$
 - b. $\{x \mid x = y + 2, x \in R, y \in R\}$
 - c. $\{(x, y) \mid y = x + 2, x \in R, y \in R\}$
 - d. $\{(x, y) \mid y > x + 2, x \in R, y \in R\}$
 - e. $\{(x, y) \mid y < x + 2, x \in R, y \in R\}$
4. Negasi dari pernyataan "Semua pelajar rajin" adalah
 - a. Semua pelajar tidak rajin
 - b. Ada pelajar yang rajin
 - c. Ada pelajar yang tidak rajin
 - d. Semua pelajar malas
 - e. Semua pelajar pintar
5. Jika p dan q salah satu maka pernyataan berikut yang benar adalah
 - a. $p \wedge q$
 - b. $p \wedge \sim q$
 - c. $p \vee \sim q$
 - d. $\sim(p \wedge \sim q)$
 - e. $\sim(\sim p \vee q)$
6. Jika p salah dan q salah, maka pernyataan berikut yang benar adalah
 - a. $p \Rightarrow q$
 - b. $\sim p = \sim q$
 - c. $\sim q \Rightarrow (p \wedge q)$
 - d. $\sim p \Rightarrow (p \wedge q)$
 - e. $\sim(p \wedge q) \Rightarrow p$
7. Jika p benar, q salah, dan r benar maka pernyataan berikut yang benar adalah
 - a. $p \wedge q$
 - b. $p \wedge \sim r$
 - c. $q \Rightarrow \sim r$
 - d. $r \Rightarrow q$
 - e. $(p \wedge q) \wedge r$
8. Kontraposisi dari pernyataan "Jika rajin belajar, maka akan sukses" adalah
 - a. Jika rajin belajar, maka tidak akan sukses
 - b. Jika tidak rajin bekerja, maka tidak akan sukses
 - c. Jika sukses, maka rajin belajar
 - d. Jika tidak sukses, maka tidak rajin bekerja
 - e. Jika rajin belajar, maka akan sukses
9. "Jika hewan itu kuda, maka hewan itu berkaki empat." Ternyata hewan itu tidak berkaki empat. Kesimpulannya adalah
 - a. Hewan itu kuda
 - b. Hewan itu ayam
 - c. Hewan itu pasti bukan ayam
 - d. Hewan itu bukan kuda
 - e. Hewan itu bukan kuda dan bukan ayam
10. Argumen-argumen berikut benar, *kecuali*
 - a.
$$\frac{p \Rightarrow q}{p} \therefore q$$
 - b.
$$\frac{p \Rightarrow q}{\sim q} \therefore \sim p$$
 - c.
$$\frac{p \Rightarrow q}{q \Rightarrow r} \therefore p \Rightarrow r$$
 - d.
$$\frac{p \Rightarrow q}{\sim q \Rightarrow \sim q} \therefore p \Rightarrow r$$
 - e.
$$\frac{p \Rightarrow q}{\sim q} \therefore \sim q$$

11. Berikut ini yang merupakan fungsi linear adalah
- $f(x) = 2x - 1$
 - $f(x) = \frac{1}{x}$
 - $f(x) = x^2 + 2$
 - $f(x) = 2^x$
 - $f(x) = \log x$
12. Jika $f(x) = x + 7$, maka $f(4) = \dots$
- 9
 - 10
 - 11
 - 12
 - 13
13. Diketahui $f(x) = 3x - 5$. Nilai $f(-2) = \dots$
- 1
 - 0
 - 9
 - 10
 - 11
14. Jika $f(x) = \frac{x+2}{3}$ maka $f(10) = \dots$
- 1
 - 2
 - 3
 - 4
 - 5
15. Diketahui $f(x) = ax + 1$. Jika $f(3) = 13$, maka a adalah
- 3
 - 4
 - 5
 - 6
 - 7
16. Diketahui $f(x) = 3x + a$. Jika $f(2) = 4$, maka a adalah
- 2
 - 1
 - 0
 - 1
 - 2
17. Diketahui $f(x) = 3x + a$. Jika $f(2) = 9$ dan $f(5) = 15$, maka a dan b adalah
- 2 dan 5
 - 5 dan 2
 - 5 dan 3
 - 3 dan 5
 - 5 dan 2
18. Diketahui $f(x) = ax + b$, $f(4) = 13$ dan $f(6) = 19$. Nilai a dan b adalah
- 2 dan 3
 - 2 dan 1
 - 3 dan 3
 - 3 dan 2
 - 3 dan 1
19. Jika $f(x) = x^2 - 3x + 2$, maka $f(1) = \dots$
- 0
 - 1
 - 2
 - 3
 - 4
20. Jika $f(x) = x^2 - 2$ maka grafik $f(x)$ memotong sumbu- x di titik
- $(-2, 0)$ dan $(2, 0)$
 - $(0, 0)$ dan $(2, 0)$
 - $(-\sqrt{2}, 2)$ dan $(\sqrt{2}, 0)$
 - $(-\sqrt{2}, 2)$ dan $(\sqrt{2}, 2)$
 - $(-\sqrt{2}, -2)$ dan $(-\sqrt{2}, 2)$
21. Fungsi $f(x) = 2x^2 - 1$ akan memotong sumbu- y di titik
- $(0, 0)$
 - $(0, 1)$
 - $(0, 2)$
 - $(0, 3)$
 - $(0, 4)$
22. Sumbu simetri dari fungsi $f(x) = x^2 - 5x + 6$ adalah
- $\frac{3}{2}$
 - $\frac{5}{2}$
 - $\frac{1}{2}$
 - $-\frac{3}{2}$
 - $-\frac{5}{2}$
23. Titik maksimum dari fungsi $f(x) = -x^2 - x + 2$ adalah
- $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$
 - $\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$
 - $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$
 - $\left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$
 - $\left(\frac{9}{4}, \frac{1}{2}\right)$
24. Nilai minimum dari fungsi $f(x) = x^2 - 3x - 4$ adalah
- $\frac{5}{2}$
 - $-\frac{5}{2}$
 - $\frac{2}{5}$
 - $\frac{25}{4}$
 - $-\frac{25}{4}$

25. Grafik yang benar untuk fungsi $f(x) = x^2 - 4$ adalah



II. Kerjakanlah soal-soal berikut.

- Diketahui implikasi "Jika seseorang mau berusaha maka seseorang akan berhasil". Tentukan invers, konvers, dan kontraposisi implikasi tersebut.
- "Jika harga minyak dunia naik maka harga bahan pokok naik, ternyata harga minyak dunia naik." Tentukan kesimpulan dari pernyataan tersebut.
- Diketahui fungsi $f(x) = 6x + 3$. Tentukan:
 - $f(-2)$
 - $f(-4)$
 - $f(5)$
 - $f(9)$
- Diketahui suatu $f(x) = ax - 2b$. Jika $f(2) = 14$ dan $f(4) = 20$, tentukan nilai a dan b .
- Diketahui fungsi $f(x) = x^2 - 7x + 10$. Tentukan:
 - titik potong terhadap sumbu- x ,
 - titik potong terhadap sumbu- y ,
 - sumbu simetri,
 - titik minimum,
 - gambaran grafik fungsinya.

Tugas Observasi Semester 1

Materi Pokok : Fungsi Linear dan Kuadrat

Kunjungi kantor kecamatan di daerah Anda. Mintalah data-data berikut.

- Angka kelahiran selama 10 - 20 tahun terakhir.
- Angka kematian selama 10 - 20 tahun terakhir.

Dari data yang Anda peroleh, lakukanlah kegiatan berikut.

- Susunlah data yang Anda peroleh pada tabel berikut.

Tahun	Angka Kelahiran	Angka Kematian
...

- Dari tabel yang Anda buat pada langkah 1, buatlah masing-masing diagram Cartesius untuk Angka Kelahiran dan Angka Kematian, dengan absis menyatakan tahun kelahiran atau kematian dan ordinat menyatakan angka kelahiran atau kematian. Misalnya, banyaknya kelahiran tahun 1990 adalah 20 bayi maka $x = 1990$ dan $y = 20$.
- Tarik garis dari noktah-noktah yang menyatakan banyaknya kelahiran atau kematian dari tahun ke tahun.
- Amati bentuk grafik yang terbentuk pada diagram Cartesius. Buatlah perkiraan fungsi yang sesuai dengan bentuk grafik.
- Dari fungsi yang Anda buat pada langkah 4, perkirakanlah:
 - angka kelahiran dan kematian 5 tahun mendatang.
 - angka kelahiran dan kematian 5 tahun mendatang.
- Buatlah laporan dari kunjungan yang telah Anda lakukan, kumpulkan laporan tersebut pada guru Anda.

Bab 3

Barisan dan Deret Bilangan



Sumber: www.lombokgiris.com

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan Anda dapat menerapkan konsep barisan dan deret dalam pemecahan masalah, yaitu mengidentifikasi pola, barisan, dan deret bilangan, menerapkan konsep barisan dan deret aritmetika dan geometri.

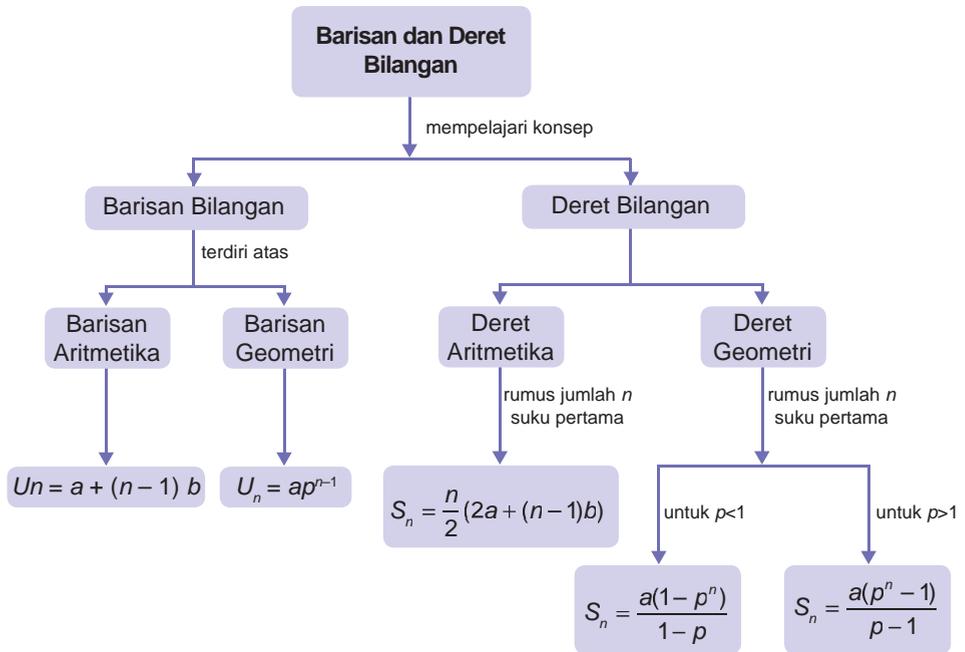
Sebuah *home industry* pada bulan Januari 2008 memproduksi 310 unit kerajinan tangan. *Home industry* tersebut menargetkan jumlah produksinya bertambah 20 unit setiap bulan. Berapakah jumlah produksi *home industry* tersebut pada bulan Desember 2008? Dengan menggunakan konsep barisan aritmetika, Anda dapat memecahkan masalah ini.

Pada pembahasan kali ini, Anda akan mempelajari barisan bilangan, deret bilangan, dan penerapannya. Materi ini sebenarnya telah Anda dapatkan di Kelas IX SMP. Akan tetapi, pada pembelajaran kali ini materi pembelajaran lebih ditekankan pada masalah sehari-hari di sekitar Anda.

- A. Pengertian Barisan dan Deret Bilangan
- B. Barisan dan Deret Aritmetika
- C. Barisan dan Deret Geometri

Peta Konsep

Materi tentang Barisan dan Deret Bilangan dapat digambarkan sebagai berikut.



Soal Pramateri

Kerjakan soal-soal berikut, sebelum Anda mempelajari bab ini.

- Tentukanlah hasil operasi penjumlahan dan pengurangan berikut.
 - $6 - (-6)$
 - $-19 + (-12)$
 - $-12 - 7$
 - $-15 - (-10)$
- Tentukanlah hasil operasi perkalian dan pembagian berikut.
 - 2×5^3
 - 16×2^4
 - $36 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2$
 - $6 : \left(\frac{2}{3}\right)^2$
 - $90 : \left(\frac{1}{4}\right)^2$
- Tentukanlah hasil operasi bilangan berikut.
 - $\frac{(3 + (-5 - 2)2)}{2}$
 - $\frac{6 \times (12 + (-6 - 2)3)}{9}$
 - $\frac{12 \times (-6^2 - 3)}{\left(4 - \frac{2}{3}\right)}$
 - $\frac{\frac{2}{4} \times \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right)}{\left(1 - \frac{3}{4}\right)}$

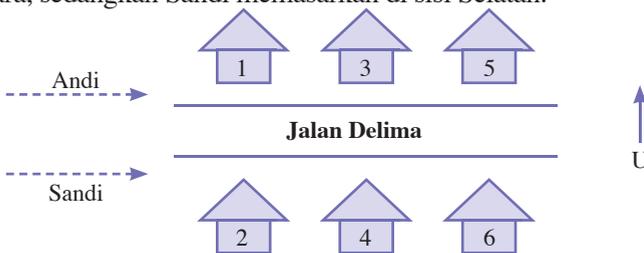
A Pengertian Barisan dan Deret Bilangan

Pada pembahasan kali ini anda akan mengetahui perbedaan antara barisan bilangan dan deret bilangan. Pelajari pembahasan berikut dengan baik.

1. Barisan Bilangan

Sebelum mempelajari barisan bilangan, pelajarilah ilustrasi berikut.

Andi dan Sandi adalah dua orang yang berprofesi sebagai *salesman* di sebuah perusahaan produk alat-alat rumah tangga. Keduanya biasa menjual atau menawarkan barang dagangannya secara *door to door* langsung mendatangi rumah calon konsumennya. Suatu hari pada rumah-rumah yang terletak di Jalan Delima, mereka berdua berbagi tugas. Andi memasarkan produk di sisi Utara, sedangkan Sandi memasarkan di sisi Selatan.



Secara kebetulan Andi mendatangi rumah-rumah bernomor 1, 3, 5,...dan seterusnya. Adapun Sandi mendatangi rumah-rumah bernomor 2, 4, 6,...dan seterusnya. Nomor-nomor rumah yang didatangi Andi dan Sandi dapat dituliskan dalam urutan bilangan berikut.

Nomor rumah yang didatangi Andi : 1, 3, 5,...

Nomor rumah yang didatangi Sandi : 2, 4, 6,...

Selanjutnya, nomor-nomor rumah yang didatangi Andi disebut urutan bilangan (1) dan nomor-nomor rumah yang didatangi Sandi disebut urutan bilangan (2). Oleh karena itu, dapat dituliskan:

urutan bilangan (1) : 1, 3, 5,...

urutan bilangan (2) : 2, 4, 6,...

Coba Anda perhatikan. Jika Andi telah mendatangi rumah nomor 5 dan kemudian ia melanjutkan ke rumah di sebelahnya, dapatkah Anda menyebutkan nomor rumah bernomor yang didatangi Andi?

Kata Kunci

- pola bilangan
- barisan bilangan
- deret bilangan
- barisan konvergen
- barisan divergen



Gambar 3.1

Nomor rumah di perumahan membentuk barisan bilangan. Sebelah kanan membentuk barisan bilangan ganjil 1, 3, 5, ..., dan sebelah kiri membentuk barisan bilangan genap 2, 4, 6,

Untuk menjawabnya, Anda harus menemukan pola atau aturan dari urutan bilangan (1). Dapatkah Anda menemukan polanya?

Secara intuitif Anda dapat melihat polanya, yaitu "ditambah 2" Perhatikanlah pola urutan bilangan berikut.

$$\begin{array}{ccccccc}
 1, & & 3, & & 5, & & \dots \\
 & \frown & & \frown & & \frown & \\
 & +2 & & +2 & & +2 &
 \end{array}$$

Bilangan 1, 3, dan 5 terletak pada urutan ke-1, 2, dan 3. Bilangan yang terletak pada urutan ke-2 merupakan hasil penjumlahan dari bilangan yang terletak pada urutan ke-1 dengan 2, demikian juga bilangan yang terletak pada urutan ke-3 merupakan hasil penjumlahan dari bilangan yang terletak pada urutan ke-2 dengan 2. Setelah Anda menemukan pola urutan bilangan (1) maka rumah yang didatangi Andi setelah ia mendatangi rumah nomor 5 adalah rumah bernomor $5 + 2 = 7$.

Dalam matematika, urutan bilangan yang memiliki pola disebut *barisan bilangan*. Untuk lebih jelasnya, pelajari pengertian barisan bilangan berikut.

Barisan bilangan didefinisikan sebagai susunan bilangan yang memiliki pola atau aturan tertentu antara satu bilangan dengan bilangan berikutnya.

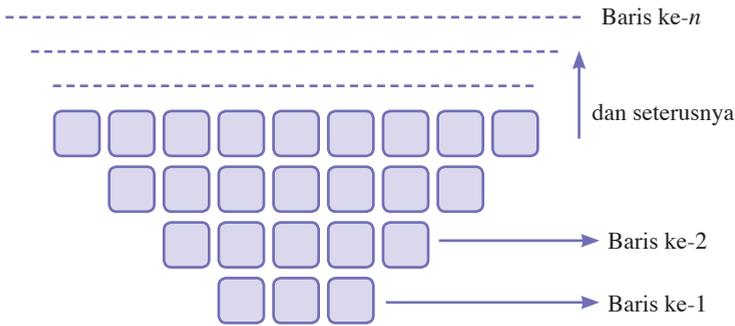
Dalam pembahasan mengenai barisan bilangan, dikenal istilah *suku*. Istilah suku di sini tidak sama dengan istilah suku dalam ilmu-ilmu sosial atau budaya yang merujuk pada pengertian etnis atau ras.

Untuk memahami istilah suku dalam konsep barisan bilangan, coba Anda perhatikan kembali urutan bilangan (1). Pada urutan bilangan (1), angka 1, 3, dan 5 masing-masing terletak pada urutan ke-1, 2, dan 3. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa 1 merupakan suku ke-1, 3 merupakan suku ke-2, dan 5 merupakan suku ke-3 dari urutan bilangan (1).

Dalam konsep barisan bilangan, suku ke- n disimbolkan dengan U_n . Dengan demikian, pada barisan bilangan 1, 3, 5, ... dapat dituliskan $U_1 = 1$, $U_2 = 3$, dan $U_3 = 5$.

Contoh Soal 3.1

Ana seorang Manajer di sebuah perusahaan elektronika. Ia mendapat tugas dari atasannya untuk menjadi panitia dalam acara seminar mengenai "Strategi Pemasaran Barang-Barang Elektronika". Dalam ruang seminar itu, kursi-kursi para peserta disusun seperti pada gambar berikut.



Berdasarkan ilustrasi tersebut tentukan:

- Jika pada barisan terakhir terdiri atas 15 kursi, tentukan jumlah barisan yang disusun dalam ruangan tersebut.
- Jika untuk tamu undangan diperlukan tambahan 2 baris kursi maka tentukan jumlah tamu undangan tersebut.

Jawab:

- Jumlah kursi yang disusun pada masing-masing barisan dalam ruang seminar adalah sebagai berikut.

baris ke-1 = 3 kursi
 baris ke-2 = 5 kursi
 baris ke-3 = 7 kursi

Jika Anda cermati, ternyata untuk setiap barisnya jumlah kursi bertambah dengan pola "ditambah 2", berarti jumlah kursi pada setiap barisnya, dapat disusun menggunakan barisan bilangan berikut.

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15

Pada barisan tersebut, angka 15 terdapat pada suku ke-7, berarti jumlah barisan yang disusun pada ruangan tersebut terdapat 7 baris.

- Jumlah tamu undangan dapat dihitung dari jumlah kursi dari 2 baris terakhir, yaitu baris ke-8 dan ke-9.

Dengan melihat pola barisan bilangan yang menyatakan jumlah kursi pada setiap baris pada soal a dan kemudian ditambah 2 suku maka diperoleh barisan bilangan berikut.

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19

↳ dua suku tambahan

Berdasarkan barisan bilangan di atas, diperoleh jumlah suku ke-8 dan ke-9 besarnya adalah $U_8 + U_9 = 17 + 19 = 36$.

Jadi, jumlah tamu undangan adalah 36 orang.



Gambar 3.2

Jumlah kursi pada setiap baris di ruangan seminar dapat membentuk barisan bilangan.

Tugas Siswa 3.1

Cermati kembali ilustrasi mengenai Andi dan Sandi pada awal Bab 3 ini, diskusikan dengan kelompok, Anda kemudian jawablah pertanyaan berikut.

1. Jika Andi ditugaskan oleh supervisornya untuk memasarkan produknya untuk 15 rumah dan Sandi ditugaskan untuk 20 rumah, tentukan nomor rumah terakhir yang didatangi oleh Andi dan Sandi.
2. Saat Andi selesai mendatangi rumah nomor 15, ia merasakan telepon selularnya bergetar dan ternyata SMS dari Sandi masuk. SMS itu berbunyi "*Andi kamu telah mendatangi berapa rumah? Aku sudah sampai di rumah nomor 30*". Dapatkah Anda membantu Andi menjawab SMS dari Sandi, dan apa jawaban yang tepat?
3. Lihat kembali tugas nomor 2, berapakah jumlah rumah yang telah didatangi Sandi saat ia kirim SMS untuk Andi?

Contoh Soal 3.2



Gambar 3.3

Keuntungan perusahaan garmen dapat diprediksi dengan menggunakan konsep barisan bilangan.

Pak Sanusi adalah seorang direktur perusahaan garmen nasional. Untuk memprediksi prospek keuntungan perusahaannya empat tahun ke depan, ia menggunakan jasa konsultan keuangan. Aspek-aspek yang menjadi pertimbangan ada dua macam, yaitu aspek dalam perusahaan dan aspek di luar perusahaan. Aspek dalam perusahaan meliputi kualitas SDM, sistem manajemen, dan kondisi neraca keuangan perusahaan. Aspek di luar perusahaan seperti tingkat inflasi, angka pertumbuhan penduduk, situasi politik regional, dan *trend* yang berlaku di masyarakat. Hasil prediksinya adalah sebagai berikut.

Tahun	2008	2009	2010	2011
Prediksi Keuntungan (dalam milyar rupiah)	5	6	11	17

Jika Anda bekerja di perusahaan garmen tersebut dan menempati posisi sebagai akuntan keuangan, kemudian Anda mendapat tugas dari Pak Sanusi untuk memprediksi keuntungan perusahaan pada tahun 2012 dan 2013, dapatkah Anda menjawabnya?

Jawab:

Keuntungan perusahaan garmen dari tahun 2008 hingga 2011 dapat ditulis dalam urutan bilangan 5, 6, 11, 17, ... (1)

Perhatikan urutan bilangan tersebut. Ternyata memiliki pola yang dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$U_1 + U_2 = U_3 \rightarrow 5 + 6 = 11$$

$$U_2 + U_3 = U_4 \rightarrow 6 + 11 = 17$$

Berarti urutan bilangan (1) tersebut merupakan barisan bilangan karena memiliki pola tertentu.

Coba Anda amati, keuntungan perusahaan pada tahun 2012 merupakan suku ke-5 dari barisan bilangan (1) dan keuntungan perusahaan pada tahun 2013 merupakan suku ke-6, U_5 dan U_6 dihitung dengan cara berikut.

$$U_3 + U_4 = U_5 \Rightarrow 11 + 17 = 28$$

Berarti, keuntungan perusahaan pada tahun 2012 besarnya adalah 28 milyar rupiah. Dengan menambahkan U_5 pada barisan bilangan (1), diperoleh barisan bilangan berikut.

5, 6, 11, 17, 28, ... (2)

U_6 diperoleh dengan perhitungan berikut

$$U_4 + U_5 = U_6 \Rightarrow 17 + 28 = 45,$$

Jadi, keuntungan perusahaan pada tahun 2013 adalah 45 milyar rupiah.

Notes

- 1, 2, 3, 4, 5, ...
dinamakan barisan bilangan asli
 - 2, 4, 6, 8, 10, ...
dinamakan barisan bilangan asli genap
 - 1, 3, 6, 10, 15, ...
dinamakan barisan bilangan segitiga
 - 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...
dinamakan barisan bilangan fibonacci
 - 1, 4, 9, 16, 25, ...
dinamakan barisan persegi
 - 2, 3, 5, 7, 11, ...
dinamakan barisan bilangan prima
- Dapatkah Anda temukan pola barisan-barisan tersebut?

Tugas Siswa 3.2

Coba Anda cermati kembali Contoh Soal 3.2. Misalkan, hasil penelitian konsultan keuangan mengenai prediksi keuntungan perusahaan garmen dalam 4 tahun mendatang seperti tabel berikut,

Tahun	2008	2009	2010	2011
Prediksi Keuntungan (dalam milyar rupiah)	3	5	12	24

Diskusikanlah dengan kelompok Anda untuk memprediksikan keuntungan perusahaan pada tahun 2012 dan 2015.

2. Deret Bilangan

Coba Anda cermati kembali Contoh Soal 3.1. Jumlah kursi pada setiap barisnya dalam ruang seminar tersebut dapat dinyatakan dengan barisan bilangan 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, Urutan tersebut merupakan barisan bilangan karena memiliki pola, yaitu "ditambah 2".

Pada pembahasan kali ini, Anda akan diperkenalkan dengan konsep deret bilangan. *Deret bilangan* merupakan jumlah beruntun dari suku-suku suatu barisan bilangan.

Berarti, deret bilangan dari barisan 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ... adalah $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + \dots$. Jika dalam ruang seminar pada Contoh Soal 3.1, terdapat 7 baris kursi maka

Jelajah Matematika



Fibonacci
(1170–1250)

Leonardo dari Pisa adalah orang yang mengenalkan angka nol ke dunia Barat. Anak muda yang lebih dikenal dengan nama Fibonacci ini belajar matematika dari orang-orang Islam dan menjadi matematikawan jenius dengan autodidak. Ia menemukan deret bilangan yang diberi nama seperti namanya, deret Fibonacci, yaitu 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

Sumber: *Ensiklopedi Matematika, 2008*

jumlah seluruh kursi dalam ruang seminar tersebut dapat dihitung dengan cara:

$$3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 63$$

Selanjutnya, diperoleh jumlah seluruh kursi dalam ruang seminar tersebut adalah 63 buah. Hasil penjumlahan 7 suku pada suatu deret disimbolkan dengan S_7 , maka pada deret $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + \dots$ diperoleh $S_7 = 63$.

Uraian tersebut memperjelas definisi deret berikut.

Jika $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ merupakan suku-suku suatu barisan maka $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$ dinamakan deret. Disimbolkan dengan S_n . Jadi, $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n = S_n$

Berikut dapat dilihat beberapa contoh deret.

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ dinamakan deret 6 bilangan asli pertama
 $2 + 3 + 5 + 7 + 11$ dinamakan deret 5 bilangan prima pertama
 $0 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12$ dinamakan deret 7 bilangan genap pertama.

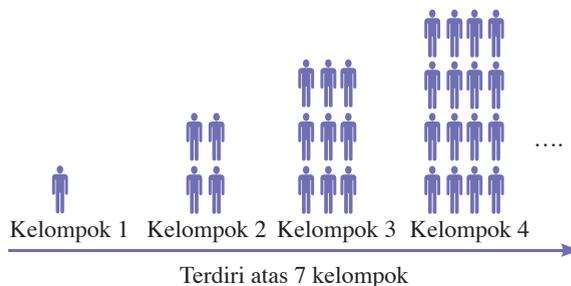
Tugas Siswa 3.3

Perhatikan deret bilangan asli, deret bilangan prima, dan deret bilangan genap pada uraian di atas. Kemudian, tentukanlah S_{10} dari masing-masing deret tersebut.

Untuk lebih memahami konsep deret bilangan, pelajari Contoh Soal 3.3 berikut dengan baik.

Contoh Soal 3.3

Ani seorang staf di bagian personalia pada suatu perusahaan BUMN. Ia mendapat kepercayaan untuk menjadi ketua panitia pada hari ulang tahun ke-30 perusahaan tersebut. Peserta upacara pada hari ulang tahun perusahaan itu akan berbaris seperti gambar berikut.



Tentukan jumlah peserta upacara yang harus dipersiapkan Ani.

Jawab:

Jumlah peserta pada setiap kelompok dapat dinyatakan dengan barisan bilangan 1, 4, 9, 16,

Oleh karena barisan upacara itu terdiri atas 7 kelompok maka harus ditentukan jumlah peserta pada kelompok 5 hingga 7, dengan menentukan pola bilangan pada barisan tersebut terlebih dahulu, yaitu:

$$U_1 = 1 \text{ maka } 1^2 = 1 \text{ diperoleh } U_1 = 1^2$$

$$U_2 = 4 \text{ maka } 2^2 = 4 \text{ diperoleh } U_2 = 2^2$$

$$U_3 = 9 \text{ maka } 3^2 = 9 \text{ diperoleh } U_3 = 3^2$$

$$U_4 = 16 \text{ maka } 4^2 = 16 \text{ diperoleh } U_4 = 4^2$$

Berdasarkan uraian tersebut, diperoleh pola bilangan $U_n = n^2$

sehingga diperoleh:

$$U_5 = 5^2 = 25$$

$$U_6 = 6^2 = 36$$

$$U_7 = 7^2 = 49$$

Oleh karena urutan bilangan tersebut memiliki pola maka urutan bilangan itu merupakan barisan bilangan.

Jadi, jumlah seluruh peserta upacara adalah

$$1 \text{ orang} + 4 \text{ orang} + 9 \text{ orang} + 16 \text{ orang} + 25 \text{ orang} + 36 \text{ orang} + 49 \text{ orang} = 140 \text{ orang.}$$

Contoh Soal 3.4

Biro Pusat Statistik memperkirakan bahwa angka kelahiran bayi di desa Suka Senang setiap bulannya, dari bulan Januari hingga Desember, selama tahun 2008 dapat dinyatakan dengan barisan bilangan 2, 6, 18, Nilai suku ke-1, ke-2, sampai ke-12 menyatakan jumlah bayi yang lahir pada bulan Januari, Februari, sampai Desember.

Berdasarkan ilustrasi tersebut,

- temukan pola barisan bilangan 2, 6, 18, ... dan tentukan pula nilai suku ke-4 sampai suku ke-6,
- tentukan jumlah seluruh kelahiran hingga bulan Juni.

Jawab:

- Perhatikan barisan bilangan 2, 6, 18, ...

Nilai suku ke-2 barisan bilangan tersebut sama dengan hasil perkalian nilai suku ke-1 dengan 3. Demikian juga nilai suku ke-3 adalah hasil perkalian nilai suku ke-2 dengan 3.

$$U_1 = 2$$

$$U_2 = 2 \times 3 = 6$$

$$U_3 = 6 \times 3 = 18$$

Berdasarkan uraian tersebut, nilai U_4 , U_5 , dan U_6 barisan bilangan tersebut dapat diperoleh dengan perhitungan berikut.

$$U_4 = 18 \times 3 = 54$$

$$U_5 = 54 \times 3 = 162$$

$$U_6 = 162 \times 3 = 486$$

- b. Kelahiran bayi pada bulan Januari sampai dengan Juni membentuk barisan bilangan 2, 6, 18, 54, 162, 486. Jadi, jumlah seluruh kelahiran bayi dari bulan Januari hingga Juni besarnya adalah $2 + 6 + 18 + 54 + 162 + 486 = 728$ kelahiran.

Tugas Siswa 3.4

Lakukan tugas ini secara berkelompok. Datangilah kantor kelurahan atau kecamatan di tempat tinggalmu, kemudian mintalah data tentang jumlah seluruh angka kelahiran bayi dari tahun 1995 hingga tahun 2007. Dari data tersebut, dapatkan Anda menemukan polanya?. Kemudian prediksilah jumlah kelahiran dari tahun 2008 hingga 2012, dan hitunglah seluruh kelahiran dari tahun 2008 hingga 2012.

Evaluasi Materi 3.1

Kerjakan soal-soal berikut di buku latihan Anda.

- Tentukan pola barisan berikut, kemudian tentukanlah U_6 , U_8 , dan U_{10} dari masing-masing barisan.
 - $-6, 2, 10, 18, \dots$
 - $-1, 3, 8, 14, \dots$
 - $9, 2, -5, -12, \dots$
 - $3, 1, -4, -8, \dots$
- Tentukanlah U_5 , U_7 , dan U_{10} dari pola-pola bilangan berikut.
 - $U_n = 2n + 3$
 - $U_n = 3n - 5$
 - $U_n = n^2 + 2n$
 - $U_n = 7n - n^2$
- Buatlah deret 10 suku pertama dari suku-suku barisan pada soal nomor 1. Tentukanlah nilai S_{10} dari deret tersebut.
- Data kelahiran bayi di Kecamatan Rukun Makmur selama tahun 2000 sampai 2007 dapat dinyatakan dengan barisan berikut. 40 bayi, 80 bayi, 160 bayi, ... Berdasarkan ilustrasi tersebut, jawablah pertanyaan berikut.
 - Tentukanlah pola barisan yang menyatakan angka kelahiran bayi di Kecamatan Rukun Makmur.
 - Tentukan angka kelahiran bayi pada tahun 2006 dan 2007.
 - Tentukan jumlah seluruh bayi yang lahir dari tahun 2000 hingga 2007.
- Data nilai ekspor dari perusahaan bisnis adalah sebagai berikut.

Tahun	Nilai Ekspor (dalam milyar rupiah)
2002	3
2003	4
2004	6
2005	9
2006	13
2007	18
2008	...
2009	...

Berdasarkan ilustrasi tersebut, jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut.

- a. Jika nilai ekspor dari tahun 2002 hingga 2007 membentuk suatu barisan bilangan maka tentukan pola barisan bilangan tersebut
- b. Prediksilah nilai ekspor perusahaan pada tahun 2008 dan 2009.
- c. Hitunglah jumlah prediksi nilai ekspor perusahaan tersebut dari tahun 2002 sampai dengan tahun 2010.

B Barisan dan Deret Aritmetika

Secara umum, Anda telah mempelajari perbedaan antara barisan dan deret bilangan pada Subbab A. Pada Subbab ini, Anda akan mempelajari barisan dan deret yang khusus, yaitu barisan dan deret aritmetika. Pelajarilah uraian berikut dengan baik.

Kata Kunci

- barisan aritmetika
- deret aritmetika

1. Barisan Aritmetika

Ciri barisan aritmetika adalah antara bilangan pada suku-suku yang berdampingan memiliki selisih atau beda yang tetap. Perhatikan barisan berikut.

(i) $0, 2, 4, 6, \dots$

(ii) $8, 5, 2, -1, -4, \dots$

Jika Anda cermati, setiap suku-suku yang berdampingan pada barisan bilangan (i) selalu memiliki beda yang tetap, yaitu 2.
 $2 - 0 = 4 - 2 = 6 - 4 = 2$.

Secara umum, dapat ditulis sebagai berikut.

$$U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = U_4 - U_3 = U_n - U_{n-1} = b$$

Pada barisan aritmetika, beda disimbolkan dengan b , dan suku ke-1 yaitu U_1 disimbolkan dengan a .

Berdasarkan uraian tersebut, ciri barisan aritmetika adalah sebagai berikut.

$$U_n - U_{n-1} = b$$

Rumus suku ke- n dinyatakan dengan persamaan:

$$U_n = a + (n - 1)b$$

Barisan (i) memiliki $a = 0$, dan $b = 2$. Suku-suku pada barisan itu dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$U_1 = 0 + (1 - 1) \cdot 2 = 0$$

$$U_2 = 0 + (2 - 1) \cdot 2 = 2$$

$$U_3 = 0 + (3 - 1) \cdot 2 = 4$$

$$U_4 = 0 + (4 - 1) \cdot 2 = 6$$

Soal Pilihan

Seorang ayah membagikan uang sebesar Rp100.000,00 kepada 4 orang anaknya. Makin muda usia anak, makin kecil uang yang diterima. Selisih yang diterima oleh setiap dua anak yang usianya berdekatan adalah Rp5000,00. Tentukan jumlah uang yang diterima oleh si bungsu.

UAN, 2003



Sumber : www.ebizzasia.com

Gambar 3.4

Jika tabungan awal diketahui dan jumlah perubahan tabungan konstan setiap bulannya maka bulan ke- n dapat ditentukan dengan menggunakan barisan aritmetika.

maka diperoleh rumus suku ke- n pada barisan (i) adalah sebagai berikut.

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$U_n = 0 + (n - 1) \cdot 2$$

$$U_n = 0 + 2n - 2$$

$$U_n = 2n - 2$$

Tugas Siswa 3.5

Lihat kembali barisan (ii) pada uraian di atas. Tentukanlah rumus suku ke- n pada barisan (ii) dan tentukan bilangan yang merupakan suku ke-20 pada barisan (ii).

Konsep barisan aritmetika dapat diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari. Pelajarilah Contoh Soal 3.5 berikut agar Anda dapat memahaminya dengan baik.

Contoh Soal 3.5

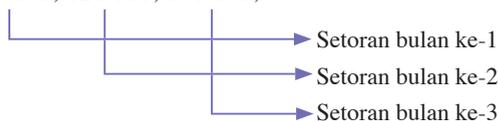
Andi membuka rekening tabungan di sebuah Bank. Pada bulan pertama, ia menyetor uang Rp100.000,00. Jumlah setoran akan ia naikkan sebesar Rp 20.000,00 dari setiap bulan sebelumnya. Tentukan:

- besar setoran Andi pada bulan ke-10,
- pada bulan ke berapa jumlah setoran Andi Rp 340.000,00?

Jawab:

- Jumlah setoran Andi setiap bulannya dapat dituliskan dengan barisan berikut.

100.000, 120.000, 140.000, ...



Barisan tersebut merupakan barisan aritmetika karena beda setiap suku yang bersebelahan besarnya tetap.

Setoran pada bulan ke-1 = $a = 100.000$

Kenaikkan setoran setiap bulannya = $b = 20.000$

Setoran pada bulan ke-10 menyatakan suku ke-10 atau U_{10} dari barisan tersebut.

Dengan menggunakan rumus suku ke- n ; diperoleh

$$U_n = a + (n - 1) \cdot b$$

$$U_{10} = 100.000 + (10 - 1) \cdot 20.000$$

$$U_{10} = 100.000 + 9 \cdot 20.000$$

$$U_{10} = 100.000 + 180.000$$

$$U_{10} = 280.000$$

Jadi, setoran Andi pada bulan ke-10 besarnya adalah Rp 280.000,00

- b. Pada bulan ke- n , setoran Andi sebesar Rp340.000, berarti diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$U_n = 340.000 \dots(1)$$

$$U_n = a + (n - 1) \cdot b = 100.000 + (n - 1) 20.000 \dots(2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$340.000 = 100.000 + (n - 1) 20.000$$

$$340.000 - 100.000 = 20.000 (n - 1)$$

$$240.000 = 20.000 (n - 1)$$

$$n - 1 = \frac{240.000}{20.000}$$

$$n - 1 = 12$$

$$n - 1 = 13$$

Jadi, setoran Andi pada bulan ke-13 besarnya Rp340.000,00.

Untuk lebih memahami konsep barisan aritmetika pelajariilah Contoh Soal 3.6 berikut.

Contoh Soal 3.6

Ayu seorang staf personalia di sebuah perusahaan manufaktur. Ia mendapat tugas dari manajer untuk membuat laporan mengenai jumlah surat lamaran yang masuk ke perusahaan tersebut dari tahun 1999 sampai tahun 2006. Akan tetapi, catatan tersebut hilang. Ia hanya mengingat bahwa jumlah surat lamaran setiap tahun dari tahun 1999 sampai tahun 2006 membentuk suatu barisan aritmetika, jumlah pelamar pada tahun 2001 dan tahun 2005 besarnya masing-masing adalah 110 dan 210. Berdasarkan ilustrasi tersebut, tentukan jumlah pelamar setiap tahunnya dari tahun 1999 sampai tahun 2006.

Jawab:

Jika jumlah pelamar setiap tahun membentuk suatu barisan aritmetika, berarti jumlah pelamar pada tahun 1999 merupakan suku ke-1, jumlah pelamar pada tahun 2000 merupakan suku ke-2, dan seterusnya.

Oleh karena, jumlah pelamar pada tahun 2001 dan 2005 merupakan suku ke-3 dan suku ke-7 dari barisan aritmetika tersebut.

Oleh karena rumus suku ke- n barisan aritmetika adalah

$$U_n = a + (n - 1)b \text{ maka diperoleh}$$

$$U_3 = a + (3 - 1)b = a + 2b$$

Oleh karena $U_3 = 110$ maka $a + 2b = 110 \dots(1)$, dan

$$U_7 = a + (7 - 1)b = a + 6b,$$

Oleh karena $U_7 = 210$ maka $a + 6b = 210 \dots(2)$.

Untuk memperoleh beda (b) dari deret aritmetika, dapat digunakan cara substitusi berikut. Dari persamaan (1), diperoleh

$$a + 2b = 110 \Leftrightarrow a = 110 - 2b \dots(3)$$

Substitusi persamaan (3) pada persamaan (2), diperoleh

$$(110 - 2b + 6b) = 210$$

$$110 + 4b = 210$$

$$110 + 4b = 210$$

Soal Pilihan

Buatlah 5 contoh barisan aritmetika selain contoh yang sudah ada. Dari ke-5 contoh tersebut, tentukan pula rumus jumlah suku n pertamanya

$$4b = 210 - 110$$

$$b = \frac{210 - 110}{4} = \frac{100}{4} = 25$$

Kemudian, untuk memperoleh $U_1 = a$ substitusi $b = 25$ pada persamaan (3) sehingga diperoleh

$$a = 110 - 2(25)$$

$$= 110 - 50$$

$$= 60$$

Jadi, suku pertama deret tersebut adalah 60.

Berdasarkan hasil perhitungan tersebut, diperoleh barisan aritmetika yang menyatakan jumlah pelamar dari tahun 1999 hingga tahun 2006 adalah sebagai berikut.

60 orang, 85 orang, 110 orang, 135 orang, 160 orang, 185 orang, 210 orang.

2. Deret Aritmetika

Coba Anda lihat kembali Contoh Soal 3.3 pada pembahasan sebelumnya. Jika ditanyakan "berapakah besar setoran Andi seluruhnya selama 10 bulan pertama?" maka jawabannya adalah deret berikut:

$$S_{10} = 100.000 + 120.000 + 140.000 + \dots + 280.000$$



Setoran bulan ke-1



Setoran bulan ke-10

Deret tersebut merupakan deret aritmetika karena setiap sukunya memiliki perbedaan tetap. Deret tersebut menyatakan jumlah 10 suku pertama, disimbolkan dengan S_{10} .

Pada pembahasan sebelumnya, Anda telah mengetahui bahwa jumlah n suku pertama dari suatu deret disimbolkan dengan S_n .

Jumlah n suku pertama deret aritmetika dapat diperoleh dengan persamaan berikut.

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n) \text{ atau}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)b)$$

Keterangan:

n = banyak suku, a = suku pertama, dan b = beda

Jumlah total setoran Andi selama 10 bulan pertama dapat dihitung dengan perhitungan berikut.

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)b)$$

di mana $n = 10$, $a = 100.000$, dan $b = 20.000$ sehingga diperoleh

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2 \cdot 100.000 + (10 - 1) \cdot 20.000)$$

$$S_{10} = 5 \cdot (200.000 + 9 \cdot 20.000)$$

$$S_{10} = 5 \cdot (200.000 + 180.000)$$

$$S_{10} = 5 \cdot (380.000)$$

$$S_{10} = 1.900.000$$

Berdasarkan perhitungan tersebut, diperoleh besar setoran Andi selama 10 bulan adalah Rp1.900.000,00.

Untuk jumlah suku yang tidak banyak, dapat dihitung dengan cara berikut:

$$100.000 + 120.000 + 140.000 + 160.000 + 180.000 + 200.000 + 220.000 + 240.000 + 260.000 + 280.000 = 1.900.000$$

Diperoleh hasil yang sama, tetapi untuk n yang cukup besar cara ini akan memakan waktu lama. Uraian tersebut memperjelas definisi deret aritmetika berikut.

Jika $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ merupakan suku-suku barisan aritmetika, maka $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$ dinamakan deret aritmetika.

Contoh Soal 3.7

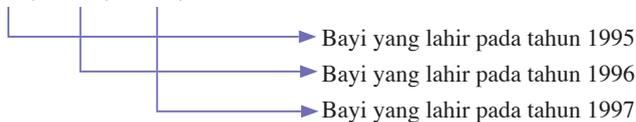
Jumlah angka kelahiran bayi di desa Sukamaju pada 1995 banyaknya 1.000 orang per tahun. Biro Pusat Statistik (BPS) memperkirakan bahwa jumlah kelahiran bayi pada tahun-tahun berikutnya akan meningkat 200 orang dari tahun sebelumnya. Berdasarkan perkiraan BPS tersebut, tentukan:

- jumlah bayi yang lahir pada tahun 2007,
- jumlah seluruh kelahiran bayi dari tahun 1995 hingga tahun 2005,
- jumlah seluruh kelahiran bayi dari tahun 2000 hingga tahun 2005.

Jawab:

- Jumlah bayi yang lahir setiap tahun di desa Sukamaju dapat ditulis dalam barisan aritmetika berikut.

1.000, 1.200, 1.400, ...



Bayi yang lahir pada tahun 1995 = $a = 1.000$

Kenaikan jumlah kelahiran bayi tiap tahun = $b = 200$

Bayi yang lahir pada tahun 2007 merupakan suku ke-13 dari barisan aritmetika tersebut. Berarti, bayi yang lahir pada tahun 2007 = U_{13} dan $n = 13$

Dengan menggunakan rumus suku ke- n :

$$U_n = a + (n - 1) \cdot b, \text{ diperoleh}$$

Soal Pilihan

Keuntungan seorang pedagang bertambah setiap bulan dengan jumlah yang sama. Keuntungan sampai bulan keempat Rp30.000,00 dan sampai bulan kedelapan Rp172.000,00. Tentukan keuntungan pedagang itu sampai bulan ke-18.

UMPTN, 1998



Sumber : images.diniauliya.multiply.com

Gambar 3.5

Jumlah angka kelahiran dari tahun ke tahun dapat ditentukan dengan konsep barisan dan deret aritmetika.

Solusi Cerdas

Suatu perusahaan pada tahun pertama memproduksi 5.000 unit barang. Pada tahun-tahun berikutnya produksinya turun secara tetap sebesar 80 unit per tahun. Produksi 3.000 unit barang terjadi pada tahun ke

- a. 24
- b. 25
- c. 26
- d. 27
- e. 28

Jawab

$$U_1 = 5.000$$

$$b = 80$$

$$U_n = 3.000$$

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$3.000 = 5.000 + (n - 1)(-80)$$

$$-2.000 = -80n + 80$$

$$= -80n$$

$$n = \frac{-2.080}{-80} = 26$$

Jawaban: **c**
UAN SMK, 2002

$$U_{13} = 1.000 + (13 - 1) \cdot 200$$

$$U_{13} = 1.000 + 12 \cdot 200$$

$$U_{13} = 1.000 + 2.400$$

$$U_{13} = 3.400$$

Jadi, jumlah kelahiran bayi pada tahun 2007 adalah 3.400 orang.

- b. Dari tahun 1995 sampai tahun 2005 terdiri atas 11 suku. Jumlah seluruh bayi yang lahir dari tahun 1995 hingga tahun 2005, adalah S_{11} dengan $a = 1.000$, $b = 200$, dan $n = 11$. Dengan menggunakan rumus jumlah n suku pertama dari deret aritmetika, diperoleh

$$S_n = \frac{n}{2} (2a + (n - 1)b)$$

$$S_{11} = \frac{11}{2} (2 \cdot 1.000 + (11 - 1) \cdot 200)$$

$$S_{11} = \frac{11}{2} (2.000 + (10) \cdot 200)$$

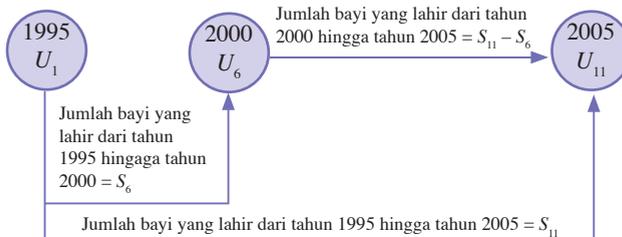
$$S_{11} = \frac{11}{2} (2.000 + 2.000)$$

$$S_{11} = \frac{11}{2} (4.000)$$

$$S_{11} = 22.000$$

Jadi, jumlah seluruh bayi yang lahir dari tahun 1995 hingga tahun 2005 adalah 22.000 orang.

- c. Jumlah seluruh kelahiran bayi dari tahun 2000 hingga tahun 2005 dapat dihitung dengan menjumlah seluruh kelahiran bayi dari tahun 1995 sampai dengan tahun 2005. Kemudian, dikurangi jumlah seluruh kelahiran bayi dari tahun 1995 sampai tahun 2000.



Jumlah seluruh kelahiran bayi dari tahun 2000 hingga tahun 2005 adalah $S_{11} - S_6$, di mana

$$S_{11} = 22.000$$

$$S_6 = \frac{6}{2} (2 \cdot 1.000 + (6 - 1) \cdot 200)$$

$$= 3 (2.000 + 1.000)$$

$$= 9.000$$

$$\begin{aligned} & \text{sehingga} \\ & = 22.000 - 9.000 \\ & = 12.000 \end{aligned}$$

Jadi, jumlah kelahiran bayi dari tahun 2000 hingga tahun 2005 adalah 12.000 orang.

Contoh Soal 3.8

Diperoleh data mengenai jumlah karyawan baru yang diterima oleh suatu perusahaan dari tahun 1997 sampai tahun 2006. Ternyata data tersebut membentuk suatu barisan aritmetika. Diketahui jumlah seluruh karyawan yang diterima selama kurun waktu dari tahun 1997 sampai tahun 2006 berjumlah 325 orang, dan jumlah karyawan yang diterima pada tahun 2000 adalah 25 orang. Tentukanlah:

- jumlah karyawan yang diterima perusahaan tersebut pada tahun 2004,
- jumlah seluruh karyawan yang diterima perusahaan tersebut dalam kurun waktu tahun 2000 hingga 2006.

Jawab:

- Jumlah karyawan yang diterima oleh perusahaan tersebut dari tahun 1997 sampai tahun 2006 dapat dinyatakan dengan barisan bilangan berikut.

$$U_1, U_2, U_3, \dots, U_{10} \dots$$



1997 1998 ...

Oleh karena dari tahun 1997 sampai tahun 2006 terdiri atas 10 suku maka jumlah seluruh karyawan yang diterima oleh perusahaan tersebut dari tahun 1997 hingga tahun 2006 merupakan deret 10 suku pertamanya, yaitu

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_{10} = 325$$

$$S_{10} = 325$$

Dengan mengingat rumus jumlah n suku pertama suatu deret aritmetika

$$S_n = \frac{n}{2} (2a + (n - 1)b) \text{ maka diperoleh persamaan berikut.}$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} (2a + (10 - 1)b)$$

$$325 = 5(2a + 9b)$$

$$325 = 10a + 45b \dots(1)$$

Persamaan lainnya dapat diformulasikan dari keterangan bahwa jumlah karyawan yang diterima pada tahun 2000 adalah 25 orang. Jumlah karyawan yang diterima pada tahun 2000 merupakan suku ke-4 dari barisan maka dengan rumus $U_n = a + (n - 1)b$, diperoleh persamaan

$$U_4 = a + (4 - 1)b$$

$$U_4 = a + 3b$$

$$25 = a + 3b \dots(2)$$

Dari persamaan (2), diperoleh

$$25 = a + 3b \Leftrightarrow a = 25 - 3b \dots(3)$$

Substitusi persamaan (3) pada persamaan (1), diperoleh persamaan berikut.

$$325 = 10(25 - 3b) + 45b$$

$$325 = 250 - 30b + 45b$$

$$325 - 250 = 15b$$

$$75 = 15b$$

$$b = \frac{75}{15} = 5$$

Jadi, diperoleh beda barisan aritmetika tersebut adalah $b = 5$.

Untuk memperoleh nilai $a = U_1$, substitusi $b = 5$ pada persamaan (3), diperoleh

$$a = 25 - 3(5)$$

$$a = 25 - 15$$

$$a = 10$$

Jumlah karyawan yang diterima perusahaan tersebut pada tahun 2004 merupakan suku ke-8 maka diperoleh

$$U_8 = a + (8 - 1)b = 10 + (7) \cdot 5 = 10 + 35 = 45.$$

Jadi, jumlah karyawan yang diterima perusahaan tersebut pada tahun 2004 adalah 45 orang.

- b. Jumlah seluruh karyawan yang diterima pada tahun 2000 sampai tahun 2006 dapat dihitung dengan mengurangkan jumlah seluruh karyawan yang diterima pada tahun 1997 sampai tahun 2006 dengan jumlah seluruh karyawan yang diterima pada tahun 1997 sampai tahun 1999.

Karyawan yang diterima pada tahun 1997 sampai tahun 2006 adalah 325 orang dan yang diterima pada tahun 1997 sampai tahun 1999 merupakan penjumlahan deret 3 suku pertamanya.

Dengan demikian, diperoleh

$$325 - S_3 = 325 - \frac{3}{2}(2(10) + (3 - 1)5)$$

$$= 325 - \frac{3}{2}(20 + 10)$$

$$= 325 - 45$$

$$= 280$$

Jadi, jumlah seluruh karyawan yang diterima pada tahun 2000 sampai tahun 2006 ada 280 orang.

Evaluasi Materi 3.2

Kerjakan soal-soal berikut di buku latihan Anda.

1. Perhatikan barisan aritmetika berikut.
 - i. 2, 7, 12, 17, ...
 - ii. -3, 5, 13, 21, ...
 - iii. 12, 6, 0, -6, ...
 - iv. 2, -3, -8, -13, ...

Jawablah pertanyaan berikut.

- a. Tentukan rumus suku ke- n dari barisan-barisan tersebut.
(Petunjuk: tentukan dahulu nilai a dan b dari setiap barisan, kemudian substitusikan ke rumus U_n)
 - b. Tentukan suku ke 17 dari barisan **i**, suku ke-10 dari barisan **ii**, suku ke-9 dari barisan **iii**, dan suku ke 12 dari barisan **iv**.
 - c. Pada barisan **i**, tentukan nilai n jika $U_n = 77$.
 - d. Pada barisan **ii**, tentukan nilai n jika $U_n = 93$
 - e. Pada barisan **iii**, tentukan nilai n jika $U_n = -108$
 - f. Pada barisan **iv**, tentukan nilai n jika $U_n = 48$
 - g. Tentukan jumlah 10 suku pertama pada barisan **i**.
 - h. Tentukan jumlah 20 suku pertama pada barisan **ii**.
 - i. Tentukan jumlah 15 suku pertama pada barisan **iii**.
 - j. Tentukan jumlah 10 suku pertama pada barisan **iv**.
 - k. Tentukan hasil penjumlahan seluruh suku dari suku ke-5 hingga suku ke-12 pada barisan **i**.
 - l. Tentukan hasil penjumlahan seluruh suku dari suku ke-10 hingga suku ke-15 pada barisan **iv**.
2. Tentukan banyaknya suku pada barisan aritmetika berikut ini.
 - a. $-4, 8, 20, \dots, 176$
 - b. $10, 6, 2, -2, \dots, -70$
 - c. $8, 23, 38, \dots, 158$.
 3. Tentukan hasil penjumlahan seluruh suku pada barisan **a**, **b**, dan **c** soal nomor 2.
 4. Pak Budi membuka peternakan ayam pada awal tahun 2007. Mula-mula dipelihara 60 ekor ayam. Selama bulan Januari 2007, menetas 10 ekor ayam. Diprediksi jumlah ayam yang menetas setiap bulan akan bertambah 5 ekor dari bulan sebelumnya. Tentukan.
 - a. jumlah ayam yang menetas pada bulan Februari 2008,



Sumber : www.goodexperience.co

- b. jumlah seluruh ayam yang menetas selama tahun 2007,
 - c. jumlah seluruh ayam yang dimiliki Pak Budi sampai Desember 2008,
 - d. jumlah ayam yang menetas sepanjang tahun 2008.
5. Berdasarkan sensus Departemen Sosial yang dilakukan di Kota X, berhasil diketahui bahwa jumlah seluruh penduduk yang hidup di bawah garis kemiskinan pada tahun 2000 adalah 576.000 jiwa. Setelah perbaikan ekonomi nasional, pada tahun 2001 jumlah penduduk miskin berkurang 1000 orang. Pengurangan jumlah penduduk miskin tersebut setiap tahun akan meningkat 2000 orang dari setiap tahun sebelumnya. Kapan seluruh penduduk kota X akan seluruhnya hidup di atas garis kemiskinan?
 6. Dalam suatu perusahaan terdapat 5 divisi. Divisi-divisi tersebut memiliki jumlah personel. Jika divisi-divisi tersebut diurutkan mulai dari yang jumlah personelnnya paling sedikit ke jumlah personel yang makin banyak maka diperoleh urutan sebagai berikut: divisi personalia, divisi logistik, divisi keuangan, divisi pemasaran, dan divisi produksi. Setelah diurutkan, ternyata jumlah masing-masing personel dari setiap divisi tersebut membentuk barisan aritmetika. Jika diketahui jumlah personel divisi keuangan adalah 320 orang dan jumlah personel divisi pemasaran dan produksi adalah 820 orang, tentukan:
 - a. jumlah seluruh personel divisi personalia dan divisi logistik.
 - b. jumlah seluruh karyawan perusahaan tersebut.

C Barisan dan Deret Geometri

Kata Kunci

- barisan geometri
- deret geometri
- rasio

Pada subbab B, Anda telah mempelajari barisan aritmetika. Ciri barisan aritmetika memiliki beda yang sama. Pada subbab ini, Anda akan mempelajari barisan geometri. Apakah perbedaan antara barisan aritmetika dan barisan geometri? Pelajarilah uraian berikut.

1. Barisan Geometri

Coba Anda perhatikan barisan berikut.

- a. 3, 9, 27, 81, ...
b. 32, 18, 8, 4, ...

Dari barisan **a**, dapat dilihat bahwa pada suku-suku yang berdekatan memiliki hasil bagi yang tetap, yaitu:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\frac{U_3}{U_2} = \frac{27}{9} = 3$$

$$\frac{U_4}{U_3} = \frac{81}{27} = 3$$

Berdasarkan perhitungan tersebut, Anda dapat melihat bahwa hasil bagi pada barisan tersebut adalah 3. Barisan tersebut memiliki ciri tertentu, yaitu perbandingan dua suku berurutan memiliki nilai tetap (konstan). Barisan yang memiliki ciri seperti ini disebut barisan geometri. Perbedaan yang konstan itu disebut *rasio*.

Uraian tersebut memperjelas bahwa barisan geometri memiliki ciri sebagai berikut.

$$\frac{U_n}{U_{n-1}} = r$$

dengan r merupakan rasio barisan geometri.

Rasio pada barisan geometri dapat merupakan bilangan bulat (positif dan negatif), dapat pula merupakan bilangan pecahan (positif dan negatif).

Coba Anda lihat barisan **b** pada pembahasan sebelumnya. Barisan tersebut memiliki urutan bilangan sebagai berikut.
32, 16, 8, 4, ...

Rasio pada barisan tersebut adalah

$$r = \frac{U_n}{U_{n-1}}$$

$$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{U_4}{U_3}$$

$$r = \frac{16}{32} = \frac{8}{16} = \frac{4}{8}$$

$$r = \frac{1}{2}$$

Coba Anda bandingkan barisan **a** dan barisan **b** pada pembahasan tersebut. Apa yang dapat Anda simpulkan?

- Jika $r > 1$ maka semakin besar sukunya, bilangan juga semakin besar.
- Jika $r < 1$ maka semakin besar sukunya, bilangan juga semakin kecil.

Rumus suku ke- n barisan geometri dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$U_n = a \cdot r^{n-1}$$

dengan a merupakan suku ke-1 dan r merupakan rasio bilangan.

Dapatkan Anda menentukan rumus suku ke- n pada barisan **a** dan **b**?

Barisan **a** memiliki $a = 3$ dan $r = 3$ maka rumus suku ke- n barisan ini adalah $U_n = 3 \cdot 3^{n-1}$

$$U_n = 3^1 \cdot 3^n \cdot 3^{-1}$$

$$U_n = 3^n \cdot 3^{1-1}$$

$$U_n = 3^n \cdot 3^0$$

$$U_n = 3^n$$

Jadi, rumus suku ke- n barisan 3, 9, 27, 81, ...

Barisan **b** memiliki $a = 32$ dan $r = \frac{1}{2}$ maka rumus suku ke- n barisan ini adalah sebagai berikut.

$$U_n = 32 \cdot \frac{1}{2}^{n-1}$$

$$U_n = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$U_n = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 2$$

$$U_n = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Solusi Cerdas

Dari suatu barisan geometri diketahui suku ke-5 adalah 25 dan suku ke-7 adalah 625. Suku ke-3 barisan tersebut adalah

a. $\frac{1}{25}$

b. $\frac{1}{5}$

c. 0

d. 1

e. 5

Jawab

$$U_5 = 25 = ar^4 \dots (1)$$

$$U_7 = 625 = ar^6 \dots (2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh

$$\frac{ar^6}{ar^4} = \frac{625}{25} \Leftrightarrow r^2 = 25$$

$$r = \pm 5$$

Dari (1), diperoleh

$$ar^4 = a(5)^4 = 25$$

$$a \cdot 625 = 25$$

$$a = \frac{25}{625} = \frac{1}{25}$$

$$U_3 = ar^2 = \frac{1}{25} \cdot (5)^2$$

Jawaban: **d**
UAN SMK, 2003

Jadi, rumus suku ke- n barisan 32, 16, 8, 4, ... adalah

$$U_n = 64 \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

Sekarang, coba Anda perhatikan uraian berikut.

- Bilangan pada suku ke-1 adalah $U_1 = 64 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^1$

$$U_1 = 64 \cdot \frac{1}{2}$$

$$U_1 = 32$$

- Bilangan pada suku ke-2 adalah $U_2 = 64 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2$

$$U_2 = 64 \cdot \frac{1}{4}$$

$$U_2 = 16$$

- Bilangan pada suku ke-3 adalah $U_3 = 64 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^3$

$$U_3 = 64 \cdot \frac{1}{8}$$

$$U_3 = 8$$

Search

Ketik: [www.e-dukasi.net/mapok/barisan dan deret](http://www.e-dukasi.net/mapok/barisan%20dan%20deret).

Website ini memuat materi barisan dan deret, yang terdiri atas barisan dan deret aritmetika dan geometri. Selain itu, memuat latihan dan simulasi menggunakan animasi sehingga Anda dapat berlatih secara *online*.

Contoh Soal 3.9

Berdasarkan penelitian Biro Pusat Statistik (BPS), pertumbuhan penduduk di kota A, selalu meningkat 3 kali dari tahun sebelumnya. Hasil sensus penduduk tahun 1998 menunjukkan jumlah penduduk di kota tersebut adalah 900.000 jiwa.

Tentukan:

- barisan geometri yang menyatakan jumlah penduduk di kota A, mulai dari tahun 1998,
- jumlah penduduk di kota A pada tahun 2008 (menurut penelitian BPS).

Jawab:

- Jumlah penduduk di kota A tahun 1998 = $a = 900.000$
Pertumbuhan penduduk meningkat 3 kali dari tahun sebelumnya, berarti rasio = 3 atau $r = 3$.

Diperoleh barisan geometri sebagai berikut.

$$900.000, \quad \xrightarrow{\times 3} \quad 2.700.000, \quad \xrightarrow{\times 3} \quad 8.100.000, \quad \dots$$

Jadi, barisan geometri yang dimaksud adalah 900.000, 2.700.000, 8.100.000, ...

- b. Jumlah penduduk tahun 1998 = 900.000 → suku ke-1
 Jumlah penduduk tahun 1999 = 2.700.000 → suku ke-2
 Jumlah penduduk tahun 2008 = ...? → suku ke-11
 Berdasarkan pembahasan pada soal a, diperoleh
 $a = U_1 = 900.000$
 $r = 3$

diperoleh rumus suku ke- n sebagai berikut

$$U_n = ar^{n-1}$$

$$U_n = 900.000 \cdot 3^{n-1}$$

$$U_n = 900.000 \cdot \frac{3^n}{3} \cdot 3^{-1}$$

$$U_n = 300.000 \cdot 3^n$$

Jumlah penduduk kota A tahun 2008 merupakan bilangan pada suku ke-11 dari barisan geometri sehingga diperoleh

$$U_{11} = 300.000 \times 3 \times 11$$

$$U_{11} = 53.144.100.000 \text{ jiwa.}$$

Jadi, jumlah penduduk kota A pada tahun 2008 adalah 53.144.100.000 jiwa.



Sumber: *dementad.com*

Gambar 3.6

Jumlah penduduk di suatu kota dari tahun ke tahun dapat diprediksi menggunakan barisan dan deret geometri.

Contoh Soal 3.9 merupakan aplikasi dari barisan geometri. Contoh lain dari aplikasi barisan geometri dapat Anda pelajari pada Contoh Soal 3.10 berikut.

Contoh Soal 3.10

Biro Pusat statistik memperoleh data yang menyatakan bahwa jika angka pengangguran diurutkan mulai dari tahun 2002 hingga tahun 2007 maka terbentuk suatu barisan geometri. Diperoleh juga informasi bahwa angka pengangguran pada tahun 2004 adalah 2000 orang dan tahun 2006 adalah 8000 orang.

Berdasarkan ilustrasi tersebut, tulislah barisan geometri yang menyatakan angka dari tahun 2002-tahun 2007.

Jawab:

Barisan geometri yang dimaksud adalah sebagai berikut. Angka pengangguran tahun 2002, pengangguran tahun 2003, pengangguran tahun 2004, pengangguran tahun 2005, pengangguran tahun 2006, pengangguran tahun 2007.

Berdasarkan barisan geometri tersebut, diperoleh keterangan bahwa angka pengangguran pada tahun 2004 adalah 2000, merupakan suku ke-3 atau dituliskan $U_3 = 2000$. Dengan memperhatikan bahwa rumus suku ke- n pada barisan geometri dapat ditulis sebagai $U_n = a \cdot r^{n-1}$, maka diperoleh,

$$\begin{aligned}
 U_3 &= 2000 \\
 ar^{3-1} &= 2000 \\
 ar^2 &= 2000 \dots (1)
 \end{aligned}$$

Angka pengangguran pada tahun 2006 adalah 8000, merupakan suku ke-5. Dengan cara yang sama, diperoleh

$$\begin{aligned}
 U_5 &= 8000 \\
 ar^{5-1} &= 8000 \\
 ar^4 &= 8000 \dots (2)
 \end{aligned}$$

Dari persamaan (1) dapat diperoleh persamaan(3) berikut.

$$ar^2 = 2000 \Leftrightarrow \frac{2000}{r^2} \dots (3)$$

Substitusi persamaan (3) ke persamaan (2) diperoleh

$$\frac{2000}{r^2} \cdot r^4 = 8000$$

$$2000 \cdot r^2 = 8000$$

$$r^2 = \frac{8.000}{2.000}$$

$$r^2 = 4$$

$$r = \pm\sqrt{4}$$

diperoleh $r_1 = 2$ dan $r_2 = -2$

Diperoleh 2 buah nilai r , yaitu 2 dan -2 . Untuk nilai rasio barisan geometri pada kasus permasalahan ini tidak mungkin bernilai negatif (coba Anda jelaskan mengapa?).

Oleh sebab itu, diambil nilai $r = 2$, kemudian substitusi pada persamaan (3), sehingga diperoleh $a = \frac{2000}{2^2} = \frac{2000}{4} = 500$.

Oleh karena a menyatakan nilai suku ke-1 maka diperoleh $U_1 = 500$, dan nilai suku-suku ke-2 hingga ke-6 diperoleh dengan perhitungan berikut.

$$U_2 = 500 \cdot 2^{2-1} = 500 \cdot 2 = 1000$$

$$U_3 = 500 \cdot 2^{3-1} = 500 \cdot 4 = 2000$$

$$U_4 = 500 \cdot 2^{4-1} = 500 \cdot 8 = 4000$$

$$U_5 = 500 \cdot 2^{5-1} = 500 \cdot 16 = 8000$$

$$U_6 = 500 \cdot 2^{6-1} = 500 \cdot 32 = 16000$$

Dengan demikian, diperoleh barisan geometri yang menyatakan angka pengangguran di desa dari tahun 2002 sampai tahun 2007 adalah 500, 1000, 2000, 4000, 8000, 16000.

Search

Ketik: http://bebas_vism.org/v12/sponsor/sponsor.pendamping/praweda/matematika

Bunga majemuk merupakan salah satu aplikasi deret geometri. Website ini memuat rumus bunga majemuk yang dapat digunakan untuk masalah pertumbuhan tanaman, perkembangan bakteri (p70), juga untuk masalah penyusutan mesin.

2. Deret Geometri

Coba perhatikan barisan geometri berikut.

3, 9, 27, 81, ...

Dapatkah Anda menghitung jumlah 4 suku pertamanya?

Untuk menghitung jumlah 4 suku pertamanya, dapat dilakukan penjumlahan $3 + 9 + 27 + 81 = 120$.

Penjumlahan beruntun suku-suku geometri merupakan deret geometri. Jadi, $3 + 9 + 27 + 81$ merupakan deret geometri. Pada deret geometri, jumlah n suku pertamanya dinyatakan sebagai berikut.

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \text{ untuk } r < -1 \text{ atau } r > 1$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \text{ untuk } -1 < r < 1$$

Dengan S_n menyatakan jumlah n suku pertama. Jadi, jumlah 4 suku pertama barisan geometri 3, 9, 27, 81, ... dapat dihitung dengan rumus berikut.

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \text{ di mana } a = 3, r = 3, \text{ dan } n = 3 \text{ sehingga}$$

$$S_4 = \frac{3(3^4 - 1)}{3 - 1}$$

$$S_4 = \frac{3 \cdot (81 - 1)}{2}$$

$$S_4 = \frac{3 \cdot 80}{2}$$

$$S_4 = \frac{240}{2}$$

$$S_4 = 120$$

36, 18, 9, $4\frac{1}{2}$, ...? Barisan geometri tersebut memiliki

$a = 36, r = \frac{1}{2}$. Oleh karena $-1 < r < 1$ maka jumlah 6 suku pertama deret tersebut adalah sebagai berikut.

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$S_6 = \frac{36 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^6 \right)}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$S_6 = \frac{36 \left(1 - \frac{1}{64} \right)}{\frac{1}{2}}$$

Soal Pilihan

Jumlah penduduk sebuah kota setiap 10 tahun menjadi 2 kali lipat. Menurut perhitungan, pada tahun 2000 mencapai 3,2 juta orang. Tentukan jumlah penduduk kota itu pada tahun 1950.

Sipenmaru, 1985

$$S_6 = 36 \left(\frac{64}{64} - \frac{1}{64} \right) \cdot 2$$

$$S_6 = 72 \cdot \frac{63}{64}$$

$$S_6 = \frac{567}{8}$$

$$S_6 = 70 \frac{7}{8}$$

Contoh Soal 3.11



Sumber : www.suarantb.com

Gambar 3.7

Total keuntungan yang diraih suatu perusahaan dapat dihitung menggunakan deret geometri

Sebuah perusahaan *home industry* pada tahun 2007 mencatat keuntungan di bulan Januari sebesar Rp14.000.000,00. Oleh karena kinerja perusahaan semakin baik, dan didukung ekonomi nasional yang semakin sehat maka di tahun tersebut keuntungan perusahaan naik menjadi $1\frac{1}{2}$ kali lipat dari bulan sebelumnya.

Tentukanlah:

- barisan geometri yang menyatakan keuntungan perusahaan tersebut setiap bulannya, mulai bulan Januari 2007,
- total keuntungan yang diraih perusahaan tersebut hingga bulan Agustus.

Jawab:

- Keuntungan bulan Januari $\rightarrow U_1 = 14.000.000$

Keuntungan bulan Februari

$$\rightarrow U_2 = 1\frac{1}{2} \times 14.000.000 = \frac{3}{2} \times 7.000.000 = 21.000.000$$

Keuntungan bulan Maret

$$\rightarrow U_3 = 1\frac{1}{2} \times 21.000.000 = \frac{3}{2} \times 10.500.000 = 31.500.000$$

Jadi, diperoleh barisan geometri sebagai berikut.

14.000.000, 21.000.000, 31.500.000, ...

- Total keuntungan yang diraih perusahaan hingga bulan Agustus merupakan jumlah 8 suku pertama barisan geometri pada soal a. Barisan geometri tersebut memiliki $a = 14.000.000$, $r = 1\frac{1}{2}$.

Jadi, jumlah keuntungan perusahaan sampai bulan Agustus dihitung dengan rumus

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$\text{diperoleh, } S_8 = \frac{14.000.000(2^8 - 1)}{2 - 1}$$

$$S_8 = \frac{14.000.000(256 - 1)}{1}$$

$$S_8 = 14.000.000 (255)$$

$$S_8 = 3.570.000.000$$

Jadi, keuntungan perusahaan *home industry* hingga bulan Agustus adalah Rp3.570.000.000,00.

Contoh Soal 3.12

Hasil penelitian gabungan Dinas Sosial dan Dinas Pendidikan Nasional dari tahun 2002 hingga tahun 2007 menunjukkan kecenderungan minat membaca penduduk kecamatan Y selalu meningkat dari tahun ke tahun dengan kelipatan perbandingan yang tetap. Jika jumlah total penduduk yang memiliki minat membaca pada tahun 2002 dan tahun 2003 adalah 80 orang, dan jumlah total penduduk yang memiliki minat membaca pada tahun 2002, 2003, 2004, dan 2005 besarnya 800 orang. Tentukanlah jumlah penduduk yang memiliki minat membaca pada tahun 2007.

Jawab:

Oleh karena minat membaca penduduk meningkat dengan kelipatan perbandingan yang tetap maka akan membentuk barisan geometri dengan $r > 1$ berikut.

$$U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6$$



2002 2007

Dari tahun ke tahun jumlah penduduk yang memiliki minat membaca selalu meningkat dengan perbandingan tetap maka $r > 1$.

Jumlah total penduduk yang memiliki minat membaca pada tahun 2002 ditambah tahun 2003 yang berjumlah 80 orang dapat dinyatakan dengan persamaan berikut $U_1 + U_2 = 80 \dots(1)$

Persamaan (1) merupakan hasil penjumlahan dua suku pertama dari suatu deret geometri. Mengingat rumus hasil penjumlahan

n suku pertama dari suatu deret geometri adalah $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

maka hasil penjumlahan dua suku pertama dari suatu deret geometri dapat dinyatakan dengan rumus $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$, sehingga diperoleh persamaan berikut.

$$\frac{a(r^2 - 1)}{r - 1} = 80 \dots(2)$$

Jumlah total penduduk yang memiliki minat membaca pada tahun 2002, 2003, 2004, dan 2005 adalah 800 orang dapat dinyatakan dengan persamaan berikut.

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = 800 \dots(3)$$

Persamaan tersebut merupakan hasil penjumlahan empat suku pertama dari suatu deret geometri, sehingga diperoleh persamaan

$$S_4 = \frac{a(r^4 - 1)}{r - 1} \text{ berikut.}$$

$$\frac{a(r^4 - 1)}{r - 1} = 800 \dots(4),$$

Dari persamaan (2) dapat diperoleh persamaan (5) berikut.

$$\frac{a(r^2 - 1)}{r - 1} = 80 \Leftrightarrow a = \frac{80(r - 1)}{r^2 - 1} \dots(5)$$

Persamaan (5) substitusi ke persamaan (4) sehingga diperoleh perhitungan berikut.

$$\frac{80(r - 1)}{r^2 - 1} \cdot \frac{(r^4 - 1)}{r^2 - 1} = 800$$

$$\frac{80(r^4 - 1)}{(r^2 - 1)} = 800$$

$$\frac{(r^4 - 1)}{(r^2 - 1)} = \frac{800}{80}$$

Dengan mengingat $(r^4 - 1) = (r^2 - 1)(r^2 + 1)$, maka diperoleh perhitungan berikut.

$$\frac{(r^2 - 1)(r^2 + 1)}{(r^2 - 1)} = 10$$

$$r^2 + 1 = 10$$

$$r^2 = 10 - 1$$

$$r^2 = 9$$

$$r = \pm\sqrt{9}$$

maka diperoleh nilai rasio barisan geometri tersebut adalah $r_1 = 3$ atau $r_2 = -3$. Pada kasus permasalahan ini, nilai rasio barisan geometri tidak mungkin bernilai negatif maka nilai yang digunakan adalah $r = 3$, substitusi nilai r ke persamaan (2) diperoleh

$$\frac{a(3^2 - 1)}{3 - 1} = 80$$

$$\frac{a(9 - 1)}{3 - 1} = 80$$

$$\frac{a \cdot 8}{2} = 80$$

$$a = \frac{80 \cdot 2}{8} = 20$$

Oleh karena jumlah penduduk yang memiliki minat membaca pada tahun 2007 adalah barisan geometri, maka

$$\begin{aligned} U_6 &= 20 \cdot 3^{6-1} \\ &= 20 \cdot 3^5 \\ &= 20 \cdot 243 \\ &= 4860 \end{aligned}$$

Jadi, jumlah penduduk yang memiliki minat membaca pada tahun 2007 adalah 4860 orang.

Soal Pilihan

Sebuah bola pingpong dijatuhkan ke lantai dari ketinggian 2 m. Setiap kali setelah bola itu memantul, ia mencapai ketinggian tiga per empat dari ketinggian yang dicapai sebelumnya. Dapatkah Anda menentukan panjang lintasan bola tersebut dari pantulan awal sampai bola itu berhenti?

3. Deret Geometri Tak Berhingga

Pada deret geometri, untuk n yang besarnya menuju tak hingga maka deret tersebut dikatakan deret geometri tak berhingga. Bentuk umum deret geometri tak berhingga adalah sebagai berikut.

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$$

Deret geometri tak berhingga tersebut akan *konvergen*

(mempunyai jumlah) jika $-1 < r < 1$ dan jumlah $S = \frac{a}{1-r}$. Jika

r tidak terletak pada $-1 < r < 1$ maka deret tersebut dikatakan *divergen* (tidak mempunyai jumlah)

Contoh Soal 3.13

Suku ke- n suatu deret geometri adalah 4^{-n} . Tentukan jumlah berhingga deret tersebut.

Jawab:

$$U_n = 4^{-n} \text{ maka } U_1 = a = 4^{-1} = \frac{1}{4}$$

$$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{4^{-2}}{4^{-1}} = 4^{-1} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{a}{1-r} \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Jadi, jumlah tak berhingga deret tersebut adalah $\frac{1}{3}$.

Contoh Soal 3.14

Data nilai impor negara X dari tahun 2000 hingga tahun-tahun berikutnya selalu menurun dengan perbandingan yang konstan. Nilai impor negara X pada tahun 2000 adalah 640 milyar rupiah dan tahun 2002 besarnya 160 milyar rupiah. Jika fenomena ini terus berlanjut hingga tahun-tahun mendatang, prediksilah nilai total impor negara X tersebut hingga tahun-tahun mendatang.

Jawab:

Oleh karena penurunan nilai impor memiliki perbandingan yang konstan maka nilai impor dari tahun 2000 hingga tahun-tahun berikutnya membentuk barisan geometri tak hingga berikut.

$$U_1, U_2, U_3, U_4, \dots$$

Dengan U_1 = Nilai impor tahun 2000 = 640 milyar

U_2 = Nilai impor tahun 2001,

U_3 = Nilai impor tahun 2002 = 160 milyar

Mengingat bahwa nilai suku ke- n suatu barisan geometri dapat dinyatakan dengan rumus $U_n = ar^{n-1}$, maka U_1 dan U_3 dapat dinyatakan dengan:

$$U_1 = ar^{1-1} = ar^0 = a$$

$$U_3 = ar^{3-1} = ar^2$$

Dengan memperhatikan nilai U_1 dan U_3 yang masing-masing besarnya adalah 640 dan 160 milyar, diperoleh dua persamaan berikut

$$a = 640 \dots (1)$$

$$ar^2 = 160 \dots (2)$$

Dengan menyubstitusikan persamaan (1) ke persamaan (2) maka diperoleh persamaan berikut.

$$(640 \times 10^9) \cdot r^2 = 160 \times 10^9$$

$$r^2 = \frac{160 \times 10^9}{640 \times 10^9} = \frac{1}{4}$$

$$r = \pm \sqrt{\frac{1}{4}}, \text{ diperoleh}$$

$$r^1 = \frac{1}{2} \text{ atau } r^2 = -\frac{1}{2}$$

Pada permasalahan ini, gunakan r yang bernilai positif karena tidak ada nilai impor yang bernilai negatif.

Dengan demikian, diperoleh:

$$U_1 = a = 640$$

$$U_2 = ar^{2-1} = ar^1 = 640 \times 10^9 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 320$$

$$U_3 = ar^{3-1} = ar^2 = 640 \times 10^9 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 160$$

$$U_4 = ar^{4-1} = ar^3 = 640 \times 10^9 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 80, \text{ dan seterusnya.}$$

Nilai total impor negara X hingga tahun-tahun mendatang dapat

dihitung menggunakan deret geometri tak berhingga berikut.

$$\begin{aligned}
 U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \dots &= \frac{a}{1-r} \\
 640 + 320 + 160 + 80 + \dots &= \frac{640}{1-\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{640}{\frac{1}{2}} \\
 &= 640 \times 2 \\
 &= 1280
 \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh nilai total impor negara X dari tahun 2000 hingga tahun-tahun mendatang besarnya adalah 1.280 milyar atau 1,28 triliun rupiah.

Evaluasi Materi 3.3

I. Kerjakan soal-soal berikut.

1. Tentukan rumus ke- n barisan geometri berikut, kemudian tentukan jumlah 8 suku pertamanya.
 - a. 6, 9, 13, ...
 - b. 18, 12, 8, ...
 - c. $\frac{-2}{3}$, 2, -6, 18, ...
 - d. 20, 4, $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{25}$, ...
2. Pada awal tahun 2001, jumlah wisatawan yang mengunjungi pulau P adalah 18.000.000 orang. Akibat terjadinya bencana alam di awal tahun tersebut maka setiap bulan berikutnya jumlah wisatawan berkurang menjadi $\frac{3}{4}$ nya. Berapakah jumlah wisatawan yang mengunjungi pulau P dari bulan Januari 2001 hingga Oktober 2001?
4. Sebuah perusahaan meubel pada bulan Maret 2005 mendapat pesanan meubel sebanyak 64 buah. Ternyata hingga bulan Desember 2005, pesanan selalu naik menjadi $1\frac{1}{2}$ kali lipat tersebut dari bulan sebelumnya.
 - a. Tentukan deret geometri yang terbentuk dari pesanan meubel pada perusahaan itu dan tentukan rumus suku ke- n .
 - b. Pada bulan apakah perusahaan meubel tersebut mendapat pesanan meubel sebanyak 486?
 - c. Tentukan jumlah mebel yang sudah dibuat perusahaan meubel itu selama 1 tahun.
5. Tentukan jumlah deret geometri tak hingga dari $8 + \frac{16}{3} + \frac{32}{9}$.
6. Diperoleh data keuntungan perusahaan X mulai dari tahun 2003 hingga tahun 2007 membentuk suatu barisan geometri. Jika jumlah total keuntungan dari tahun 2003 sampai tahun 2007 adalah 85,25 milyar rupiah dan jumlah keuntungan mulai dari tahun 2003 sampai tahun 2005 adalah 5,25 milyar rupiah, tentukanlah keuntungan perusahaan X pada tahun 2004.

Ringkasan

- Barisan bilangan didefinisikan sebagai susunan bilangan yang memiliki pola atau aturan tertentu antara satu bilangan dengan bilangan berikutnya.
- Deret adalah penjumlahan berurut dari suku-suku barisan.
- Barisan aritmetika adalah barisan yang selisih dua suku yang berurutan selalu tetap.
- Rumus suku ke- n dari barisan aritmetika adalah
$$U_n = a + (n - 1)b$$
$$a = \text{suku pertama barisan aritmetika}$$
$$b = \text{selisih dua suku yang berurutan (beda)}$$
$$n = \text{banyaknya suku (bilangan asli 1, 2, 3, \dots)}$$
$$U_n = \text{suku ke-}n$$
- Jumlah suku pertama barisan aritmetika adalah
$$S_n = \frac{n}{2} (a + U_n)$$
$$S_n = \text{jumlah } n \text{ suku pertama deret aritmetika}$$
- Barisan geometri adalah barisan yang memiliki perbandingan dua suku yang berurutan selalu tetap.
- Perbandingan dua suku yang berurutan disebut rasio.
- Rumus suku ke- n deret geometri adalah
$$U_n = a \cdot r^{n-1}$$
$$U_n = \text{suku ke-}n$$
$$a = \text{suku pertama}$$
$$r = \text{rasio}$$
- Deret geometri adalah jumlah suku dari suku-suku yang berurutan.
- Jumlah n suku pertama barisan geometri adalah selalu tetap.
$$S_n = \frac{a(1^n - r)}{(1 - r)} \text{ untuk } r > 1$$
$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{(1 - r)} \text{ untuk } r < 1.$$
- Jumlah deret geometri tak terhingga adalah
$$S_\infty = \frac{a}{(1 - r)} ; -1 < r < 1$$
$$S_\infty = \text{jumlah deret geometri tak hingga}$$
$$a = \text{suku pertama}$$
$$r = \text{rasio.}$$

Kaji Diri

Setelah mempelajari materi tentang Barisan dan Deret Bilangan, tuliskan bagian mana saja yang belum Anda pahami. Selain itu, tuliskan juga materi yang Anda senangi beserta alasannya. Bacakan tulisan Anda di depan kelas.

Evaluasi Materi Bab 3

I. Pilihlah salah satu jawaban yang tepat. Kerjakanlah di buku latihan Anda.

- Perhatikan barisan bilangan berikut.
1, 2, 3, 5, ...
Bilangan selanjutnya adalah
 - 2
 - 6
 - 8
 - 10
 - 7
- Rumus suku ke- n barisan bilangan 10, 5, 0, -5, ... adalah
 - $10 - 2n$
 - $2 + 3n$
 - $15 - 5n$
 - $10 + 3n$
 - $n^2 - 1$
- Jumlah 10 suku pertama barisan bilangan 10, 5, 0, -5, adalah
 - 125
 - 90
 - 85
 - 100
 - 75
- Sebuah barisan aritmetika suku pertamanya adalah 1. Jika jumlah 6 suku pertama barisan bilangan tersebut besarnya adalah 66 maka beda pada barisan tersebut adalah
 - 4
 - 2
 - 4
 - 2
 - 5
- Suku ke-10 barisan aritmetika pada soal nomor. 4 adalah
 - 75
 - 80
 - 100
 - 190
 - 200
- Anton menabung setiap bulan di sebuah bank swasta, mulai Januari 2005 hingga seterusnya. Setoran Anton per bulannya terus naik sesuai dengan barisan aritmetika berikut.
200.000, 250.000, 300.000,
Setoran Anton pada September 2005 besarnya adalah
 - Rp450.000,00
 - Rp550.000,00
 - Rp600.000,00
 - Rp700.000,00
 - Rp750.000,00
- Jumlah total setoran Anton (pada soal nomor 6) hingga Desember 2005 adalah
 - Rp5.700.000,00
 - Rp5.000.000,00
 - Rp5.000.000,00
 - Rp4.800.000,00
 - Rp4.000.000,00
- Rumus suku ke- n barisan geometri 40, 20, 10, 5, ... adalah
 - $U_n = \frac{20}{2^n}$
 - $U_n = 40^n$
 - $40 \cdot 2^n$
 - $U_n = 80 \cdot n$
 - $U_n = \frac{80}{2^n}$
- Jumlah 10 suku pertama barisan 40, 20, 10, 5 adalah
 - $60 \frac{1}{2}$
 - 70
 - $79 \frac{59}{64}$
 - $78 \frac{18}{25}$
 - $80 \frac{1}{3}$
- Suatu barisan geometri memiliki suku pertama adalah 12, jumlah 3 suku pertama adalah 57. Suku ke empat barisan geometri tersebut adalah
 - $40 \frac{1}{2}$
 - 38
 - 45
 - 40
 - 36
- Jumlah 5 suku pertama suatu barisan geometri adalah 93. Jika rasio barisan tersebut adalah 2 maka suku ke-6 barisan tersebut adalah
 - 48
 - 60
 - 90
 - 96
 - 100

12. Sebuah peternakan ayam memiliki 128 ekor ayam. Oleh karena terjadi wabah flu burung maka setiap hari jumlah ayam berkurang menjadi $\frac{1}{2}$ kalinya. Jumlah ayam menjadi tinggal 4 ekor pada hari ke
- a. 8 d. 4
b. 7 e. 3
c. 5
13. Jika barisan 24, 48, x , 192 merupakan barisan geometri ... maka nilai x^2 adalah
- a. 4.760 d. 9.216
b. 8.560 e. 10.000
c. 9.000
14. Jumlah 6 suku pertama dari barisan pada soal nomor 13 adalah
- a. 1.000 d. 1.600
b. 1.300 e. 1.512
c. 1.400
15. Jika barisan 20, x , 5, ... merupakan barisan geometri maka suku ke-5 nya adalah
- a. 1 d. 1,75
b. 1,25 e. 2
c. 1,5

II. Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Ibu Sarah memiliki 3 orang anak. Setiap hari ibu Sarah memberi anak-anaknya uang saku. SetiapharinyaibuSarahmemberiRp20.000,00 untuk anak pertama, Rp16.000,00 untuk anak kedua, dan Rp4.000,00 untuk anak bungsunya. Tentukan jumlah uang yang harus disediakan ibu sarah selama satu bulan untuk uang saku anak-anaknya.
2. Ayah membeli sebuah mobil seharga Rp150.000.000,00. Harga mobil menyusut sebesar 0,8% setiap tahunnya. Taksirlah harga mobil tersebut pada tahun ke-15 setelah pembelian.
3. Keuntungan seorang pedagang bertambah setiap bulan dengan jumlah yang sama. Jika keuntungan bulan ke-4 adalah Rp30.000,00 dan bulan ke-8 adalah Rp172.000,00, tentukan keuntungan bulan ke-18.
4. Pertambahan penduduk setiap tahun di suatu desa mengikuti deret geometri. Pertambahan penduduk pada tahun 1996 sebanyak 24 orang, tahun 1998 sebesar 96 orang. Tentukan pertambahan penduduk tahun 2001.
5. Diketahui jumlah deret geometri tak hingga adalah 10 dan suku pertamanya adalah 2. Tentukan rasio deret geometri tak hingga tersebut.

Pilihan Karir

Psikolog adalah seorang ahli dalam bidang psikologi, bidang ilmu pengetahuan yang mempelajari tingkah laku dan proses mental. Psikolog dapat dikategorikan ke dalam beberapa bidang tersendiri sesuai dengan cabang ilmu psikologi yang ditekuninya. Tetapi kata "psikolog" lebih sering digunakan untuk menyebut ahli psikolog klinis, ahli psikologi di bidang kesehatan mental. Psikolog di Indonesia tergabung dalam organisasi profesi bernama Himpunan Psikolog Indonesia (HIMPSI).

Bab 4



Geometri Dimensi Dua

Pada bab ini, Anda akan diajak untuk memecahkan masalah yang berhubungan dengan menentukan kedudukan, jarak, dan bidang, di antaranya, dapat menggunakan sifat dan aturan dalam perhitungan integral tak tentu dan integral tentu dan dapat menggunakan integral untuk menghitung luas daerah.

- A. Sudut
- B. Bangun Datar

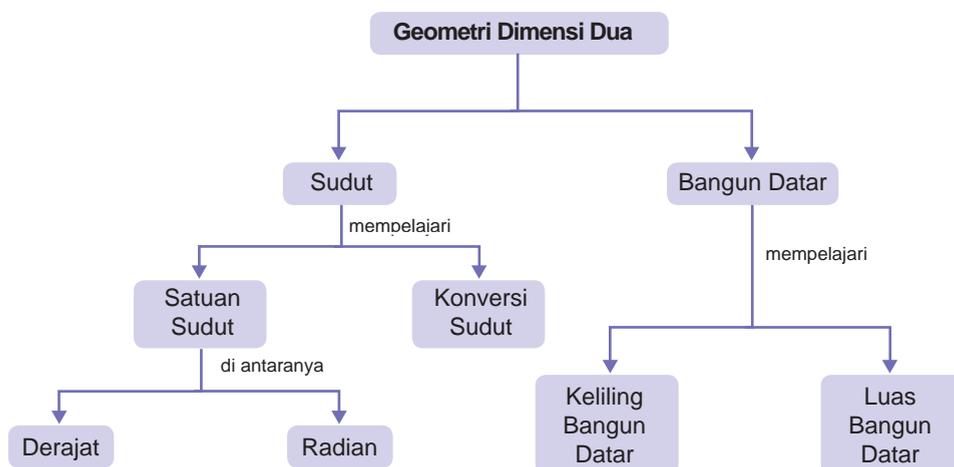
Harga tanah di kota A adalah Rp1.750.000,00 per meter persegi. Pak Hasan memiliki tanah di kota A yang berbentuk persegi panjang dengan ukuran panjang 45 m dan lebar 21 m. Jika Pak Hasan ingin menjual seluruh tanahnya tersebut, berapakah jumlah uang yang akan diterimanya?

Masalah Pak Hasan tersebut adalah salah satu contoh aplikasi konsep sudut dan bangun datar pada kehidupan sehari-hari.

Di SMP Kelas VII, Anda telah mempelajari konsep sudut dan bangun datar. Pada bab ini, Anda akan mempelajari cara mengkonversi satuan sudut serta menghitung keliling dan luas bangun datar sebagai perluasan konsep-konsep yang telah Anda pelajari di Kelas VII.

Peta Konsep

Materi tentang Geometri Dimensi Dua dapat digambarkan sebagai berikut.



Soal Pramateri

Kerjakan soal-soal berikut, sebelum Anda mempelajari bab ini.

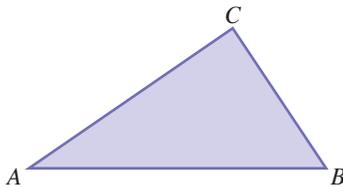
1. Gambarlah masing-masing sepasang garis yang sejajar, berpotongan, saling berimpit, dan saling tegak lurus.
2. Dari gambar yang telah Anda buat pada soal nomor 1, tentukanlah mana yang disebut sudut?
3. Tentukan pengertian dari istilah-istilah berikut.
 - a. Garis
 - b. Sinar garis
4. Gambarlah bangun ruang berikut.
 - a. Trapesium
 - b. Layang-layang
 - c. Belahketupat
 - d. Jajargenjang

A Sudut

Pada tingkat Sekolah Dasar, Anda telah mengenal pengertian sudut dan bagaimana cara menggunakan busur derajat untuk mengukur besar sudut. Untuk sekedar mengingatkan kembali materi tersebut, coba Anda pelajari uraian berikut dengan baik.

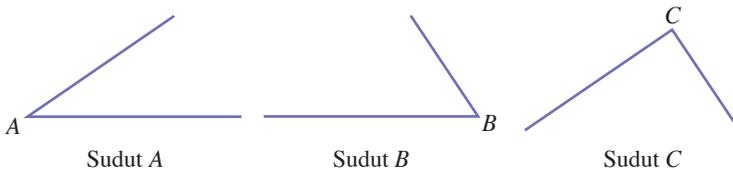
1. Pengertian sudut

Sebuah kantor pemasaran alat-alat elektronik berdiri di atas tanah berbentuk segitiga seperti Gambar 4.1 berikut.



Pada tiap sudutnya dipasang lampu. Sandi yang bekerja sebagai *cleaning service* di kantor tersebut mendapat tugas mengganti semua lampunya. Ada berapakah lampu yang harus disediakan Sandi?

Sebelum menentukan jumlah lampu yang harus disediakan Sandi, terlebih dahulu Sandi harus mengetahui jumlah sudut yang terbentuk pada lahan kantornya itu, coba Anda perhatikan gambar lahan kantor dimana Sandi bekerja. Pada lahan tersebut, terdapat tiga buah sudut yaitu sudut A , B , dan C . Berarti jumlah lampu yang harus dibawa Sandi ada 3 buah.



Berdasarkan ilustrasi tersebut, dapatkah Anda menyimpulkan pengertian dari sudut? Dalam kehidupan sehari-hari mungkin Anda sering mendengar kata sudut, misalnya seperti dalam kalimat-kalimat berikut.

- Anto duduk di *sudut* ruangan.
- Gol tim nasional Indonesia bermula dari tendangan *sudut*.
- Pak anwar *disudutkan* oleh koleganya dalam rapat direksi.

Setelah Anda membaca uraian tersebut, Anda menyimpulkan bahwa sudut dapat diartikan sebagai pojok. Dari segi bahasa,

Kata Kunci

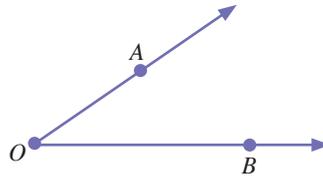
- sudut
- derajat
- radian

Gambar 4.1

Lahan kantor berbentuk Segitiga ABC

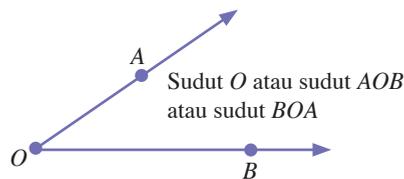
konsep itu adalah benar, tetapi bagaimanakah definisi sudut dalam matematika?

Untuk menjawabnya, perhatikanlah sinar garis OA dan OB berikut.



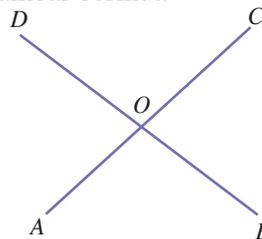
Pada gambar tersebut terlihat dua buah sinar garis OA dan OB berhimpit di titik O . Daerah yang terbentuk di antara sinar garis OA dan OB disebut *sudut*. Ingat, walaupun sinar garis memiliki panjang yang tak hingga, jika pangkalnya berhimpit dengan pangkal sinar garis lain, pasti akan membentuk sudut.

Sudut yang terbentuk pada gambar tersebut, dapat diberi nama dengan tiga cara, yaitu sudut O disimbolkan dengan $\angle O$, atau sudut BOA disimbolkan dengan $\angle BOA$ atau juga sudut AOB disimbolkan dengan $\angle AOB$. Sinar garis OA dan sinar garis OB dinamakan *kaki sudut*. Titik O (titik pangkal) dinamakan *titik sudut*.



Berdasarkan uraian tersebut, sudut didefinisikan sebagai *suatu daerah yang dibatasi oleh dua sinar garis yang mempunyai titik pangkal yang sama*.

Perhatikan sudut-sudut yang terbentuk pada perpotongan garis AC dan BD gambar berikut.



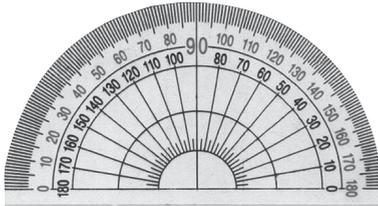
Garis AC dan garis BD yang berpotongan di titik O . Sudut yang terbentuk dari perpotongan dua garis tersebut terdiri atas 4 buah, yaitu $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, dan $\angle AOD$.

Dengan demikian, segitiga ABC pada Gambar 4.1. memiliki 3 buah sudut, yaitu:

- $\angle A$ atau $\angle CAB$ atau $\angle BAC$
- $\angle B$ atau $\angle CBA$ atau $\angle ABC$
- $\angle C$ atau $\angle BCA$ atau $\angle ACB$

2. Mengukur Besar Sudut

Besar sudut diukur menggunakan busur derajat. Hasil pengukurannya diperoleh suatu nilai yang dinyatakan dengan satuan *derajat* ($^\circ$). Nilai tersebut menyatakan ukuran besar daerah sudut.



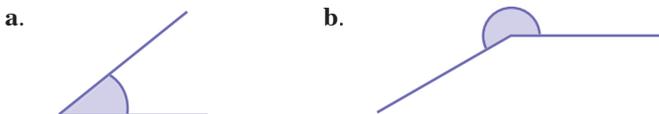
Gambar 4.2

Besar sudut diukur menggunakan busur derajat

Anda telah mempelajari cara menggunakan busur derajat untuk mengukur besar suatu sudut di Sekolah Dasar. Untuk mengingatkannya kembali gunakan busur derajat untuk mengukur dan membuat sudut pada Contoh Soal 4.1 dan Tugas Siswa 4.1 berikut.

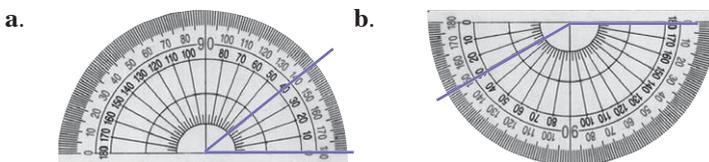
Contoh Soal 4.1

Dengan menggunakan busur derajat, hitung besar sudut-sudut berikut.



Jawab:

Dengan menghimpitkan salah satu sinar garis yang membentuk sudut pada busur derajat diperoleh



Pada busur derajat terlihat besar sudut tersebut adalah 40°

Oleh karena sudut tersebut merupakan sudut refleks maka besar sudut tersebut adalah $180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$.

Tugas Siswa 4.1

Pak Anto seorang pengusaha meubel. Ia mendapat orderan untuk membuat sofa dengan motif garis-garis yang saling berimpit dengan sudut 60° , 45° , 150° dan 175° . Sayangnya, busur derajat Pak Anto hilang. Dapatkah Anda membantu Pak Anto dengan membuat masing-masing 1 buah motif garis yang diminta pelanggannya?

Selain menggunakan satuan derajat, untuk menyatakan besar sudut dapat digunakan satuan *radian* (rad).

a. Derajat

Derajat adalah nama satuan yang digunakan untuk menyatakan besar sudut. Satuan ini disebut juga *satuan sudut sexagesimal*, yaitu membagi keliling lingkaran menjadi 360 bagian yang sama. Setiap bagian disebut 1 *derajat*. Dengan demikian, satu putaran penuh besarnya adalah 360 derajat. Derajat dilambangkan dengan ($^\circ$). Jika suatu sudut besarnya 360 derajat maka ditulis 360° .

$$1 \text{ putaran} = 1 \text{ keliling lingkaran} = 360^\circ$$

$$\frac{1}{2} \text{ putaran} = \frac{1}{2} \text{ keliling lingkaran} = 180^\circ$$

$$\frac{1}{4} \text{ putaran} = \frac{1}{4} \text{ keliling lingkaran} = 90^\circ$$

$$\frac{1}{360} \text{ putaran} = \frac{1}{360} \text{ keliling lingkaran} = 1^\circ$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$1^\circ = \frac{1}{360} \text{ putaran} = \frac{1}{360} \text{ keliling lingkaran}$$

Setiap derajat dibagi dalam 60 menit dan setiap menit dibagi menjadi 60 detik. Menit dilambangkan dengan ($'$) dan detik dilambangkan dengan ($''$).

12 menit ditulis 12'

25 detik ditulis 25''

Hubungan antara derajat, menit, dan detik adalah sebagai berikut.

$$1^\circ = 60' = 3.600''$$

$$1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{3.600}\right)^\circ$$

Tugas Siswa 4.2

Selain satuan sudut *sexagesimal*, Anda mungkin pernah mengenal satuan *centesimal*. Carilah informasi di perpustakaan atau internet tentang satuan tersebut. Kemudian ubahlah soal berikut ke dalam satuan sudut centesimal.

- a. 225° b. $25^\circ 30'$ c. $\frac{5\pi}{6}$

Laporkan hasilnya pada guru Anda.

Contoh Soal 4.2

- Nyatakan sudut berikut dalam bentuk derajat-desimal.
 - $20^\circ 50' 40''$
 - $25^\circ 30'$
- Nyatakan sudut berikut dalam bentuk derajat-menit atau derajat-menit-detik.
 - $120,4^\circ$
 - $54,72^\circ$

Jawab:

$$\begin{aligned} 1. \quad \text{a.} \quad 20^\circ 50' 40'' &= 20^\circ + 50' + 40'' \\ &= 20^\circ + 50' + (40 \times 1'') \\ &= 20^\circ + 50' + \left[40 \times \left(\frac{1}{60} \right)' \right] \\ &= 20^\circ + 50' + \left(\frac{40}{60} \right)' \\ &= 20^\circ + 50' + \left(\frac{2}{3} \right)' \\ &= 20^\circ + \left(50 + \frac{2}{3} \right)' \\ &= 20^\circ + \left(\frac{152}{3} \right)' \\ &= 20^\circ + \left(\frac{152}{3} \times 1' \right) \\ &= 20^\circ + \left[\frac{152}{3} \times \left(\frac{1}{60} \right)^\circ \right] \\ &= 20^\circ + \left[\frac{152}{180} \right]^\circ \\ &= 20^\circ + 0,84^\circ \\ &= 20,84^\circ \end{aligned}$$

Jelajah

Matematika

Sudut siku-siku besarnya 90° . Sudut ini dianggap sebagai sudut yang paling penting dibandingkan sudut lainnya karena sering digunakan dalam geometri, sains, dan teknik. Sumbu-sumbu pada koordinat Cartesius saling siku dan garis-garis singgung pada lingkaran selalu tegak lurus (sudutnya 90°) dengan jari-jari lingkaran. Titik-titik yang menunjukkan arah pada kompas (*U*, *T*, *S*, *B*) secara berurutan saling siku. Segitiga siku-siku salah satu sudutnya 90° dan bentuk segitiga ini dipastikan sudah dimanfaatkan oleh Bangsa Mesir Kuno untuk membangun Piramida.

Sumber: *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia*, 2002

Secara singkat, dapat ditulis sebagai berikut.

$$20^{\circ}50'40'' = 20^{\circ} + 50' + 40''$$

$$= 20^{\circ} + 50' + \left[40 \times \left(\frac{1}{60} \right)' \right]$$

$$= 20^{\circ} + 50' + \left(\frac{2}{3} \right)'$$

$$= 20^{\circ} + \left(50 + \frac{2}{3} \right)'$$

$$= 20^{\circ} + \left(\frac{152}{3} \right)'$$

$$= 20^{\circ} + \left[\frac{152}{3} \times \left(\frac{1}{60} \right)^{\circ} \right]$$

$$= 20^{\circ} + \left(\frac{152}{3} \right)'$$

$$= 20^{\circ} + 0,84^{\circ}$$

$$= 20,84^{\circ}$$

b. $25^{\circ} 30' = 25^{\circ} + 30'$

$$= 25^{\circ} + \left[30 \times \left(\frac{1}{60} \right)^{\circ} \right]$$

$$= 25^{\circ} + \left(\frac{1}{2} \right)^{\circ}$$

$$= 25^{\circ} + 0,5^{\circ}$$

$$= 25,5^{\circ}$$

2. a. $120,4^{\circ} = 120^{\circ} + 0,4^{\circ}$

$$= 120^{\circ} + (0,4 \times 1^{\circ})$$

$$= 120^{\circ} + (0,4 \times 60')$$

$$= 120^{\circ} + 24'$$

$$= 120^{\circ}24'$$

b. $54,72^{\circ} = 54^{\circ} + 0,72^{\circ}$

$$= 120^{\circ} + (0,72 \times 1^{\circ})$$

$$= 120^{\circ} + (0,72 \times 60')$$

$$= 120^{\circ} + 43,2'$$

$$= 120^{\circ} + (43 + 0,2)'$$

$$= 120^{\circ} + 43' + (0,2 \times 1')$$

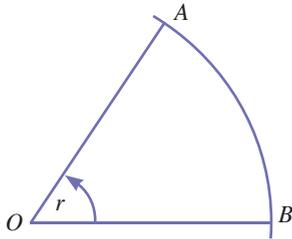
$$= 120^{\circ} + 43' + (0,2 \times 60'')$$

$$= 120^{\circ} + 43' + 12''$$

$$= 120^{\circ}43'12''$$

b. Radian

1 *radian* adalah ukuran sudut pusat sebuah lingkaran di mana panjang busur di depannya sudut pusat itu sama dengan jari-jari lingkaran.



Jika panjang busur AB sama dengan panjang OB atau OA (jari-jari) maka besar $\angle AOB$ disebut 1 radian.

Panjang busur suatu lingkaran = $2\pi \times r$

$2\pi \times r$ disebut 2π radian.

2π radian = 360°

π radian = 180°

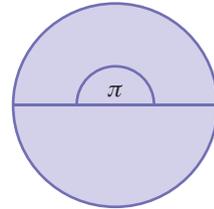
sehingga diperoleh,

$$1 \text{ radian} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ radian}$$

Gambar 4.3

Besar 1 rad maka panjang busur AB sama dengan panjang OB atau OA .



Gambar 4.4

Satu putaran penuh sama dengan 2π atau 360° .

Contoh Soal 4.3

- Nyatakan sudut berikut dalam satuan radian.
 - 60°
 - 150°
 - -120°
- Nyatakan sudut berikut dalam satuan derajat.

a. $\frac{\pi}{6}$ radian	c. $\frac{1}{6}$ radian
b. $\frac{7\pi}{9}$ radian	d. $\frac{7}{9}$ radian

Jawab :

- Dengan mengingat bahwa $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ radian diperoleh,
 - $60^\circ = 60 \times 1^\circ = 60 \times \frac{\pi}{180} \text{ radian} = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3} \text{ radian}$
 - $150^\circ = 150 \times 1^\circ = 150 \times \frac{\pi}{180} \text{ radian} = \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6} \text{ radian}$

$$\begin{aligned} \text{c. } -120^\circ &= -120 \times 1^\circ = -120 \times \frac{\pi}{180} \text{ radian} = -\frac{120\pi}{180} \\ &= -\frac{2\pi}{3} \text{ radian} \end{aligned}$$

2. Oleh karena 1 radian = $\frac{\pi}{180}$ diperoleh,

$$\text{a. } \frac{\pi}{6} \text{ radian} = \frac{\pi}{6} \times 1 \text{ radian} = \frac{\pi}{6} \times \frac{\pi}{180} = 30^\circ$$

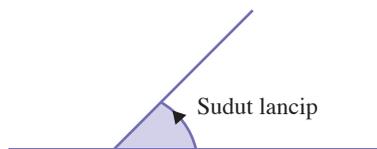
$$\text{b. } \frac{7\pi}{9} \text{ radian} = \frac{7\pi}{9} \times 1 \text{ radian} = \frac{7\pi}{9} \times \frac{\pi}{180} = 140^\circ$$

$$\text{c. } \frac{1}{6} \text{ radian} = \frac{1}{6} \times 1 \text{ radian} = \frac{1}{6} \times \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} = \left(\frac{30}{\pi}\right)^\circ$$

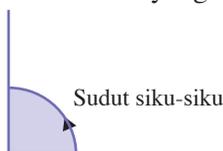
$$\text{d. } \frac{7}{9} \text{ radian} = \frac{7}{9} \times 1 \text{ radian} = \frac{7}{9} \times \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{7 \times 180^\circ}{9\pi} = \left(\frac{150}{\pi}\right)^\circ$$

Berdasarkan besarnya, sudut dapat dikelompokkan menjadi beberapa jenis, yaitu:

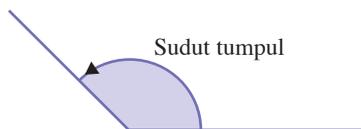
- Sudut lancip
Sudut lancip adalah sudut yang besarnya antara 0° dan 90° .



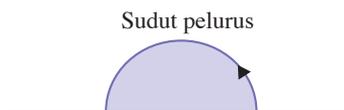
- Sudut siku-siku
Sudut siku-siku adalah sudut yang besarnya 90° .



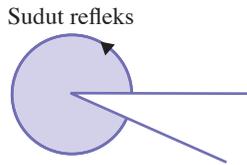
- Sudut tumpul
Sudut tumpul adalah sudut yang besarnya antara 90° dan 180° .



- Sudut pelurus
Sudut pelurus adalah sudut yang besarnya 180° .



- Sudut refleks
Sudut refleks adalah sudut yang besarnya antara 180° dan 360° .

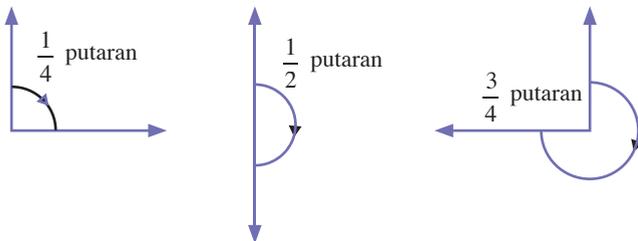


3. Sudut sebagai Arah Putar

Coba Anda perhatikan jarum penunjuk detik pada jam dinding. Jika Anda lihat, jarum penunjuk detik berada pada angka 12. Kemudian, jarum tersebut berputar kembali menuju angka 12. Berarti, jarum penunjuk detik telah berputar sebanyak 1 putaran penuh atau berputar sebesar 360° .

Berdasarkan uraian tersebut, diperoleh bahwa satu putaran penuh besarnya adalah 360° . Oleh karena itu, dapat dianalogikan

- $\frac{1}{4}$ putaran penuh besarnya adalah $\frac{1}{4} \times 360^\circ = 90^\circ$
- $\frac{1}{2}$ putaran penuh besarnya adalah $\frac{1}{2} \times 360^\circ = 180^\circ$
- $\frac{3}{4}$ putaran besarnya adalah $\frac{3}{4} \times 360^\circ = 270^\circ$



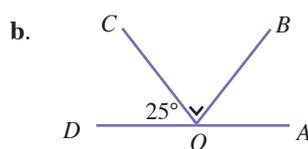
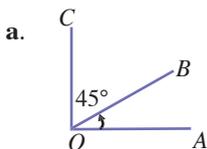
Sumber: www.vgdotnet.com

Gambar 4.5

Sekali berputar, jarum jam berputar sebesar 360° .

Contoh Soal 4.4

Tentukan besar sudut AOB pada gambar berikut.



Jawab:

- a. Sudut AOC adalah sudut siku-siku sehingga

$$\angle AOB + \angle BOC = 90^\circ$$

$$\angle AOB + 45^\circ = 90^\circ$$

$$\angle AOB = 90^\circ - 45^\circ$$

$$\angle AOB = 45^\circ$$

- b. Sudut AOD adalah sudut pelurus sehingga

$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD = 180^\circ$$

$$\angle AOD + 90^\circ + 25^\circ = 180^\circ$$

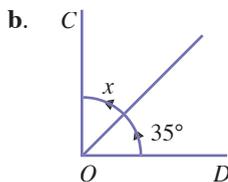
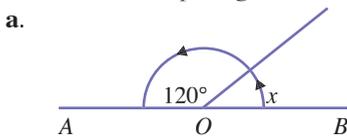
$$\angle AOB = 180^\circ - 90^\circ - 25^\circ$$

$$\angle AOB = 65^\circ$$

Evaluasi Materi 4.1

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

1. Tentukan nilai x pada gambar berikut.



2. Pada suatu kantor, direktur utamanya memiliki kebiasaan untuk mengadakan rapat bersama staf manajernya. Rapat ini selalu rutin dilaksanakan dari pukul 09.00 sampai dengan pukul 10.45. Hitunglah berapa derajat jarum menit berputar sejak rapat dimulai sampai dengan rapat berakhir?

3. Lihat kembali soal nomor 2. Jika dari awal rapat sampai dengan akhir rapat jarum menit berputar sebesar 180° , pada pukul berapakah rapat berakhir?

4. Nyatakan sudut-sudut berikut dalam bentuk radian.

a. 30° c. 220°

b. 140° d. 270°

5. Nyatakan sudut-sudut berikut dalam bentuk derajat.

a. $\frac{2}{3}\pi$ radian c. $0,60\pi$ radian

b. $\frac{3}{4}\pi$ radian d. 180π radian

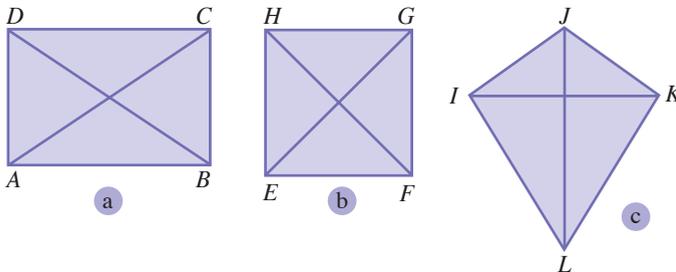
B Bangun Datar

Dalam ilmu ekonomi, dikenal berbagai bentuk perusahaan seperti firma, perusahaan perorangan, Perseroan Terbatas (PT), dan lain sebagainya. Perusahaan-perusahaan tersebut memiliki ciri khusus masing-masing yang tidak sama. Anda dapat mengatakan perusahaan tersebut termasuk Perseroan Terbatas, perusahaan perorangan, atau firma setelah melihat berbagai aspek seperti kepemilikan modalnya, peran, atau tanggung jawab yang ditanggung oleh masing-masing individu.

Analogi dengan bentuk-bentuk perusahaan, dalam matematika, yaitu geometri dikenal bentuk-bentuk bangun datar seperti persegi panjang, trapesium, segitiga, persegi, dan sebagainya. Sama seperti bentuk-bentuk perusahaan, setiap jenis bangun datar tersebut memiliki ciri-ciri khas yang berbeda dari bangun lainnya. Anda dapat mengatakan apakah bangun tersebut merupakan persegi, segitiga, atau trapesium dengan melihat sisinya, sudutnya, simetri lipatnya, dan sifat lainnya.

Sebelum mempelajari sifat-sifat yang dimiliki bangun datar, pelajarilah uraian berikut.

Diagonal adalah garis yang ditarik dari sudut di hadapannya. Perhatikan Gambar 4.6.



Perhatikan Gambar 4.6 (a), (b), dan (c). Garis AC dan BD merupakan diagonal pada bangun $ABCD$, garis FH dan EG merupakan diagonal pada bangun $EFGH$, serta garis JL dan IK merupakan diagonal pada bangun $IJKL$.

Pada bagian ini, Anda akan mempelajari beberapa bentuk bangun datar, sifat-sifatnya, keliling, dan luasnya. Bentuk bangun datar yang akan dipelajari pada Subbab ini adalah persegi panjang, persegi, segitiga, jajargenjang, layang-layang, dan trapesium.

Kata Kunci

- persegipanjang
- persegi
- trapesium
- jajargenjang
- belahketupat
- layang-layang
- segitiga
- diagonal

Gambar 4.6

Garis diagonal ditunjukkan oleh
a. garis AC dan BD
b. garis EG dan FH
c. garis IK dan LJ



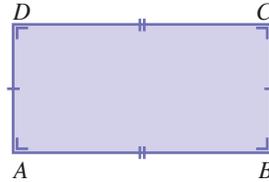
Sumber: *product-image.tradeindia.com*

Gambar 4.7

Papan tulis adalah contoh bangun berbentuk persegi panjang.

1. Persegipanjang

Coba Anda perhatikan papan tulis di kelas Anda. Papan tulis memiliki sisi-sisi yang berhadapan sama panjang dan keempat sudutnya siku-siku. Bangun datar yang memiliki ciri-ciri seperti papan tulis di kelas Anda disebut persegi panjang. Gambar berikut menunjukkan bentuk geometri persegi panjang.



Pada persegi panjang $ABCD$ tersebut,

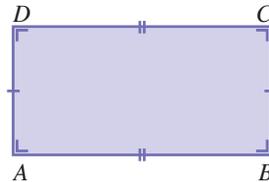
$$AB = DC$$

$$AD = BC$$

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$$

Pada persegi panjang, sisi yang lebih panjang dinamakan *panjang*, dapat dinyatakan dengan p , dan sisi yang lebih pendek dinamakan *lebar*, dapat dinyatakan dengan l . Pada persegi panjang $ABCD$, $AB = DC = p$ dan $AD = BC = l$.

Keliling suatu bangun datar adalah jumlah panjang sisi-sisi yang dimiliki oleh bangun datar tersebut. Perhatikan persegi panjang $ABCD$ berikut.



Keliling persegi panjang $ABCD$ diperoleh dengan menjumlahkan sisi-sisinya, yaitu AB , BC , AD , dan DC , yaitu

$$K = AB + BC + DC + AD$$

$$K = p + l + p + l$$

$$= 2p + 2l$$

$$= 2(p + l)$$

Dengan demikian, rumus keliling persegi panjang adalah

$$K = 2(p + l)$$

Adapun luas persegi panjang adalah perkalian panjang dan lebarnya.

$$L = p \times l$$

Contoh Soal 4.5

Suatu permukaan meja berbentuk persegi panjang. Panjang permukaan meja itu adalah 150 cm dan lebarnya adalah 75 cm. Tentukan keliling dan luas permukaan meja tersebut.

Jawab:

Diketahui $p = 150$ cm dan $l = 75$ cm

Keliling permukaan meja adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}K &= 2(p + l) \\ &= 2(150 + 75) \\ &= 2(225) \\ &= 450\end{aligned}$$

Luas permukaan meja adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}L &= p \times l \\ &= 150 \times 75 \\ &= 11.250\end{aligned}$$

Jadi, keliling dan luas permukaan meja tersebut berturut turut adalah 450 cm dan 11.250 cm².

Berikut adalah contoh soal penggunaan konsep keliling dan luas persegi panjang pada kehidupan sehari-hari.

Contoh Soal 4.6

Sebuah kolam renang permukaannya berbentuk persegi panjang dengan keliling 66 m dan luas 270 m². Tentukan panjang dan lebar permukaan kolam tersebut.

Jawab:

Diketahui $K = 66$ m dan $L = 270$ m²

$$\begin{aligned}K &= 2(p + l) \\ 66 &= 2(p + l) \\ 33 &= p + l \\ p &= 33 - l \quad \dots(1) \\ L &= p \times l \\ 270 &= p \times l \quad \dots(2)\end{aligned}$$

Substitusikan persamaan (1) ke persamaan (2), diperoleh

$$\begin{aligned}270 &= (33 - l)l \\ &= 33l - l^2 \\ \Leftrightarrow l^2 - 33l + 270 &= 0 \\ \Leftrightarrow (l - 15)(l - 18) &= 0 \\ \Leftrightarrow l &= 15 \text{ atau } l = 18\end{aligned}$$

Jika $l = 15$ maka $p = 33 - 15 = 18$

Diperoleh $p = 18$ dan $l = 15$



Sumber: www.holmanstudios.com

Gambar 4.8

Beragam ukuran permukaan meja, di antaranya berbentuk persegi panjang.



Sumber: www.aquawarmswimmingpoolcover.co.uk

Gambar 4.9

Permukaan kolam renang berbentuk persegi panjang.

Jika $l = 18$ maka $p = 33 - 18 = 15$

Oleh karena panjang pada persegi panjang adalah sisi yang terpanjang, maka panjang dan lebar kolam renang tersebut berturut-turut adalah 18 m dan 15 m.



Sumber: www.bestchess.com.au

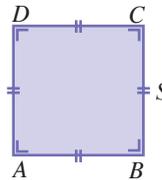
Gambar 4.10

Papan catur memiliki bentuk persegi.

2. Persegi

Tentu Anda pernah melihat sebuah papan catur. Papan catur memiliki jumlah kotak yang sama, baik horizontal maupun vertikal. Papan catur juga memiliki empat sudut siku-siku. Bidang datar yang memiliki ciri-ciri seperti papan catur disebut persegi.

Papan catur jika digambar permukaannya akan tampak seperti persegi $ABCD$ berikut.



Pada persegi $ABCD$, tampak

$$AB = BC = CD = DA = s$$

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$$

Keliling persegi adalah jumlah panjang semua sisinya. Jika panjang sisi persegi dinyatakan dengan s maka keliling persegi adalah sebagai berikut.



$$K = AB + BC + CD + AD$$

$$\begin{aligned} K &= s + s + s + s \\ &= 4s \end{aligned}$$

Luas persegi adalah hasil kali sisi dengan sisi

$$\begin{aligned} L &= s \times s \\ &= s^2 \end{aligned}$$

Contoh Soal 4.7

Diketahui panjang sisi suatu persegi $ABCD$ adalah 5 cm. Tentukan keliling dan luas persegi tersebut.

Jawab:

Diketahui $s = 5$ cm

maka keliling persegi $ABCD$ adalah

$$K = 4s$$

$$= 4 \cdot 5 \text{ cm}$$

$$= 20 \text{ cm}$$

Luas persegi $ABCD$ adalah

$$L = s^2$$

$$= (5 \text{ cm})^2$$

$$= 25 \text{ cm}^2$$

Jadi, keliling dan luas persegi $ABCD$ berturut-turut 20 cm dan 25 cm².

Pelajarilah contoh soal berikut agar Anda memahami permasalahan sehari-hari yang berkaitan dengan bangun datar berbentuk persegi.

Contoh Soal 4.8

Diketahui kaca sebuah jendela berbentuk persegi. Luas kaca jendela tersebut adalah 3,25 m². Tentukan keliling kaca jendela tersebut.

Jawab:

Diketahui luas kaca jendela $L = 3,25$ m²

$$L = s^2$$

$$3,25 \text{ m}^2 = s^2$$

$$\sqrt{3,25 \text{ m}^2} = s$$

$$\pm 1,8 \text{ m} = s$$

Diperoleh panjang sisi kaca adalah $s = 1,8$ m atau $s = -1,8$ m. Oleh karena panjang kaca harus positif maka panjang sisi kaca adalah 1,8 m.

Keliling permukaan meja adalah

$$K = 4s$$

$$= 4 \cdot 1,8 \text{ m}$$

$$= 7,2 \text{ m}$$

3. Segitiga

Perhatikan segitiga pengaman yang Anda lihat di jalan raya. Biasanya, segitiga pengaman digunakan untuk memberi peringatan pada pengguna jalan supaya lebih berhati-hati karena

Jelajah

Matematika



Sumber: www.jim3dlong.com

Albrecht Durer (1471–1528)

Albrecht Durer adalah seorang seniman sekaligus matematikawan asal Jerman. Dia begitu menekuni pekerjaannya di bidang seni. Oleh karena Durer juga sangat menyukai matematika, kerap kali dia mengaitkan matematika dalam karyanya. Pada tahun 1514, salah satu hasil karyanya di bidang seni yang membuktikan bahwa ia menyukai matematika adalah *Melancholia*. Karyanya ini berupa seni pahat yang memuat bangun persegi yang terdiri atas persegi-persegi kecil yang berisi bilangan.

Sumber: *Ensiklopedi Matematika (Topik-Topik Pengayaan)*, 2003.



Sumber: www.qm365.com

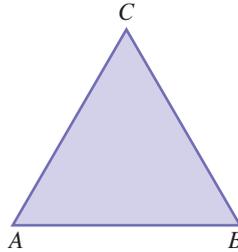
Gambar 4.11

Segitiga pengaman adalah contoh bangun datar berbentuk segitiga.

ada sesuatu yang berbahaya. Misalnya, ada lubang di jalan atau sebuah mobil yang mengangkut barang berbahaya.

Segitiga pengaman memiliki tiga sisi dan tiga titik sudut. Seperti namanya, segitiga pengaman adalah contoh bangun segitiga.

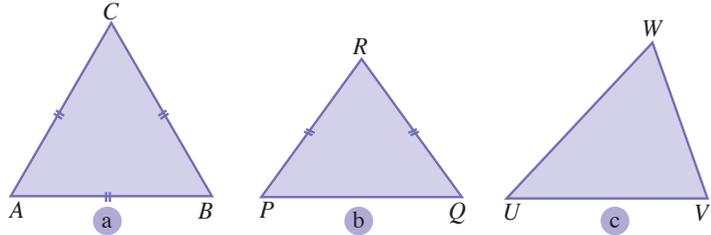
Perhatikan segitiga ABC pada gambar berikut.



Segitiga ABC dibatasi oleh sisi AB , BC , dan CA

Jumlah semua sudut pada segitiga adalah 180° . Jadi, pada segitiga ABC , $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

Berdasarkan panjang sisinya, segitiga dibagi ke dalam tiga jenis, yaitu segitiga samasisi, segitiga samakaki, dan segitiga tidak beraturan.

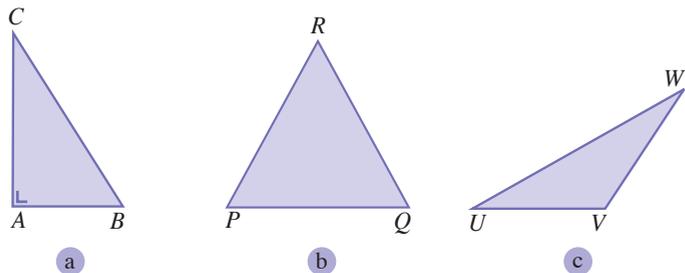


Gambar 4.12

Jenis-jenis segitiga berdasarkan panjang sisinya. (a) Segitiga Samasisi (b) Segitiga samakaki (c) Segitiga sebarang.

Segitiga samasisi adalah yang semua sisinya sama panjang. Pada Gambar 4.12(a), segitiga ABC adalah segitiga samasisi, di mana $AB = BC = AC$. Segitiga samakaki adalah segitiga yang kedua sisinya sama panjang. Segitiga PQR adalah segitiga sama kaki dengan $PR = QR$. Segitiga sebarang adalah segitiga yang semua sisinya tidak sama panjang. Segitiga UVW adalah segitiga tidak beraturan dengan $UV \neq VW \neq UW$.

Berdasarkan besar sudutnya, segitiga dibagi ke dalam tiga jenis, yaitu segitiga siku-siku, segitiga lancip, dan segitiga tumpul.

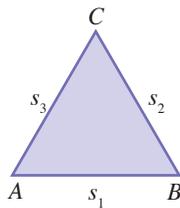


Gambar 4.13

Jenis-jenis segitiga berdasarkan besar sudutnya (a) Segitiga siku-siku (b) Segitiga lancip (c) Segitiga tumpul.

Segitiga siku-siku adalah segitiga yang salah satu sudutnya siku-siku. Pada Gambar 4.13(a), segitiga ABC adalah segitiga siku-siku, dengan $\angle A$ adalah sudut siku-sikunya. Segitiga lancip adalah segitiga yang besar semua sudutnya kurang dari 90° . Segitiga PQR adalah segitiga lancip dengan besar $\angle P < 90^\circ$, $\angle Q < 90^\circ$, dan $\angle R < 90^\circ$. Segitiga tumpul adalah segitiga yang besar salah satu sudutnya lebih dari 90° . Segitiga UVW adalah segitiga tumpul dengan sudut tumpulnya adalah $\angle V$.

Seperti pada bangun datar lainnya, keliling segitiga diperoleh dengan menjumlahkan ketiga sisinya. Perhatikan segitiga ABC berikut.

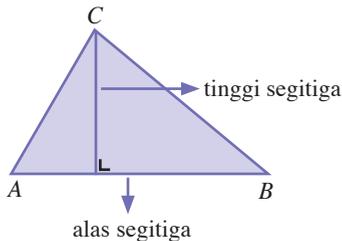


Jika AB, BC, AC adalah sisi-sisi segitiga dengan panjang sisi berturut-turut s_1, s_2 , dan s_3 maka keliling segitiga ABC adalah

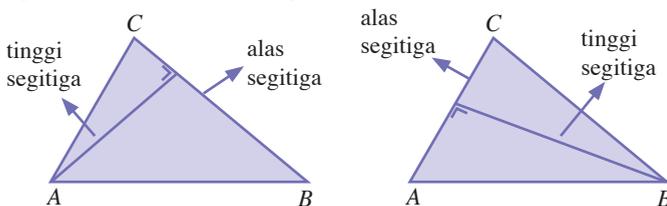
$$K = s_1 + s_2 + s_3$$

Sebelum mempelajari luas segitiga, Anda akan mempelajari terlebih dahulu tinggi segitiga. Tinggi segitiga adalah garis yang melalui salah satu titik sudut segitiga dan tegak lurus dengan sisi yang berhadapan dengan titik sudut tersebut.

Pada segitiga ABC berikut, titik C berhadapan dengan sisi AB . Garis yang melalui titik C dan tegak lurus dengan AB adalah tinggi segitiga. Adapun AB disebut alas segitiga.



Jika BC adalah alas segitiga ABC maka segitiga ABC adalah garis yang melalui titik A dan tegak lurus BC . Begitu juga AC adalah alas segitiga ABC , maka tinggi segitiga ABC adalah garis yang melalui titik A dan tegak lurus AC .



Gambar 4.14

Segitiga ABC dengan AB sebagai alasnya.

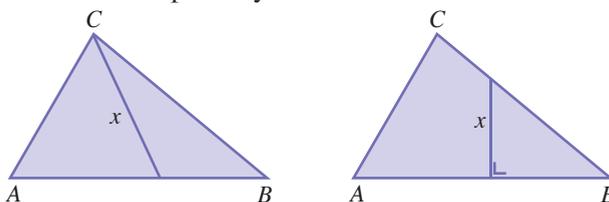
Gambar 4.15

Tinggi segitiga selalu tegak lurus terhadap alasnya.

Selanjutnya, perhatikan Gambar 4.16. Garis-garis x pada segitiga ABC berikut bukan tinggi segitiga ABC karena tidak tegak lurus terhadap alasnya.

Gambar 4.16

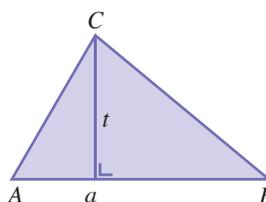
Garis x bukan merupakan tinggi segitiga karena tidak tegak lurus terhadap alas segitiga.



Luas segitiga adalah hasil kali setengah alas segitiga dengan tingginya. Perhatikan Gambar 4.17.

Gambar 4.17

Segitiga ABC dengan alas a dan tinggi t .



Jika alas segitiga dinyatakan dengan a dan tinggi segitiga dinyatakan dengan t , luas segitiga adalah.

$$\frac{1}{2} \times a \times t$$

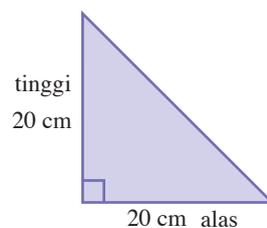
Contoh Soal 4.9

Sebuah taman yang diperuntukkan bagi paru-paru kota, berbentuk segitiga siku-siku sama kaki. Sisi yang sama panjangnya memiliki panjang 20 m. Berapakah luas taman kota tersebut?

Jawab:

Taman yang berbentuk segitiga siku-siku sama kaki dapat digambarkan seperti berikut ini.

Pada segitiga tersebut, alas dan tingginya saling tegak lurus memiliki panjang 20 m, sehingga luas taman tersebut adalah:



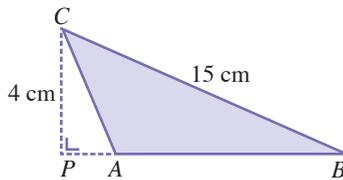
$$L = \frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi} = \frac{1}{2} \times 20\text{m} \times 20\text{m} = 200\text{m}^2$$

Jadi luas taman tersebut adalah 200 m².

Berikut adalah contoh soal menghitung keliling dan luas untuk segitiga tumpul.

Contoh Soal 4.10

Tentukan keliling dan luas segitiga ABC berikut ini.



Jawab:

Pada segitiga ABC , diketahui $AB = 10$ cm, $BC = 15$ cm, dan $AC = 5$ cm

Keliling segitiga ABC adalah

$$\begin{aligned} K &= AB + BC + AC \\ &= 10 \text{ cm} + 15 \text{ cm} + 5 \text{ cm} \\ &= 30 \text{ cm} \end{aligned}$$

Diketahui juga titik C berhadapan dengan garis PB , yaitu garis perpanjangan AB dan tegak lurus dengan garis AB . Oleh karena itu, CP adalah tinggi ABC dan AB (bukan PB) alas untuk segitiga ABC . Jadi, luas segitiga ABC adalah

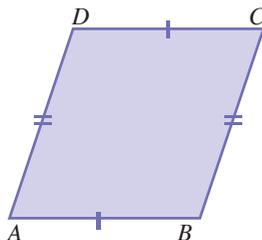
$$\begin{aligned} L &= \frac{AB \times CP}{2} \\ &= \frac{10 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}}{2} \\ &= 20 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

4. Jajargenjang

Perhatikan bentuk bangunan pada Gambar 4.18. Bangunan tersebut berbentuk segiempat di mana sisi-sisi yang berhadapan sama panjang dan sejajar. Sekarang, Anda perhatikan setiap sudut-sudut yang berhadapan pada ubin sama besar dan besar sudut-sudut yang bersebelahan saling berpelurus.

Bangun datar yang memiliki ciri-ciri seperti bangunan pada Gambar 4.18 disebut jajargenjang.

Penampang jajargenjang jika digambar akan tampak sebagai berikut.



Sumber: bp3.blogspot.com

Gambar 4.18

Bangunan berbentuk jajargenjang

$$AB = DC$$

$$AD = BC$$

$$\angle A = \angle C$$

$$\angle B = \angle D$$

$$\text{dan } \angle A + \angle D = \angle A + \angle B = \angle B + \angle C = \angle C + \angle D = 180^\circ$$

Jika keempat sudut pada jajargenjang siku-siku maka akan terbentuk persegi panjang.

Seperti pada bangun datar lainnya, keliling jajargenjang adalah jumlah panjang keempat sisinya, yaitu sebagai berikut.

$$K = AB + BC + CD + AD$$

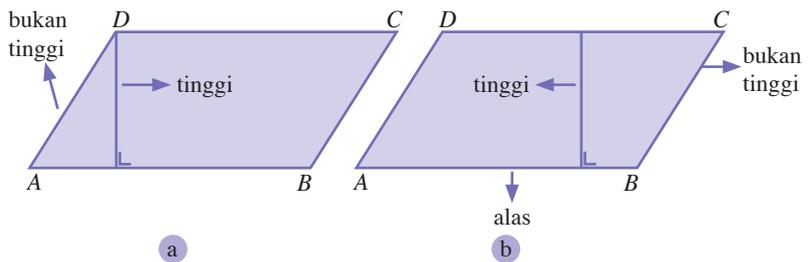
Oleh karena $AB = CD$ dan $BC = AD$ maka

$$K = 2AB + 2BC$$

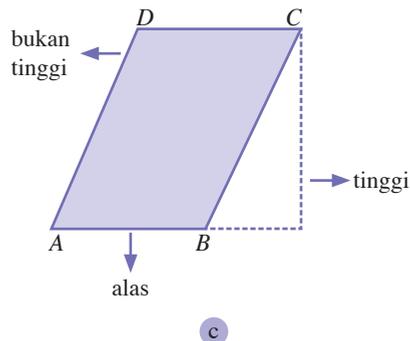
$$= 2(AB + BC)$$

Sebelum mempelajari luas jajargenjang, berikut Anda akan mempelajari terlebih dahulu tinggi dan alas jajargenjang.

Seperti pada segitiga, tinggi jajargenjang adalah garis yang tegak lurus dengan kedua sisi jajargenjang yang berhadapan. Sisi yang tegak lurus dengan tinggi disebut alas jajargenjang.



Gambar 4.19
Tinggi jajargenjang adalah garis yang tegak lurus dengan kedua sisi jajargenjang yang berhadapan.

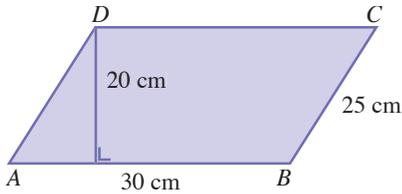


Luas jajargenjang adalah hasil kali alas dengan tingginya. Jika alas jajargenjang dinyatakan dengan a dan tinggi jajargenjang dinyatakan dengan t maka luas jajargenjang dapat dicari dengan rumus berikut.

$$L = a \times t$$

Contoh Soal 4.11

Tentukan keliling dan luas jajargenjang $ABCD$ berikut.



Jawab:

Diketahui $AB = DC = a = 30$ cm, $BC = AD = 25$ cm,
tinggi jajargenjang $= t = 20$ cm.

Keliling jajargenjang $ABCD$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}K &= 2(AB + BC) \\ &= 2(30 \text{ cm} + 25 \text{ cm}) \\ &= 2(55 \text{ cm}) \\ &= 110 \text{ cm}\end{aligned}$$

Luas jajargenjang $ABCD$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}L &= a \times t \\ &= 30 \text{ cm} \times 20 \text{ cm} \\ &= 600 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Jadi, keliling dan luas jajargenjang $ABCD$ adalah 110 cm dan 600 cm².

Pelajarilah contoh soal berikut, yaitu contoh soal penerapan bangun ruang berbentuk jajargenjang dalam kehidupan sehari-hari.

Contoh Soal 4.12

Diketahui panjang alas sepetak tanah berbentuk jajargenjang adalah dua kali tingginya. Jika luas tanah tersebut adalah 338 m², tentukan panjang alas dan tinggi tanah tersebut.

Jawab:

Diketahui $a = 2t$ dan $L = 338$ m²

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}L &= a \times t \\ 338 \text{ m}^2 &= (2t) \times t \\ 338 \text{ m}^2 &= 2t^2 \\ 169 \text{ m}^2 &= t^2 \\ \sqrt{169 \text{ m}^2} &= t \\ \pm 13 \text{ m} &= t\end{aligned}$$

Oleh karena tinggi harus bernilai positif maka diperoleh tinggi tanah yang berbentuk jajargenjang adalah 13 cm. Diketahui panjang alas sama dengan dua kali tinggi, diperoleh

$$\begin{aligned} a &= 2 \times 13 \text{ cm} \\ &= 26 \text{ cm} \end{aligned}$$

Jadi, panjang alas tanah berbentuk jajargenjang itu adalah 26 m.



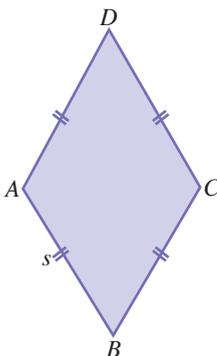
Sumber: portal.cbn.net.id

Gambar 4.20

Keramik pada dinding berbentuk belahketupat

Gambar 4.21

Belahketupat $ABCD$



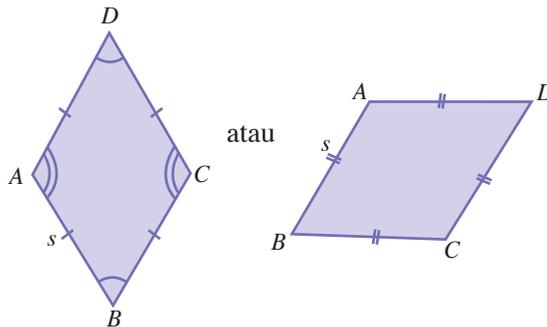
Gambar 4.22

Keliling belahketupat sama dengan empat kali panjang sisinya.

5. Belahketupat

Gambar 4.20 merupakan gambar keramik pada dinding sebuah ruangan. Keramik tersebut berbentuk belahketupat. Jika Anda perhatikan keramik tersebut memiliki empat sisi yang sama panjang. Berbeda dengan persegi, belahketupat seperti pada Gambar 4.20 walaupun sama-sama memiliki sisi-sisi yang sama panjang, pada belahketupat sudut-sudut yang berhadapan adalah sama besar.

Perhatikan belahketupat $ABCD$ berikut.



$$AB = BC = CD = AD$$

$$\angle A = \angle C$$

$$\angle B = \angle D$$

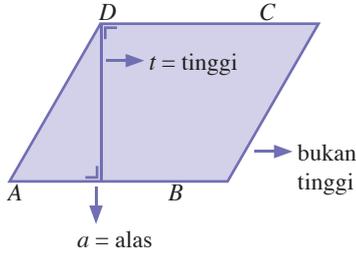
Jika keempat sudut pada belahketupat siku-siku maka akan terbentuk persegi.

Keliling belahketupat adalah jumlah panjang keempat sisinya. Oleh karena keempat sisi belahketupat sama panjang, maka keliling belahketupat sama dengan empat kali sisinya. Perhatikan Gambar 4.22.

Jika sisi belahketupat dinyatakan dengan s , keliling belahketupat adalah.

$$K = 4s$$

Seperti juga jajargenjang, tinggi belahketupat didefinisikan sebagai garis yang tegak lurus dengan kedua sisi belahketupat yang berhadapan. Sisi yang tegak lurus dengan tinggi disebut alas belahketupat.



Gambar 4.23

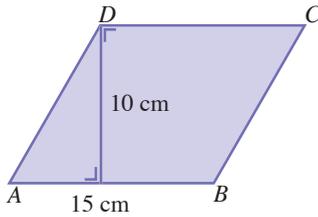
Belahketupat $ABCD$ dengan alas a dan tinggi t .

Luas belahketupat adalah perkalian antara alas dan tingginya. Jika alas dinyatakan dengan a dan tinggi dinyatakan dengan t , maka luas belahketupat adalah

$$L = a \times t$$

Contoh Soal 4.13

Tentukan keliling dan luas belahketupat $ABCD$ pada gambar.



Jawab:

Diketahui $AB = BC = DC = AD = 15$ cm
maka keliling belahketupat $ABCD$ adalah

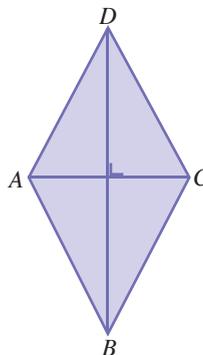
$$\begin{aligned} K &= 4 \cdot AB \\ &= 4 \cdot 15 \text{ cm} \\ &= 60 \text{ cm} \end{aligned}$$

Diketahui tinggi belahketupat adalah 10 cm dengan panjang alas AB adalah 15 cm. Luas belahketupat adalah

$$\begin{aligned} L &= AB \times t \\ &= 15 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \\ &= 150 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Jadi, keliling dan luas belahketupat $ABCD$ berturut-turut adalah 60 cm dan 150 cm².

Selain dengan cara seperti pada Contoh Soal 4.13, untuk menghitung luas belahketupat dapat dilakukan dengan cara lain. Misalkan AC dan DB adalah diagonal-diagonal pada belahketupat $ABCD$, seperti tampak pada gambar berikut.



Dengan cara lain, luas belahketupat $ABCD$ dapat diperoleh dengan rumus berikut.

$$L = \frac{AC \times DB}{2}$$

Contoh Soal 4.14

Sebuah industri *furniture* akan merancang sebuah meja kantor berbentuk belahketupat. Diagonal meja tersebut masing-masing adalah 160 cm dan 120 cm. Tentukanlah luas dan keliling meja tersebut.

Jawab:

Anggap meja yang akan dibuat adalah belahketupat $ABCD$ berikut. AC dan BD merupakan diagonal meja yang panjangnya adalah 160 cm dan 120 cm.

Panjang $AO = OC = \frac{1}{2} \times 160 \text{ cm} = 80$, panjang

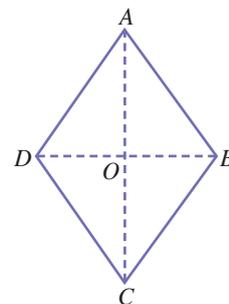
$DO = OB = \frac{1}{2} \times 120 \text{ cm} = 60$ cm.

Oleh karena panjang AO dan OD diketahui

maka sisi AD dapat dihitung dengan teorema Pythagoras berikut.

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{DO^2 + OA^2} \\ &= \sqrt{60^2 + 80^2} \\ &= \sqrt{3600 + 6400} \\ &= \sqrt{10.000} = 100 \end{aligned}$$

Oleh karena belahketupat memiliki panjang sisi yang sama maka



diperoleh $AD = DC = CB = BA = 100$ cm.

Dengan demikian diperoleh,

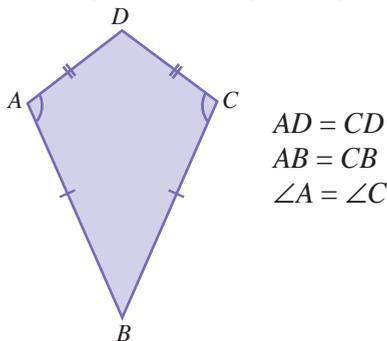
$$\begin{aligned}\text{Luas meja} &= \frac{1}{2} \times \text{diagonal} \times \text{diagonal} \\ &= \frac{1}{2} \times AC \times DB \\ &= \frac{1}{2} \times 160 \text{ cm} \times 120 \text{ cm} \\ &= 9600 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Keliling meja} &= \text{jumlah sisi-sisinya} \\ &= AD + DC + CB + BA \\ &= 100 \text{ cm} + 100 \text{ cm} + 100 \text{ cm} + 100 \text{ cm.} \\ &= 400 \text{ cm}\end{aligned}$$

6. Layang-Layang

Seperti namanya, layang-layang berbentuk seperti mainan layang-layang. Layang-layang adalah salah satu bangun segiempat yang masing-masing pasangan sisinya sama panjang dan sepasang sudut yang berhadapan sama besar.

Perhatikan gambar layang-layang $ABCD$ berikut



Gambar 4.24

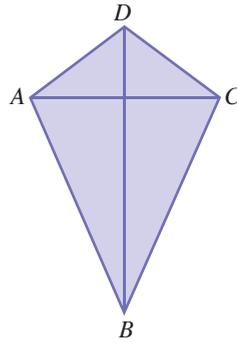
Layang-layang $ABCD$

Keliling layang-layang adalah jumlah panjang keempat sisinya. Jika panjang sisi layang-layang $ABCD$ adalah AB , BC , CD , dan AD dengan $AD = CD$ dan $AB = CB$ maka keliling layang-layang $ABCD$ adalah

$$K = 2(AD + AB)$$

Luas layang-layang adalah hasil kali diagonal-diagonalnya dibagi dua. Perhatikan gambar berikut.

Gambar 4.25
Layang-layang $ABCD$ dengan diagonal AC dan BD .



Jika diagonal pada layang-layang $ABCD$ adalah AC dan BD maka luas layang-layang $ABCD$ adalah

$$L = \frac{AC \times BD}{2}$$

Contoh Soal 4.15

Sebuah kios souvenir menjual cendra mata berupa layang-layang yang memiliki panjang diagonal 150 cm dan 120 cm. Tentukan luas kertas untuk membuat layang-layang tersebut.

Jawab:

$$\begin{aligned} \text{Luas kertas} &= \text{luas layang-layang} \\ &= \frac{1}{2} \times \text{diagonal 1} \times \text{diagonal 2} \\ &= \frac{1}{2} \text{ cm} \times 150 \times 120 \text{ cm} \\ &= 9000 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Jadi, luas kertas yang dibutuhkan untuk membuat sebuah layang-layang adalah 9000 cm^2 .

7. Trapezium

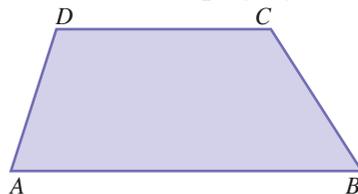
Coba Anda perhatikan bentuk tas tangan pada Gambar 4. 26. Jika Anda perhatikan, tas tangan tersebut memiliki dua sisi yang sejajar tapi tidak sama panjang. Benda dengan ciri-ciri seperti tas tangan tersebut dinamakan trapesium.

Trapezium adalah bangun segiempat yang memiliki dua sisi yang sejajar dan tidak sama panjang.



Sumber: www.tabajennatives.com

Gambar 4.26
Tas tangan berbentuk trapesium sama kaki.

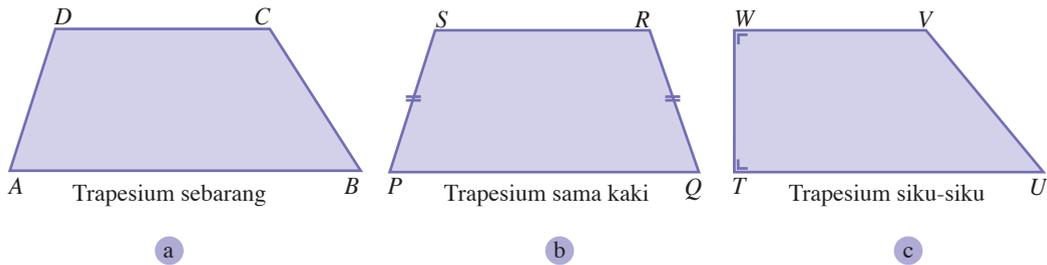


Pada trapesium $ABCD$ tersebut, sisi AB sejajar dengan sisi DC dan $AB \neq DC$.

Terdapat tiga jenis trapesium, yaitu trapesium *sebarang*, trapesium *sama kaki*, dan trapesium siku-siku. Trapesium sebarang adalah trapesium dengan panjang kaki yang tidak beraturan. Trapesium sama kaki adalah trapesium yang memiliki kaki-kaki yang sama panjang. Trapesium siku-siku adalah trapesium yang salah satu sisinya tegak lurus dengan dua sisi yang sejajar. Untuk lebih jelas, perhatikan gambar berikut.

Gambar 4.27

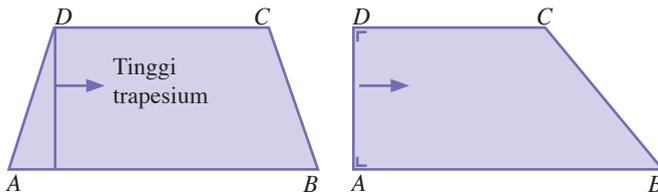
- a. Trapesium sebarang
- b. Trapesium sama kaki
- c. Trapesium siku-siku



Keliling trapesium adalah jumlah panjang keempat sisinya. Jika panjang sisi-sisi trapesium $ABCD$ adalah AB , BC , CD , dan AD maka keliling trapesium $ABCD$ adalah sebagai berikut.

$$K = AB + BC + CD + AD$$

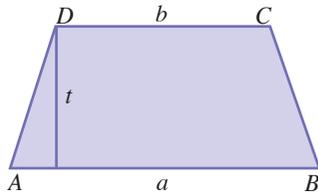
Seperti juga jajargenjang dan belahketupat, tinggi trapesium adalah garis yang tegak lurus dengan dua sisi trapesium yang berhadapan dan sejajar.



Gambar 4.28

Apapun jenis trapesiumnya, tinggi trapesium adalah garis yang tegak lurus dengan dua sisi trapesium yang berhadapan dan sejajar.

Luas trapesium adalah setengah dari jumlah sisi-sisi yang sejajar dikali tingginya. Perhatikan trapesium $ABCD$ berikut.



Gambar 4.29

Trapezium $ABCD$ dengan $AB = a$, $CD = b$, dan tinggi t .

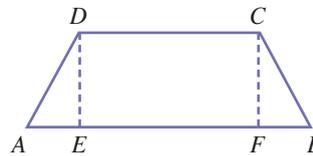
Sisi-sisi yang sejajar pada trapesium $ABCD$ adalah AB dan DC dengan panjang masing-masing a dan b . Jika tingginya adalah t maka luas jajargenjang $ABCD$ adalah

$$L = \frac{(a+b)}{2} t$$

Contoh Soal 4.16

Sebuah produsen mobil meluncurkan produk mobil model terbaru. Kaca belakang mobil tersebut berbentuk trapesium sama kaki. Jika panjang sisi-sisi yang sejajar masing-masing adalah 180 cm dan 100 cm, tinggi kaca mobil 30 cm maka tentukanlah keliling kaca mobil tersebut.

Jawab:



Anggap trapesium $ABCD$ merupakan kaca belakang mobil. AB dan CD merupakan sisi sejajar, di mana $AB = 180$ cm dan $CD = 100$ cm, DE dan CF merupakan tinggi trapesium, dimana $DE = CF = 30$ cm.

Karena trapesium $ABCD$ merupakan trapesium sama kaki, maka $AD = CB$ dan $AE = BF$.

Perhatikan gambar trapesium $ABCD$, maka diperoleh persamaan berikut.

$$AE + EF + FB = AB \dots(1)$$

Perhatikanlah $EF = CD = 100$ cm, $AB = 180$ cm, panjang AE dan FB adalah sama tetapi belum diketahui maka asumsikan panjang AE dan BF nilainya adalah x . Dengan menyubstitusikan nilai AE , EF , FB , dan AB ke persamaan (1) maka diperoleh,

$$x + 100 \text{ cm} + x = 180 \text{ cm}$$

$$2x = 180 \text{ cm} - 100 \text{ cm}$$

$$x = \frac{80 \text{ cm}}{2} = 40 \text{ cm}$$

Perhatikan kembali segitiga siku-siku AED , oleh karena diperoleh

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{AE^2 + ED^2} \\ &= \sqrt{40^2 + 30^2} \\ &= \sqrt{1600 + 900} \\ &= \sqrt{2500} = 50 \end{aligned}$$

Oleh karena $AD = CB$, maka $CB = 50$ cm.

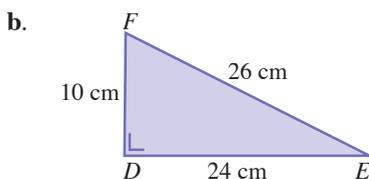
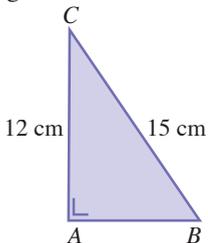
Dengan demikian,

$$\begin{aligned} \text{Keliling kaca mobil} &= \text{keliling trapesium } ABCD \\ &= AB + BC + CD + DA \\ &= 180 \text{ cm} + 50 \text{ cm} + 100 \text{ cm} + 50 \text{ cm} \\ &= 380 \text{ cm} \end{aligned}$$

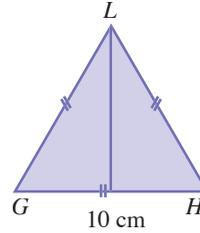
Evaluasi Materi 4.2

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

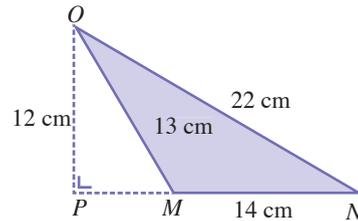
- Tentukan keliling dan luas persegi panjang jika diketahui panjang dan lebarnya
 - $p = 5$ cm dan $l = 4$ cm,
 - $p = 9$ satuan dan $l = 7$ satuan,
 - $p = 14$ cm dan $l = 13$ cm.
- Tentukan:
 - luas persegi panjang jika diketahui keliling persegi panjang tersebut 42 cm dan panjang salah satu sisinya 11 cm,
 - keliling persegi panjang jika diketahui luas persegi panjang tersebut 108 cm² dan panjang salah satu sisinya 11 cm.
- Sebuah buku akuntansi diketahui panjang salah satu sisinya sama dengan dua kali panjang sisi yang lain. Jika luas buku tersebut adalah 300 cm², tentukan keliling buku akuntansi tersebut.
- Pak Nano senang berolahraga. Setiap pagi ia berlari mengelilingi lapangan berbentuk persegi di depan rumahnya sejauh 480 m untuk 8 kali putaran. Tentukan luas permukaan lapangan persegi.
- Permukaan sebuah jam dinding berbentuk persegi. Luas permukaan jam tersebut lima kali kelilingnya. Jika keliling permukaan jam adalah 80 cm, tentukan panjang sisi permukaan jam tersebut.
- Tentukan keliling dan luas dari segitiga-segitiga berikut.



c.

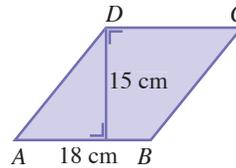


d.

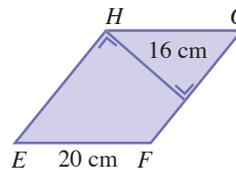


- Diketahui tinggi suatu jajargenjang $\frac{2}{3}$ kali panjang alasnya. Jika luas jajargenjang tersebut adalah 384 cm², tentukan tinggi dan panjang alas jajargenjang tersebut.
- Tentukan keliling dan luas jajargenjang berikut.

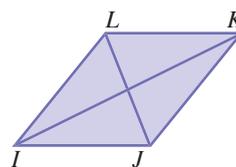
a.

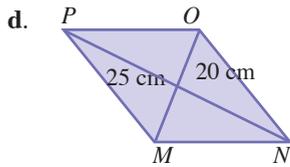


b.



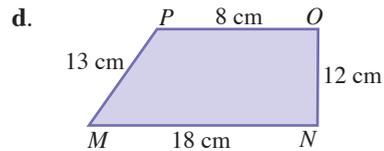
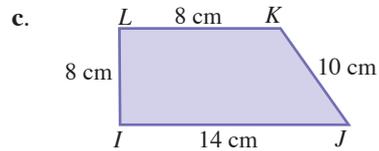
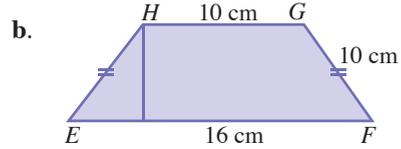
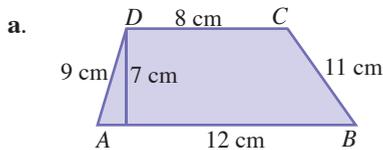
c.





9. Harga tanah di kota A adalah Rp1.750.000,00 per meter persegi. Pak Hasan memiliki tanah di kota A yang berbentuk persegi panjang dengan ukuran panjang 45 m dan lebar 21 m. Jika Pak Hasan ingin menjual seluruh tanahnya tersebut, berapakah jumlah uang yang akan diterimanya?.

10. Tentukan keliling dan luas trapesium berikut ini.



Ringkasan

- Sudut dapat dibentuk oleh dua buah sinar garis yang memiliki titik pangkal yang sama.
 - a. Kaki sudut adalah garis-garis pembentuk sudut.
 - b. Titik sudut adalah titik perpotongan kedua kaki sudut.
 - c. Daerah sudut adalah daerah yang dibatasi oleh kedua kaki sudut.
- Derajat adalah nama satuan yang digunakan untuk menyatakan besar sudut dan dilambangkan dengan ($^{\circ}$).
- 1 radian adalah ukuran sudut pusat sebuah lingkaran yang besar busur di depannya sama dengan jari-jari lingkaran.

$$1 \text{ radian} = \frac{180}{\pi}$$

$$1^{\circ} = \frac{\pi}{180} \text{ radian.}$$
- Persegipanjang adalah bangun datar yang memiliki empat buah sisi (segiempat) dengan sisi-sisi yang berhadapan sama panjang, sejajar, serta keempat sudutnya siku-siku (90°).

$$\text{Keliling } K = 2(p + l)$$

$$\text{Luas persegipanjang } L = p \times l \text{ dengan } p = \text{panjang, dan } l = \text{lebar}$$
- Persegi adalah segiempat yang keempat sisinya sama panjang dan keempat sudut siku-sikunya.

$$K = 4s$$

$$L = s^2$$
- Segitiga adalah bangun datar yang dibatasi tiga buah sisi dan membentuk tiga buah sudut.

$$K = a + b + c$$

$$L = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t$$
- Jajargenjang adalah segiempat dengan sisi yang berhadapan sama panjang dan sejajar.

$$K = 2(a + m)$$

$$L = a \cdot t$$
- Belahketupat adalah segiempat yang keempat sisinya sama panjang.

$$K = 4s$$

$$L = \frac{1}{2} \cdot \text{diagonal} \cdot \text{diagonal}$$

- Layang-layang adalah segiempat yang sepasang-sepasang sisinya yang berdekatan sama panjang.

$$K = 2(p + a)$$

$$L = \frac{1}{2} \cdot \text{diagonal pendek} \cdot \text{diagonal panjang}$$

- Trapesium adalah segiempat yang memiliki tepat sepasang sisi berhadapan sejajar.

$$K = a + b + p + q$$

$$L = \frac{1}{2} \cdot \text{tinggi} \cdot (\text{jumlah sisi sejajar})$$

Kaji Diri

Setelah mempelajari materi tentang Geometri Dimensi Dua, tuliskan bagian mana saja yang belum Anda pahami. Selain itu, tuliskan juga materi yang Anda senangi beserta alasannya. Bacakan tulisan Anda di depan kelas.

Evaluasi Materi Bab 4

Kerjakan di buku latihan Anda.

A. Pilihlah satu jawaban yang tepat.

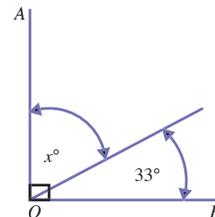
- Dari pukul 10.00 WIB sampai dengan 11.00 WIB, jarum menit pada jam telah berputar sebesar
 - 60°
 - 90°
 - 180°
 - 200°
 - 360°
- Sama dengan soal nomor 1, jarum detik pada jam telah berputar sebanyak
 - $2 \times 360^\circ = 720^\circ$
 - $60 \times 360^\circ = 21.600^\circ$
 - $10 \times 360^\circ = 360^\circ$
 - $40 \times 360^\circ = 14.400^\circ$
 - $360 \times 360^\circ = 129.600^\circ$
- Siswa SMK Yayasan Bunda, pada saat kegiatan belajar mengajar diberi kesempatan beristirahat dari pukul 10.00 WIB sampai

dengan jarum menit pada jam berputar sebanyak $\frac{3}{4}$ putaran. Siswa SMK Yayasan

Bunda kembali ke kelas pukul

- 10.15 WIB
- 10.30 WIB
- 10.45 WIB
- 10.25 WIB
- 10.50 WIB

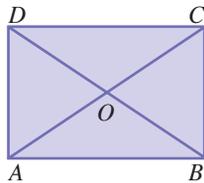
- Perhatikan gambar berikut.



Jika $\angle AOB$ merupakan sudut siku-siku maka nilai x adalah

- a. 57° d. 90°
- b. 47° e. 45°
- c. 60°

5. Perhatikan gambar persegi panjang $ABCD$ berikut.



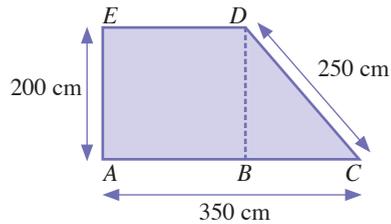
Jika $\angle DAO = 40^\circ$ maka $\angle DAB = \dots$

- a. 60° d. 65°
 - b. 50° e. 30°
 - c. 55°
6. Pak Amin memiliki usaha pembuatan layang-layang. Ia mendapat pesanan dari salah seorang pelanggannya untuk dibuatkan layang-layang dengan panjang diagonal masing-masing 80 cm dan 100 cm. Luas permukaan kertas minimum yang diperlukan Pak Amin untuk menutupi kerangka layangan tersebut adalah
- a. 9.000 cm^2 d. 4.000 cm^2
 - b. 5.000 cm^2 e. 4.500 cm^2
 - c. 6.000 cm^2
7. Pak Sanusi adalah seorang pengrajin pigura. Ia sedang menyelesaikan pembuatan sebuah pigura yang memiliki keliling sepanjang 320 cm dan lebar sebesar 60 cm. Luas permukaan pigura yang sedang dibuat Pak Sanusi adalah
- a. 4.000 cm^2 d. 7.000 cm^2
 - b. 5.000 cm^2 e. 7.500 cm^2
 - c. 6.000 cm^2
8. Siswa SMK Abdi Bangsa menggunakan lapangan berbentuk persegi dengan luas 62.500 m^2 untuk mengikuti pelajaran olahraga. Sebelum pelajaran olahraga dimulai, setiap siswa melakukan pemanasan. Siswa harus berlari mengelilingi lapangan tersebut

sebanyak $3 \times$. Panjang lintasan yang harus ditempuh setiap siswa saat pemanasan adalah

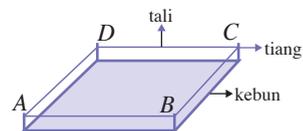
- a. 2 km d. 4 km
- b. 2,5 km e. 3 km
- c. 2,75 km

9. Sebuah gedung perkantoran berdiri di atas lahan berbentuk trapesium $ABCDE$ seperti gambar berikut ini.



Luas lahan perkantoran tersebut adalah

- a. 55.000 m^2 d. 45.000 m^2
 - b. 50.000 m^2 e. 60.000 m^2
 - c. 40.000 m^2
10. Jika lahan pada bagian segitiga DBC (pada soal nomor 9) digunakan sebagai aula maka keliling aula tersebut adalah
- a. 650 m d. 500 m
 - b. 600 m e. 400 m
 - c. 550 m
11. Luas aula (pada soal nomor 10) adalah
- a. 20.000 m^2 d. 12.000 m^2
 - b. 18.000 m^2 e. 15.000 m^2
 - c. 9.000 m^2
12. Sebuah kebun berbentuk jajargenjang seperti gambar berikut.



Pada setiap sudutnya ditanamkan sebuah tiang. Jarak tiang A dengan tiang B adalah 25 m dan jarak tiang B dan tiang C adalah 24 m. Seutas tali direntangkan mengelilingi

kebun melalui tiang $A, B, C,$ dan D . Panjang tali tersebut adalah

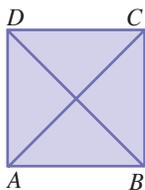
- a. 100 m
- b. 99 m
- c. 98 m
- c. 97 m
- d. 96 m

13. Pemilik kebun (pada soal nomor 12) ingin mengetahui luas kebunnya. Ia membuat garis yang tegak lurus dengan sisi AB dan DC , kemudian diperoleh panjang garis tersebut adalah 7 m. Luas kebun tersebut adalah

- a. 150 m
- b. 168 m
- c. 170 m
- d. 175 m
- e. 200 m

B. Kerjakanlah soal-soal berikut.

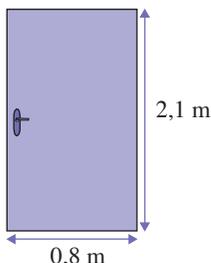
1. Pak Dedes memiliki sebidang tanah berbentuk persegi seperti gambar berikut.



Dari titik A sampai titik C dibuat jalan, begitu pula dari titik B sampai titik D . Kedua jalan berpotongan di titik O .

- a. Hitunglah besar sudut AOB dan sudut BAO .
- b. Jika luas tanah Pak Dedes adalah 400 m^2 , hitunglah keliling tanah tersebut.

2. Pak Cipto seorang pengrajin pintu. Ia mendapat pesanan dari seorang pelanggannya untuk dibuatkan pintu dengan ukuran sebagai berikut.



14. Jika harga satu meter tali adalah Rp500,00 maka harga tali seluruhnya (pada soal nomor 12) adalah

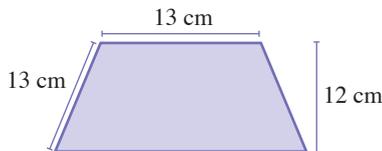
- a. Rp50.000,00
- b. Rp49.500,00
- c. Rp49.000,00
- d. Rp48.500,00
- e. Rp48.000,00

15. Jika harga tanah Rp50.000,00 per meter kuadrat maka harga tanah pada kebun (pada soal nomor 12) adalah

- a. Rp8.750.000,00
- b. Rp10.000.000,00
- c. Rp7.500.000,00
- d. Rp8.400.000,00
- e. Rp8.500.000,00

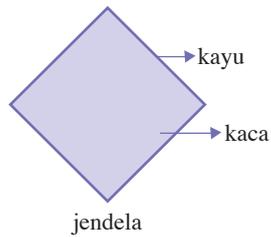
Berdasarkan ilustrasi tersebut, tentukan:

- a. luas permukaan pintu,
 - b. keliling pintu tersebut.
3. Pada sebuah kantor, diadakan rapat dari pukul 08.15 WIB sampai dengan pukul 10.00 WIB.
- a. Selama rapat berlangsung, berapa derajat jarum menit pada jam berputar?
 - b. Selama rapat berlangsung, berapa derajat jarum detik berputar?
4. Sebuah kartu undangan berbentuk trapesium samakaki dengan ukuran seperti tampak pada gambar berikut.



- a. Jika keliling kartu undangan tersebut adalah 62 cm, tentukan panjang sisi yang sejajar dengan sisi yang panjangnya 13 cm.
- b. Tentukan luas kartu undangan tersebut.

5. Pada sebuah rumah terdapat sebuah jendela yang berbentuk belahketupat.



- a. Jika panjang sisi-sisi jendela tersebut adalah 0,2 m, tentukan panjang total kayu yang membentuk sisi-sisi jendela tersebut.
- b. Jika panjang diagonal-diagonal jendela tersebut adalah 0,4 m, tentukan luas kaca yang menutupi jendela tersebut.

Pilihan Karir

Konsultan adalah seorang tenaga profesional yang menyediakan jasa nasehat ahli dalam bidang keahliannya, misalnya akuntansi, lingkungan, biologi, hukum, dan lain-lain. Perbedaan antara seorang konsultan dengan ahli 'biasa' adalah sang konsultan bukan merupakan karyawan di perusahaan sang klien, melainkan seseorang yang menjalankan usahanya sendiri atau bekerja di sebuah firma konsultasi, serta berurusan dengan berbagai klien dalam satu waktu.

Bab 5

Transformasi Bidang Datar



Pada bab ini, Anda akan diajak untuk menentukan kedudukan, jarak yang melibatkan titik, garis, dan bidang dalam dimensi dua sehingga Anda dapat menerapkan transformasi bangun datar menentukan kedudukan, jarak, yang melibatkan titik, garis, dan bidang dalam ruang dimensi dua, serta menerapkan transformasi bangun datar.

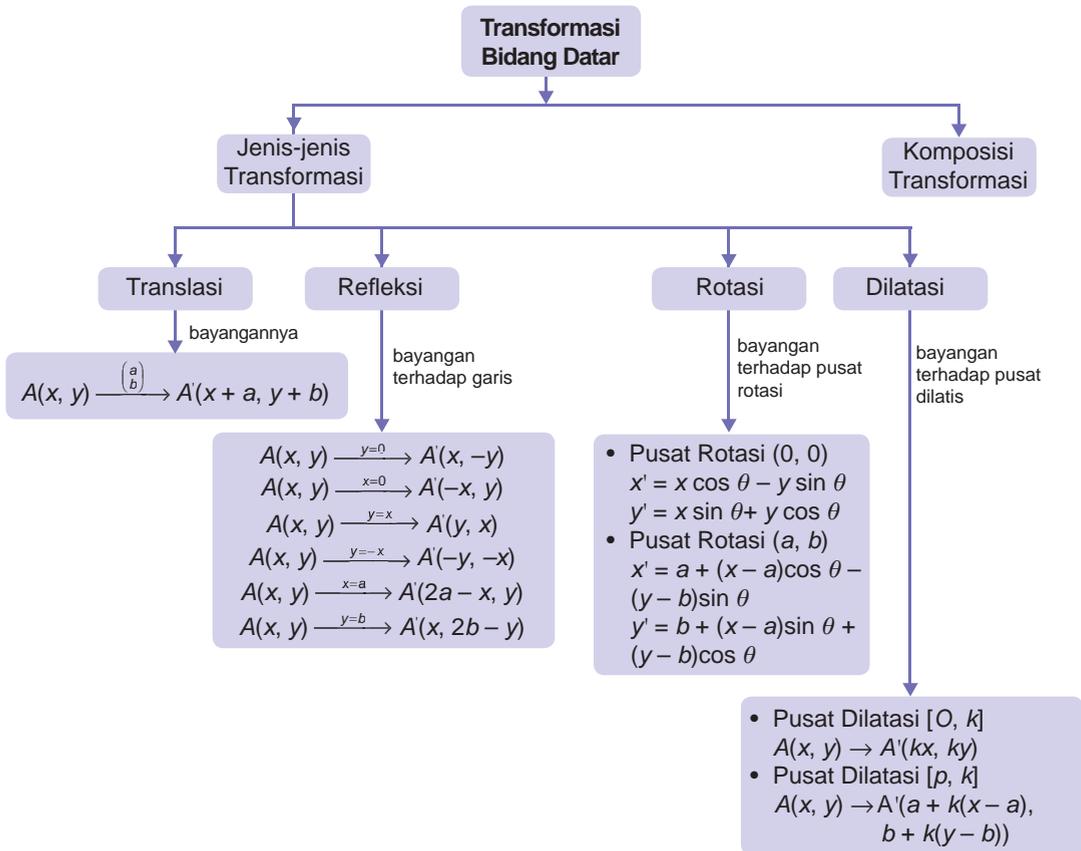
Pada Bab 2, Anda telah mempelajari pemetaan pada bilangan real, yaitu suatu aturan yang menghubungkan suatu bilangan real dengan bilangan real lainnya. Pada bab ini, Anda akan mempelajari pemetaan pada bangun geometri, yaitu transformasi geometri. Transformasi geometri adalah suatu aturan yang menghubungkan suatu titik di suatu bidang geometri (misalnya bidang datar) dengan titik lain pada bidang tersebut.

Pada bab ini, Anda akan mempelajari empat macam transformasi geometri pada bangun datar, yaitu translasi (pergeseran), refleksi (pencerminan), dilatasi (perbesaran atau perkalian), dan rotasi (perputaran). Transformasi-transformasi tersebut sangat erat kaitannya dalam kehidupan sehari-hari, contohnya adalah bayangan suatu objek pada cermin datar merupakan hasil transformasi objek tersebut pada cermin. Jika tinggi objek itu 25 cm dan tinggi cermin lebih besar dari tinggi objek? Berapakah tinggi bayangan objek pada cermin? Anda akan dapat menjawabnya setelah mempelajari bab ini dengan baik.

- A. Translasi
- B. Refleksi
- C. Rotasi
- D. Dilatasi
- E. Komposisi Transformasi

Peta Konsep

Materi tentang Transformasi Bidang Datar dapat digambarkan sebagai berikut.



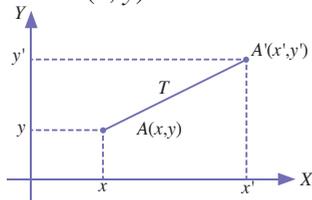
Soal Pramateri

Kerjakan soal-soal berikut, sebelum Anda mempelajari bab ini.

- Tuliskanlah ciri-ciri bidang datar berikut.
 - Jajargenjang
 - Belahketupat
 - Trapesium
 - Layang-layang
- Tuliskanlah rumus luas dari bidang datar berikut
 - Segitiga
 - Belahketupat
 - Trapesium
 - Persegipanjang
- Jelaskan yang dimaksud dengan:
 - absis
 - ordinat
 - transformasi
 - isometri

A Translasi

Sebelum mempelajari materi translasi, perhatikan transformasi pada titik $A(x, y)$ berikut.



Bayangan titik $A(x, y)$ oleh transformasi T menghasilkan bayangan dari titik A , yaitu titik $A'(x', y')$. Jika titik-titik yang ditransformasikan terletak pada suatu bangun geometri maka akan terbentuk suatu bangun baru yang bentuknya sama dengan bangun semula, hanya berbeda posisi. Jadi dapat disimpulkan bahwa

Transformasi pada bangun geometri merupakan suatu aturan yang memindahkan suatu bangun geometri dari satu posisi ke posisi lain dengan tidak mengubah bentuk bangun tersebut.

Transformasi yang tidak mengubah ukuran dan bentuk bangun disebut transformasi *isometri*, di antaranya *translasi* (pergeseran), *refleksi* (pencerminan), dan *rotasi* (putaran). Adapun transformasi yang tidak isometri adalah *dilatasi* (perkalian) karena ukuran bayangan dapat diperbesar atau diperkecil.

Pada subbab ini Anda akan mempelajari konsep translasi, sedangkan transformasi lain akan dipelajari pada subbab-subbab selanjutnya.

Translasi (pergeseran) adalah transformasi yang memetakan suatu titik pada titik lain sebagai bayangannya. Fungsi yang memetakan titik tersebut sepanjang sumbu- x (horizontal) dan dilanjutkan pada sumbu- y (vertikal). Translasi dinyatakan oleh pasangan terurut $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dengan a merupakan komponen translasi pada arah sumbu- x dan b merupakan komponen translasi pada arah sumbu- y . Translasi dapat dibayangkan dengan memindahkan objek-objek di sekitar kita. Misalnya pada pemindahan meja A. pada gambar berikut.

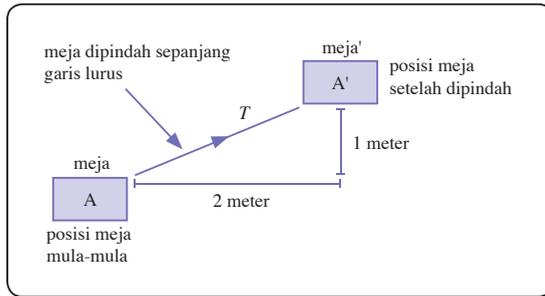
Gambar 5.1

Transformasi titik $A(x, y)$ menjadi $A'(x', y')$

Kata Kunci

- transformasi
- translasi
- koordinat cartesius
- absis
- ordinal
- isometri

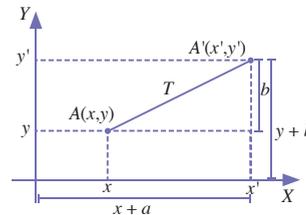
Gambar 5.2
Translasi sebuah meja



Pada Gambar 5.2, meja dipindahkan sepanjang garis lurus sejauh 2 m ke kanan dan 1 m ke atas oleh suatu translasi $T = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, sehingga meja A berpindah ke meja A' .

Dengan membayangkan meja adalah suatu titik pada bidang koordinat Cartesius maka diperoleh Gambar 5.3.

Gambar 5.3
Titik $A(x, y)$ ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ diperoleh bayangan $A'(x', y')$ yaitu $A'(x+a, y+b)$



Pada Gambar 5.3 tampak, titik $A(x,y)$ ditranslasikan oleh translasi $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sepanjang garis lurus sejauh a satuan ke kanan dan b satuan ke atas. Bayangan dari titik A yang diperoleh titik $A'(x+a, y+b)$. Contoh tersebut memperjelas definisi berikut.

Jika titik $A(x,y)$ ditranslasikan oleh translasi $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ maka diperoleh bayangan dari A , yaitu $A'(x', y')$ dengan $x' = x + a$ dan $y' = y + b$

Translasi $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pada titik $A(x, y)$ dapat ditulis

$$T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : A(x, y) \Rightarrow A'(x', y')$$

di mana

- jika $a > 0$, maka arah pergeserannya adalah a satuan ke kanan (menuju x positif)

- jika $a < 0$ maka arah pergeserannya adalah a satuan ke kiri (menuju x positif).
- jika $b > 0$ maka arah pergeserannya adalah b satuan ke atas (menuju y positif).
- jika $b < 0$ maka arah pergeserannya adalah b satuan ke bawah (menuju y positif).

Contoh Soal 5.1

Tentukanlah bayangan titik-titik berikut terhadap translasi T .

- a. $A(3, 1)$ jika ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- b. $B(-4, 2)$ jika ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- c. $C(2, -3)$ jika ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
- d. $D(-1, -1)$ jika ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Jawab:

Untuk menentukan bayangannya, gunakan persamaan translasi berikut.
 $x' = x + a$ dan $y' = y + b$

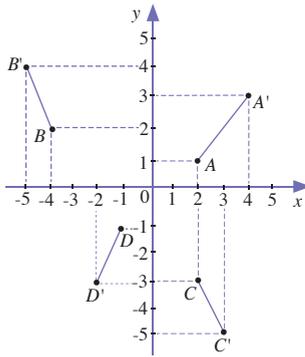
- a. Diketahui $A(3, 1)$ dan $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ maka $x = 3, y = 1, a = 1,$ dan $b = 2$.
 Diperoleh
 $x' = x + a = 3 + 1 = 4$
 $y' = y + b = 1 + 2 = 3$
 Jadi, bayangan dari titik $A(3, 1)$ jika ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ adalah $A'(4,3)$.
- b. Diketahui $B(-4, 2)$ dan $T = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ maka $x = -4, y = 2, a = -1,$ dan $b = 2$. Diperoleh,
 $x' = x + a = -4 + (-1) = -5$
 $y' = y + b = 2 + 2 = 4$
 Jadi, bayangan dari titik $B(-4, 2)$ jika ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ adalah $B'(-5,4)$.
- c. Diketahui $C(2, -3)$ dan $T = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ maka $x = 2, y = -3, a = 1,$ dan $b = -2$. Diperoleh
 $x' = x + a = 2 + 1 = 3$
 $y' = y + b = (-3) + (-2) = -5$



Sumber : www.vill.nishiokoppe.hokkaido.jp

Gambar 5.4

Mendorong benda adalah contoh translasi



Gambar 5.5

A, B, C, dan D beserta bayangannya A', B', C' dan D' oleh translasi T.

Jadi, bayangan dari titik C(2, -3) jika ditranslasikan oleh

$$T = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ adalah } C'(3, -5).$$

- d. Diketahui $D(-1, -1)$ dan $T = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ maka $x = -1, y = -1, a = -1,$ dan $b = -2$. Diperoleh,
- $$x' = x + a = (-1) + (-1) = -2$$
- $$y' = y + b = (-1) + (-2) = -3$$
- Jadi, bayangan dari titik $D(-1, -1)$ jika ditranslasikan oleh
- $$T = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ adalah } D'(-2, -3).$$

Anda juga dapat menentukan aturan translasi jika diketahui titik asal dan bayangannya. Pelajarilah contoh soal berikut.

Contoh Soal 5.2

Jika bayangan dari titik $A(2, 3)$ adalah $A'(3, -1)$ maka tentukanlah aturan translasinya.

Jawab:

Diketahui $A(2, 3)$ dan $A'(3, -1)$ maka $x = 2, y = 3, x' = 3,$ dan $y' = -1$.

Dengan menggunakan persamaan translasi

$$x' = x + a \text{ dan } y' = y + b \text{ diperoleh}$$

$$3 = 2 + a \Leftrightarrow a = 3 - 2 = 1$$

$$-1 = 3 + b \Leftrightarrow b = -1 - 3 = -4$$

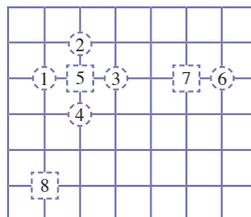
Jadi, translasi yang memetakan titik $A(2, 3)$ ke titik $A'(3, -1)$ adalah

$$T = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Pada Contoh Soal 5.1 dan 5.2, Anda telah mempelajari translasi sebuah titik. Selanjutnya, translasi juga dapat dilakukan pada beberapa titik, contohnya pada Contoh Soal 5.3 berikut.

Contoh Soal 5.3

Cermatilah sketsa denah penataan satuan ruangan sebuah kantor berikut.



Keterangan

1,2,3,dan 4 = kursi tamu

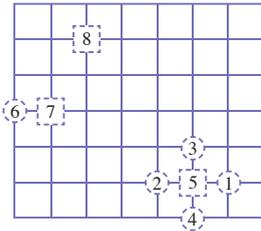
5 = meja tamu

6 = kursi sekretaris

7 = meja sekretaris

8 = lemari arsip

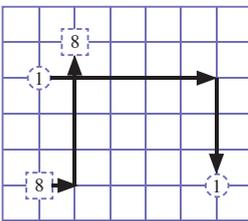
Kemudian tata ruang kantor tersebut hendak diubah menjadi seperti denah berikut.



Tentukanlah translasi dari setiap benda yang terletak pada ruang kantor tersebut.

Jawab:

Perhatikanlah translasi yang dilakukan oleh kursi tamu (1), dan lemari arsip (8) berikut



Kursi tamu (1) berpindah 5 satuan ke kanan dan 3 satuan ke bawah maka translasinya adalah $T_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, sedangkan lemari arsip (8) berpindah 1 satuan ke kanan dan 4 satuan ke atas maka translasinya adalah

$$T_8 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Dengan cara yang sama, diperoleh tranlasi benda-benda dalam, ruang kantor sebagai berikut.

Translasi pada (2), (3), (4), (5), (6), dan (7) berturut-turut adalah

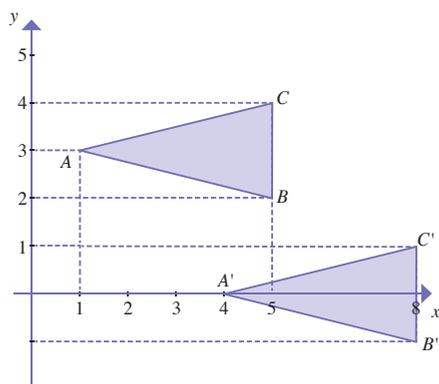
$$T_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, T_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, T_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}, T_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}, T_6 = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}, T_7 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Evaluasi Materi 5.1

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

1. Tentukan bayangan dari titik-titik berikut yang ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$.
 - a. $A(2, 5)$
 - b. $B(-3, 1)$
 - c. $C(6, 7)$
 - d. $D(0, 5)$
2. Bayangan dari titik $P(4, -5)$ yang di translasikan oleh T Adalah $P'(-2, 6)$. Tentukan translasi T .

3. Perhatikan gambar berikut.



Tentukan translasi T yang memetakan segitiga ABC ke $A' B' C'$.

4. Diketahui koordinat titik sudut suatu segiempat $ABCD$ adalah $A(1,1)$, $B(5,1)$, $C(5,4)$, dan $D(1,4)$.

- Jika titik-titik sudut tersebut ditranslasi oleh translasi T yang memetakan segitiga ABC pada soal nomor 3, tentukan koordinat bayangan dari titik-titik tersebut.
- Gambarkan segiempat $ABCD$ dan bayangannya pada bidang koordinat Cartesius (gunakan kertas berpetak), kemudian tentukan keliling dan luas segiempat $ABCD$.

B Refleksi



Sumber : www.aquahobby.com

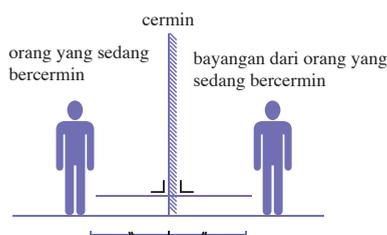
Gambar 5.6

Ukuran dan bentuk ikan sama dengan bayangannya.

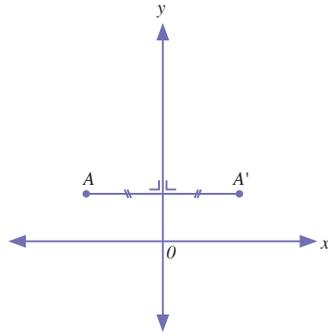
Kata Kunci

- refleksi
- sumbu refleksi
- matriks refleksi

Refleksi (pencerminan) adalah suatu transformasi yang memindahkan suatu titik pada bangun geometri dengan menggunakan sifat benda dan bayangannya pada cermin datar. Pada refleksi, jarak benda dengan cermin sama dengan jarak bayangannya pada cermin. Garis yang menghubungkan titik-titik pada benda dengan titik-titik pada bayangannya tegak lurus dengan cermin, serta ukuran dan bentuk bayangan sama dengan bentuk benda. Perhatikan gambar berikut.



Pada bidang geometri, cermin dilukis sebagai sebuah garis lurus, seperti sumbu- x , sumbu y , garis $y = x$, garis $y = -x$, dan lain sebagainya. Misalkan $A(x, y)$ adalah titik pada bidang koordinat Cartesius, sumbu- y adalah cermin, dan $A'(x', y')$ adalah bayangan dari A terhadap sumbu- y maka jarak A ke sumbu- y sama dengan jarak A' ke sumbu- y dan garis AA' tegak lurus dengan sumbu- y .



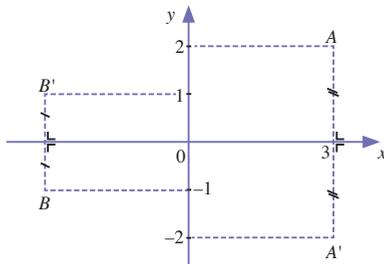
Gambar 5.7

Refleksi titik A terhadap sumbu-y

Garis-garis yang berfungsi sebagai cermin disebut *sumbu cermin* atau *sumbu refleksi*. Pada subbab ini, Anda akan mempelajari refleksi terhadap sumbu-x, refleksi terhadap sumbu-y, refleksi terhadap garis $y = x$, refleksi terhadap garis $y = -x$, refleksi terhadap garis $x = a$, dan refleksi terhadap garis $y = b$. Pelajarilah uraian berikut.

1. Refleksi Terhadap Sumbu-x

Misalkan $A(x, y)$ adalah titik pada bidang koordinat Cartesius dan $A'(x', y')$ adalah bayangan dari titik $A(x, y)$ yang direfleksikan terhadap sumbu-x. Bagaimanakah menentukan titik A' ? Perhatikan grafik berikut.



Gambar 5.8

Refleksi titik A dan B terhadap sumbu-x

Pada gambar 5.8, titik $A(2, 2)$ dan $B(-3, -1)$ direfleksikan terhadap sumbu-x, sehingga diperoleh titik $A'(2, -2)$ dan $B'(-3, 1)$. Lihatlah, jarak titik A dan A' dengan sumbu-x adalah sama, yaitu 2 satuan dan garis AA' tegak lurus dengan sumbu-x. Jadi, bayangan dari titik $A(2, 2)$ yang direfleksikan terhadap sumbu-x adalah $A'(2, -2)$. Perhatikan diagram berikut.



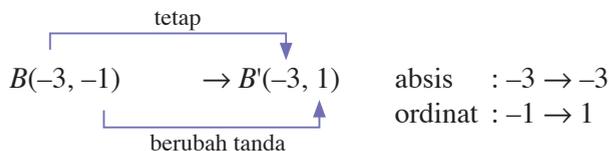


Leonardo da Vinci
(1452–1519)

Seorang seniman dan ahli teknik berkebangsaan Italia, Leonardo da Vinci adalah salah seorang jenius dari zaman Renaissance. Ia yang membuat lukisan paling terkenal sepanjang masa, yaitu "monalisa" dan "The Last Supper", Da vinci selalu mengisi buku catatannya dengan berbagai penemuan dan inovasi ilmiah. Ia dapat menggambar dengan tangan kanan dan menulis dengan tangan kiri serta menggunakan tulisan cermin untuk mencatat pekerjaannya.

Sumber: www.hschamberlain.net

Jarak titik B dan B' dengan sumbu- x sama, yaitu 1 satuan dan garis BB' tegak lurus dengan sumbu- y . Jadi bayangan dari titik $B(-3, -1)$ yang direfleksikan terhadap sumbu- x adalah $B'(-3, 1)$. Perhatikan diagram berikut.



Dari contoh tersebut tampak koordinat bayangan yang dihasilkan mempunyai absis (koordinat x) yang nilai dan tandanya sama dengan absis titik sebelumnya. Adapun, ordinatnya hanya berubah tanda.



Jadi, secara umum definisi refleksi adalah sebagai berikut.

Jika $A(x, y)$ direfleksikan terhadap sumbu- x maka diperoleh bayangannya, yaitu $A'(x', y')$, dengan persamaanya sebagai adalah $x' = x$ dan $y' = -y$

Ditulis

$$A(x, y) \xrightarrow{\text{sumbu-}x} A'(x, -y)$$

Persamaan $x' = x$ dan $y' = -y$ disebut persamaan transformasi refleksi.

Contoh Soal 5.4

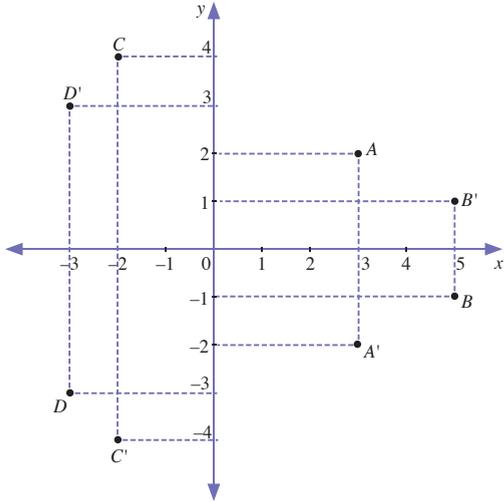
Tentukan bayangan dari titik-titik berikut yang direfleksikan terhadap sumbu- x , kemudian gambarkan bayangannya pada bidang koordinat Cartesius.

- a. $A(3, 2)$ c. $C(-2, 4)$
b. $B(5, -1)$ d. $D(-3, -3)$

Jawab:

- a. Titik $A(3, 2) \Rightarrow x = 3$ dan $y = 2$ maka diperoleh $x' = x = 3$ dan $y' = -y = -2$.
Jadi, bayangan dari titik $A(3, 2)$ yang direfleksikan terhadap sumbu- x adalah $A'(3, -2)$.
- b. Titik $B(5, -1) \Rightarrow x = 5$ dan $y = -1$ maka $x' = x = 5$ dan $y' = -y = -(-1) = 1$.
Jadi, bayangan dari titik $B(5, -1)$ yang direfleksikan terhadap sumbu- x adalah $A'(5, 1)$.

- c. Pada titik $C(-2, 4) \Rightarrow x = -2$ dan $y = 4$ maka $x' = x = -2$ dan $y' = -y = -4$.
Jadi, bayangan dari titik $C(-2, 4)$ yang direfleksikan terhadap sumbu- x adalah $A'(-2, -4)$.
- d. Pada titik $D(-3, -3) \Rightarrow x = -3$ dan $y = -3$ maka $x' = x = -3$ dan $y' = -y = -(-3) = 3$.
Jadi, bayangan dari titik $D(-3, -3)$ yang direfleksikan terhadap sumbu- x adalah $A'(-3, 3)$.



Gambar 5.9

Titik $A(3, 2)$, $B(5, 1)$, $C(-2, 4)$ dan $D(-3, -3)$ direfleksikan terhadap sumbu- x diperoleh $A'(3, -2)$, $B'(5, -1)$, $C'(-2, -4)$, dan $D'(-3, 3)$

Seperti pada translasi, Anda juga dapat menentukan refleksi pada beberapa titik yang membentuk suatu bidang datar. Bidang datar yang dihasilkan akan sama bentuk dan ukurannya. Perhatikan Contoh Soal 5.5 berikut.

Contoh Soal 5.5

Diketahui segitiga ABC dengan titik-titik sudutnya, yaitu $A(1, 4)$, $B(3, 1)$, dan $C(4, 6)$. Gambarlah bayangan dari segitiga ABC yang direfleksikan terhadap sumbu- x pada bidang koordinat Cartesius.

Jawab:

Diketahui titik-titik sudut segitiga $A(1, 4)$, $B(3, 1)$, dan $C(4, 6)$.

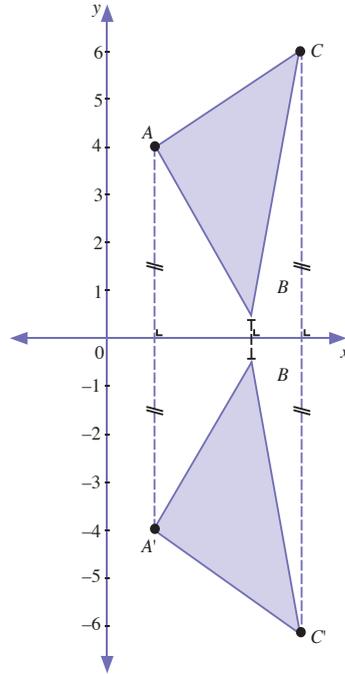
Untuk mendapatkan bayangan dari segitiga ABC yang direfleksikan terhadap sumbu $-x$, tentukan terlebih dahulu koordinat bayangan dari titik-titik sudutnya.

Bayangan dari $A(1, 4)$ yang direfleksikan terhadap sumbu- x adalah $A'(1, -4)$.

Bayangan dari $B(3, 1)$ yang direfleksikan terhadap sumbu- x adalah $B'(3, -1)$.

Bayangan dari $C(4, 6)$ yang direfleksikan terhadap sumbu- x adalah $C'(4, -6)$.

Bayangan dari segitiga ABC diperoleh dengan menghubungkan titik-titik $A(1, -4)$, $B'(3, -1)$, dan $C'(4, -6)$ seperti pada Gambar 5.11 berikut.



Gambar 5.10

Segitiga ABC direfleksikan terhadap sumbu- x menghasilkan segitiga $A'B'C'$

Pada gambar tersebut terlihat segitiga ABC kongruen dengan segitiga $A'B'C'$.

Persamaan transformasi dapat diterjemahkan dalam bentuk matriks. Anda dapat menentukan bayangan suatu titik yang transformasikan dengan menggunakan operasi perkalian dua buah matriks.

Untuk refleksi terhadap sumbu- x , perhatikan kembali persamaan transformasi refleksi berikut.

$$x' = x \text{ dan } y' = -y$$

Jika persamaan tersebut diuraikan, diperoleh

$$x' = 1 \cdot x + 0 \cdot y$$

$$y' = 0 \cdot x + (-1) \cdot y$$

maka diperoleh persamaan matriks sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ disebut matriks refleksi terhadap sumbu- x .

Contoh Soal 5.6

Dengan menggunakan matriks refleksi terhadap sumbu- x , tentukan bayangan titik-titik berikut.

- a. $A(3, 2)$ c. $C(-2, 4)$
b. $B(5, -1)$ d. $D(-3, -3)$

Jawab:

- a. Pada titik $A(3, 2)$, $x = 3$ dan $y = 2$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Diperoleh $x' = 3$ dan $y' = -2$. Jadi, bayangan dari titik $A(3, 2)$ yang direfleksikan terhadap sumbu- x' adalah $A'(3, -2)$.

- b. Pada titik $B(5, -1)$, $x = 5$ dan $y = -1$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 5 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Diperoleh $x' = 5$ dan $y' = 1$. Jadi, bayangan dari titik $B(5, -1)$ yang direfleksikan terhadap sumbu- x adalah $A'(5, 1)$.

- c. Pada titik $C(-2, 4)$, $x = -2$ dan $y = 4$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Notes

Matriks refleksi terhadap sumbu- x adalah $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Diperoleh $x' = -2$ dan $y' = -4$. Jadi, bayangan dari titik $C(-2, 4)$ yang direfleksikan terhadap sumbu- x adalah $A'(-2, -4)$.

- d. Pada titik $D(-3, -3)$, $x = -3$ dan $y = -3$ maka diperoleh

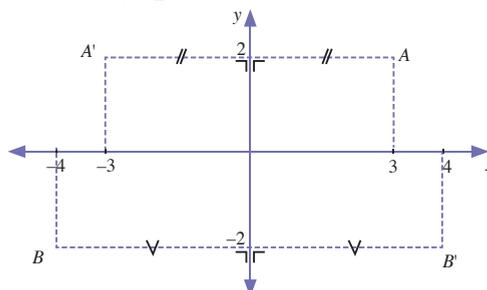
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-3) + 0 \cdot (-3) \\ 0 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diperoleh $x' = -3$ dan $y' = 3$. Jadi, bayangan dari titik $D(-3, -3)$ yang direfleksikan terhadap sumbu- x adalah $A'(-3, 3)$.

2. Refleksi terhadap Sumbu-y

Anda telah mempelajari cara menentukan bayangan yang direfleksikan pada sumbu- x . Sekarang, Anda akan mempelajari sumbu- y . Sebelumnya perhatikan Gambar 5.11 berikut.

Gambar 5.11
Refleksi terhadap sumbu- y



Pada gambar tersebut, titik A dan B tegak lurus terhadap sumbu- y .

Perhatikan, jarak titik A dan A' dengan sumbu- y sama, yaitu 3 satuan dan garis AA' tegak lurus dengan sumbu- y . Jadi, bayangan dari titik $A(3, 2)$ yang direfleksikan terhadap sumbu- x adalah $A'(-3, 2)$. Perhatikan diagram berikut.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \text{berubah tanda} \\ \downarrow \\ A(3, 2) \rightarrow A'(-3, 2) \\ \uparrow \\ \text{tetap} \end{array} & & \begin{array}{l} \text{absis} : 3 \rightarrow -2 \\ \text{ordinat} : 2 \rightarrow 2 \end{array} \end{array}$$

Jarak titik B dan B' dengan sumbu- y sama, yaitu 4 satuan dan garis BB' tegak lurus dengan sumbu- y . Jadi, bayangan dari titik $B(-4, -2)$ yang direfleksikan terhadap sumbu- x adalah $B'(4, -2)$.



Dari contoh-contoh tersebut tampak koordinat bayangan yang dihasilkan mempunyai absis yang nilainya sama dengan absis titik sebelumnya tetapi tandanya berubah. Untuk ordinatnya, nilai dan tandanya sama dengan ordinat titik sebelumnya.



Secara umum, refleksi terhadap sumbu-y dapat didefinisikan sebagai berikut

Jika $A(x, y)$ direfleksikan terhadap sumbu-y, maka diperoleh bayangannya, yaitu $A'(x', y')$, dengan

$$x' = -x \text{ dan } y' = y$$

ditulis

$$A(x, y) \xrightarrow{\text{sumbu-y}} A'(-x, y)$$

Persamaan $x' = -x$ dan $y' = y$ disebut persamaan transformasi refleksi terhadap sumbu-y.

Contoh Soal 5.7

Tentukan bayangan dari $A(3, 4)$ dan $B(-2, 3)$ yang direfleksikan terhadap sumbu-y.

Jawab:

$A(3, 4)$ maka $x = 3$ dan $y = 4$

Dengan menggunakan persamaan transformasi refleksi terhadap sumbu-y, yaitu $x' = -x$ dan $y' = y$

diperoleh, $x' = -x = -3$

$$y' = y = 4$$

Jadi, bayangan dari $A(3,4)$ yang direfleksikan terhadap sumbu-y adalah $A'(-3, 4)$.

$B(-2, 3)$ maka $x = -2$ dan $y = 3$

$$x' = -(-2) = 2$$

$$y' = y = 3$$

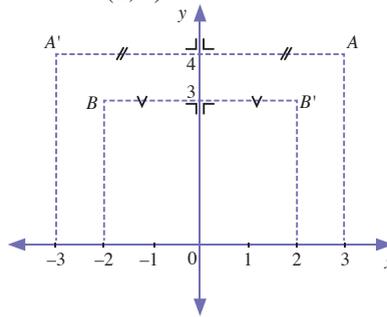
Search

Ketik: www.e-edukasi.net/mapok.

Pada situs ini, Anda dapat mempelajari transformasi geometri yang terdiri atas translasi, refleksi, rotasi, dilatasi, serta komposisinya.

Jadi, bayangan dari $B(3, 4)$ yang direfleksikan terhadap sumbu- y adalah $B'(2, 3)$.

Gambar 5.12
Refleksi titik $A(3, 4)$ dan $B(-2, 3)$ terhadap sumbu- y diperoleh $A'(-3, 4)$ dan $B(2, 3)$



Contoh soal berikut adalah contoh refleksi suatu bangun terhadap sumbu- y . Pelajarilah dengan baik, agar Anda memahaminya.

Contoh Soal 5.8

Koordinat-koordinat titik sudut suatu bidang $ABCD$ adalah $A(3, 1)$, $B(6, 3)$, $C(3, 5)$, dan $D(0, 3)$. Gambarkan bayangan dari bangun tersebut jika direfleksikan terhadap sumbu- y dan tentukan nama bangun dari bayangan yang terbentuk.

Jawab:

Pertama tentukan bayangan dari titik-titik $A(3, 1)$, $B(6, 3)$, $C(3, 5)$, dan $D(0, 3)$ yang direfleksikan terhadap sumbu- y .

Bayangan dari $A(3, 1)$ adalah $A'(-3, 1)$

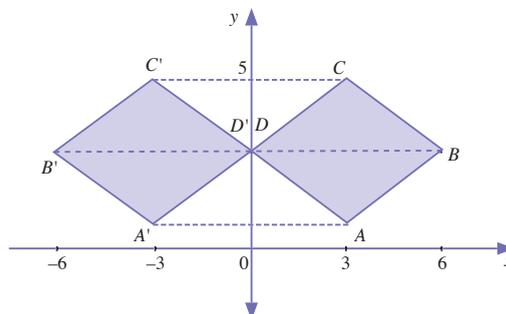
Bayangan dari $B(6, 3)$ adalah $B'(-6, 3)$

Bayangan dari $C(3, 5)$ adalah $C'(-3, 5)$

Bayangan dari $D(0, 3)$ adalah $D'(0, 3)$

Pada refleksi, bayangan yang terbentuk akan memiliki bentuk dan ukuran yang sama dengan benda. Bidang $ABCD$ merupakan belahketupat sehingga $A'B'C'D'$ adalah belahketupat.

Gambar 5.13
Benda dan hasil refleksi sama bentuk dan ukuran



Sama seperti terhadap sumbu- x , refleksi terhadap sumbu- y juga memiliki persamaan matriks. Perhatikan kembali persamaan transformasi refleksi berikut.

$$x' = -x$$

$$y' = y$$

Jika persamaan tersebut diuraikan akan, diperoleh

$$x' = (-1) \cdot x + 0 \cdot y$$

$$y' = 0 \cdot x + 1 \cdot y$$

maka diperoleh persamaan matriks sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ disebut matriks refleksi terhadap sumbu-}y.$$

Notes

Matriks refleksi terhadap sumbu- y adalah $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Contoh Soal 5.9

Dengan menggunakan matriks refleksi, tentukan bayangan dari titik $A(-5, 3)$ yang direfleksikan terhadap sumbu- y .

Jawab:

Diketahui $A(-5, 3)$ maka $x = -5$ dan $y = 3$.

Persamaan matriks refleksi terhadap sumbu - y adalah sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Diperoleh

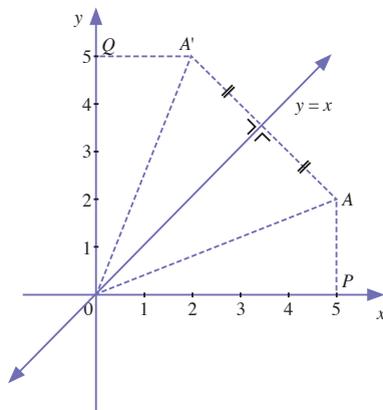
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \cdot (-5) + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot (-5) + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Jadi, bayangan $A(-5, 3)$ yang direfleksikan terhadap sumbu- y adalah $A'(5, 3)$.

3. Refleksi terhadap Garis $y = x$

Perhatikan Gambar 5.14 berikut.

Gambar 5.14
Refleksi terhadap garis $y = x$



Pada Gambar 5.14 tersebut, titik $A(1, 4)$ direfleksikan terhadap garis $y = x$. Jarak A ke garis $y = x$ sama dengan jarak A' ke garis $y = x$. Garis AA' tegak lurus dengan garis $y = x$. Jadi $A'(4, 1)$ adalah bayangan dari titik $A(1, 4)$.

Bagaimanakah hubungan antara koordinat titik A dengan koordinat bayangannya? Pada Gambar 5.14 tampak panjang $OP = OQ$ dan $AP = A'Q$. Jadi panjang $OA = OA'$. Jadi, segitiga $A'OQ$ sama dengan segitiga AOP sehingga diperoleh,

$$OQ = OP \text{ atau ordinat } A' = \text{absis } A$$

$$A'P = AP \text{ atau absis } A' = \text{ordinat } A$$

$$\begin{array}{ccc} & \text{sama} & \\ & \text{-----} & \\ A(1, 4) & \xrightarrow{y=x} & A'(4, 1) \\ & \text{-----} & \\ & \text{sama} & \end{array}$$

Secara umum, refleksi terhadap garis $y = x$ dapat didefinisikan sebagai berikut.

Jika $A(x, y)$ direfleksikan terhadap garis $y = x$ maka diperoleh bayangan dari A , yaitu $A'(x', y')$, dengan

$$x' = y \text{ dan } y' = x$$

ditulis

$$A(x, y) \xrightarrow{y=x} A'(y, x)$$

Persamaan $x' = y$ dan $y' = x$ disebut persamaan transformasi refleksi terhadap garis $y = x$.

Contoh Soal 5.10

Tentukan bayangan dari titik $A(-3, 1)$ dan $B(4, -3)$ yang direfleksikan terhadap garis $y = x$.

Jawab:

Bayangan ditentukan dengan menggunakan rumus

$$x' = y$$

$$y' = x$$

Pada $A(-3, 1)$, $x = -3$ dan $y = 1$ diperoleh

$$x' = 1$$

$$y' = -3$$

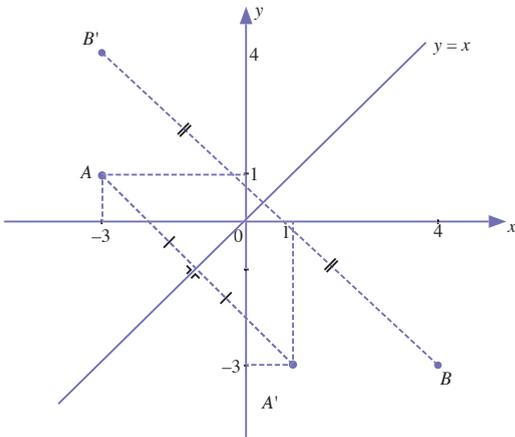
Jadi, bayangan dari titik $A(-3, 1)$ adalah $A'(1, -3)$.

Pada $B(4, -3)$, $x = 4$ dan $y = -3$ diperoleh

$$x' = -3$$

$$y' = 4$$

Jadi, bayangan dari titik $B(4, -3)$ adalah $B'(-3, 4)$.



Gambar 5.15

Titik $A(-3, 1)$ dan $B(4, -3)$ direfleksikan terhadap garis $y = x$ diperoleh $A'(1, -3)$ dan $B'(-3, 4)$

Berikut adalah contoh soal refleksi beberapa titik yang membentuk suatu bidang pada garis $y = x$.

Contoh Soal 5.11

Koordinat-koordinat titik sudut suatu segiempat $ABCD$ adalah $A(3, 0)$, $B(5, -4)$, $C(7, 0)$, dan $D(5, 2)$. Tentukan:

- bayangan dari titik-titik sudut segiempat $ABCD$ jika titik-titik sudut tersebut direfleksikan terhadap garis $y = x$,
- luas segiempat $ABCD$ dan $A'B'C'D'$ tersebut.

Jawab:

a. $A(3, 0) \rightarrow A'(0, 3)$

Jadi, bayangan dari $A(3, 0)$ adalah $A'(0, 3)$.

$B(5, -4) \rightarrow B'(-4, 5)$

Jadi, bayangan dari $B(5, -4)$ adalah $B'(-4, 5)$.

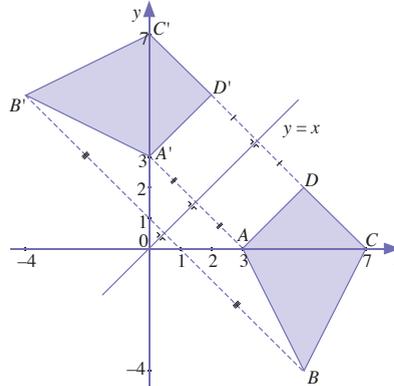
$C(7, 0) \rightarrow C'(0, 7)$

Jadi, bayangan dari $C(7, 0)$ adalah $C'(0, 7)$.

$D(5, 2) \rightarrow D'(2, 5)$

Jadi, bayangan dari $D(5, 2)$ adalah $D'(2, 5)$.

- b. Berikut adalah gambar segiempat $ABCD$ dan bayangannya, yaitu A', B', C', D' .



Gambar 5.16

Luas $ABCD$ sama dengan luas $A'B'C'D'$.

Segiempat yang terbentuk adalah layang-layang $ABCD$ dengan panjang diagonal $AC = 4$ satuan dan panjang diagonal $DB = 6$ satuan.

Rumus luas layang-layang adalah $\frac{1}{2} \times \text{diagonal 1} \times \text{diagonal 2}$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \times AC \times DB \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12 \end{aligned}$$

Luas layang-layang $ABCD$ adalah 12 satuan luas, sehingga luas layang-layang $A'B'C'D'$ juga 12 satuan luas.

Notes

Matriks refleksi terhadap garis $y = x$ adalah

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sama seperti refleksi terhadap sumbu- x dan sumbu- y , refleksi terhadap garis $y = x$ dapat ditentukan dengan menggunakan matriks.

Perhatikan kembali persamaan transformasi refleksi berikut.

$$x' = y$$

$$y' = x$$

Jika persamaan di atas diuraikan, diperoleh

$$x' = 0 \cdot x + 1 \cdot y$$

$$y' = 1 \cdot x + 0 \cdot y$$

maka diperoleh persamaan matriks sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ disebut matriks refleksi terhadap garis $y = x$.

Contoh Soal 5.12

Dengan menggunakan matriks refleksi, tentukan bayangan dari titik $A(-7, -3)$ yang direfleksikan terhadap garis $y=x$ dengan menggunakan matriks refleksi.

Jawab:

Diketahui $A(-7, -3)$ maka $x = -7$ dan $y = -3$.

Dari persamaan matriks

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

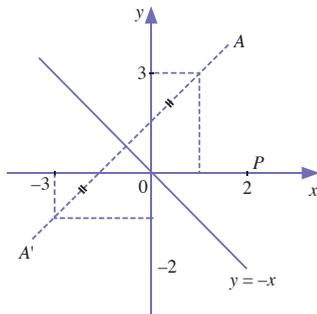
diperoleh

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot (-7) + 1 \cdot (-3) \\ 1 \cdot (-7) + 0 \cdot (-3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Jadi, bayangan dari $A(-7, -3)$ yang direfleksikan terhadap garis $y = x$ adalah $A'(-3, -7)$.

4. Refleksi terhadap Garis $y = -x$

Garis $y = -x$ adalah kedudukan titik-titik koordinat yang memenuhi persamaan $y = -x$ atau $x = -y$. Contohnya titik $(2, -2)$ dan $(-2, 2)$ terdapat pada garis $y = -x$. Perhatikanlah uraian berikut, agar Anda memahami refleksi terhadap garis $y = -x$.



Gambar 5.17

Titik $A(-3, 1)$ dan $B(4, -3)$ direfleksikan terhadap garis $y = x$ diperoleh $A'(1, -3)$ dan $B(-3, 4)$

Pada gambar misalkan, titik $A(2, 3)$ direfleksikan terhadap garis $y = -x$. Jarak bayangan dari A , yaitu titik A' , ke garis $y = -x$ sama dengan jarak A ke garis $y = -x$. Garis AA' tegak lurus dengan garis $y = -x$. Jadi, $A'(-3, -2)$ adalah bayangan dari titik $A(2, 3)$.

Kemudian, hubungan antara koordinat titik A dan koordinat bayangannya adalah sebagai berikut.

Pada gambar tampak panjang $OP = OQ$ dan $AP = A'Q$. Jadi panjang $OA = OA'$. Jadi, segitiga $A'OQ$ sama dengan segitiga AOP .

$$OQ = OP \text{ atau ordinat } A' = - \text{ absis } A$$

$$A'P = AP \text{ atau absis } A' = - \text{ ordinat } A$$

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\text{berubah tanda}} & \\ A(2, 3) & \xrightarrow{y = -x} & A'(-3, -2) \\ & \xleftarrow{\text{berubah tanda}} & \end{array}$$

Jadi, secara umum refleksi terhadap garis $y = -x$ dapat didefinisikan sebagai berikut.

Jika $A(x, y)$ direfleksikan terhadap garis $y = -x$, maka diperoleh bayangan dari A , yaitu $A'(x', y')$, dengan

$$x' = -y \text{ dan } y' = -x$$

ditulis

$$A(x, y) \xrightarrow{y = -x} A'(-y, -x)$$

Persamaan $x' = -y$ dan $y' = -x$ disebut persamaan transformasi refleksi terhadap garis $y = -x$.

Contoh Soal 5.13

Tentukan bayangan dari titik $A(-6, 5)$ yang direfleksikan terhadap garis $y = -x$.

Jawab:

Bayangan ditentukan dengan menggunakan persamaan transformasi refleksi terhadap garis $y = -x$, yaitu

$$x' = -y$$

$$y' = -x$$

Pada $A(-6, 5)$, $x = -6$ dan $y = 5$ maka diperoleh

$$x' = -5$$

$$y' = -(-6) = 6$$

Jadi, bayangan dari titik $A(-6, 5)$ adalah $A'(-5, 6)$.

Pelajarilah contoh soal berikut, agar Anda memahami refleksi beberapa titik yang membentuk bangun datar terhadap garis $y = -x$.

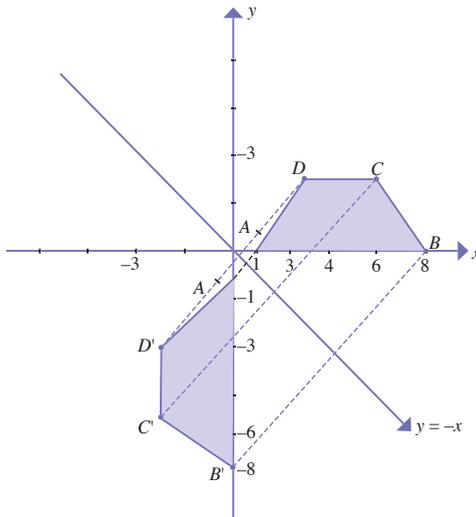
Contoh Soal 5.14

Koordinat-koordinat titik sudut suatu segiempat $ABCD$ adalah $A(1, 0)$, $B(8, 0)$, $C(6, 3)$, dan $D(3, 3)$. Tentukan:

- bayangan dari titik-titik sudut segiempat $ABCD$ jika direfleksikan terhadap garis $y = -x$.
- luas segiempat $ABCD$ tersebut.

Jawab:

- $A(1,0) \rightarrow A'(0, -1)$
Jadi, bayangan dari $A(1, 0)$ adalah $A'(0, -1)$.
 $B(8, 0) \rightarrow B'(0, -8)$
Jadi, bayangan dari $B(8, 0)$ adalah $B'(0, -8)$.
 $C(6,3) \rightarrow C'(-3, -6)$
Jadi, bayangan dari $C(6, 3)$ adalah $C'(-3, -6)$.
 $D(3, 3) \rightarrow D'(-3, -3)$
Jadi, bayangan dari $D(3, 3)$ adalah $D'(-3, -3)$.
- Bidang datar dan bayangan yang terbentuk terlihat pada gambar berikut.



Segiempat yang terbentuk adalah trapesium $ABCD$ dengan panjang $AB = 7$ satuan tinggi $DP = 3$ satuan, dan panjang $DC = 3$ satuan. Oleh karena itu, luas trapesium $ABCD$ adalah

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot (AB + DC)DP &= \frac{1}{2} (7 + 3) \cdot 3 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3 = 15 \text{ satuan}^2. \end{aligned}$$

Seperti refleksi pada garis-garis lain, refleksi pada garis $y = x$ juga dapat dilakukan menggunakan matriks. Persamaan transformasi refleksi pada garis $y = -x$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} x' &= -y \\ y' &= -x \end{aligned}$$

Notes

Matriks refleksi terhadap garis $y = x$ adalah

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Jika persamaan tersebut diuraikan diperoleh

$$x' = 0 \cdot x + (-1) \cdot y$$

$$y' = (-1) \cdot x + 0 \cdot y$$

sehingga diperoleh persamaan matriks berikut.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ disebut matriks refleksi terhadap garis $y = -x$.

Contoh Soal 5.15

Dengan menggunakan matriks refleksi, tentukan bayangan dari titik $A(8, -5)$ yang direfleksikan terhadap garis $y = -x$.

Jawab:

Diketahui $A(8, -5)$ maka $x = 8$ dan $y = -5$.

Oleh persamaan matriks refleksi terhadap garis $y = x$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

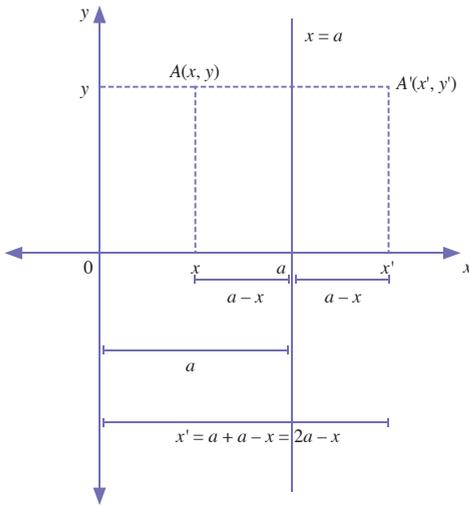
Dengan demikian, diperoleh

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot 8 + (-1) \cdot (-5) \\ (-1) \cdot 8 + 0 \cdot (-5) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Jadi, bayangan dari titik $A(8, -5)$ adalah $A'(5, -8)$.

5. Refleksi terhadap Garis $x = a$

Garis $x = a$ adalah garis yang sejajar sumbu- y dan berjarak a satuan dari sumbu- y , contohnya $x = 2$. Pelajarilah uraian berikut agar Anda memahami refleksi terhadap garis $x = a$.



Gambar 5.18

Titik $A(-3, 1)$ direfleksikan terhadap garis $x = a$ diperoleh $A'(1, -3)$ dengan $x' = 2a - x$ dan $y' = y$

Pada Gambar 5.18, tampak bahwa bayangan dari titik $A(x, y)$ yang direfleksikan terhadap garis $x = a$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} x' &= x + 2(a - x) \\ &= x + 2a - 2x \\ &= 2a - x \end{aligned}$$

$$y' = y$$

sehingga diperoleh $A'(2a - x, y)$.

Secara umum, refleksi terhadap garis $x = a$ dapat didefinisikan sebagai berikut.

Jika $A(x, y)$ direfleksikan terhadap garis $x = a$, maka diperoleh bayangan dari A , yaitu $A'(x', y')$, dengan

$$x' = 2a - x$$

$$y' = y$$

atau dapat ditulis

$$A(x, y) \xrightarrow{x=a} A'(2a - x, y)$$

$x' = 2a - x$ dan $y' = y$ disebut persamaan transformasi refleksi terhadap garis $x = a$.

Contoh Soal 5.16

Koordinat-koordinat titik sudut suatu segitiga ABC adalah $A(4, 0)$, $B(6, 3)$, dan $C(1, 4)$. Tentukan bayangan dari titik-titik tersebut jika direfleksikan terhadap garis $x = -2$.

Jawab:

Diketahui garis $x = a = -2$

Bayangan ditentukan dengan persamaan refleksi garis $x = a$ berikut.

$$x' = 2a - x$$

$$y' = y$$

Pada titik $A(4, 0)$, $x = 4$ dan $y = 0$ diperoleh

$$x' = 2a - x = 2 \cdot (-2) - 4 = -8$$

$$y' = y = 0$$

Jadi, bayangan dari $A(4, 0)$ adalah $A'(-8, 0)$

Pada titik $B(6, 3)$, $x = 6$ dan $y = 3$, diperoleh

$$x' = 2a - x = 2 \cdot (-2) - 6 = -10$$

$$y' = y = 3$$

Jadi, bayangan dari $B(6, 3)$ adalah $B'(-10, 3)$

Pada titik $C(1, 4)$, $x = 1$ dan $y = 4$, diperoleh

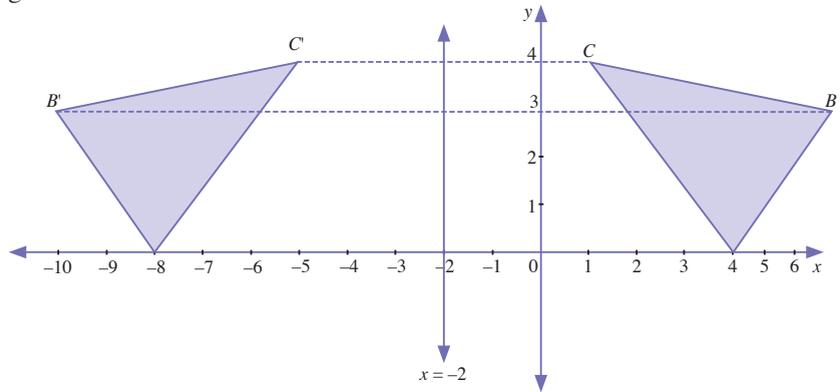
$$x' = 2a - x = 2 \cdot (-2) - 1 = -5$$

$$y' = y = 4$$

Jadi, bayangan dari $C(1, 4)$ adalah $C'(-5, 4)$.

Segitiga ABC dan bayangan A', B', C' yang terbentuk tampak seperti gambar berikut.

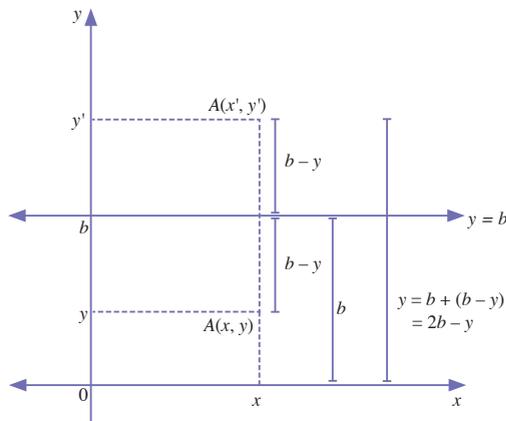
Gambar 5.19
Segitiga ABC direfleksikan terhadap garis $x = 2$ diperoleh $A'B'C'$.



6. Refleksi terhadap Garis $y = b$

Adapun, garis $y = b$ adalah garis yang sejajar sumbu- x dan berjarak b satuan dari sumbu- x . Perhatikan Gambar 5.20 berikut.

Gambar 5.20
Refleksi titik $A(x, y)$ terhadap garis $y = b$ diperoleh $A'(x', y')$ dengan $x' = x$ dan $y' = 2b - y$



Pada gambar tersebut, tampak bahwa bayangan dari titik $A(x, y)$ yang direfleksikan terhadap garis $y = b$ memenuhi

persamaan berikut.

$$x' = x$$

$$\begin{aligned}y' &= y + 2(b - y) \\ &= y + 2b - 2y \\ &= 2b - y\end{aligned}$$

sehingga diperoleh $A'(x, 2b - y)$

Secara umum, refleksi terhadap garis $y = b$ dapat didefinisikan sebagai berikut.

Jika $A(x, y)$ direfleksikan terhadap garis $y = b$ maka diperoleh bayangan dari A , yaitu $A'(x', y')$, dengan

$$x' = x$$

$$y' = 2b - y$$

atau dapat ditulis

$$A(x, y) \xrightarrow{[O, k]} A'(x, 2b - y)$$

$x' = x$ dan $y' = 2b - y$ disebut persamaan refleksi terhadap garis $y = b$

Contoh Soal 5.17

Koordinat-koordinat titik sudut suatu segiempat $ABCD$ adalah $A(3, -1)$, $B(5, 1)$, $C(3, 3)$, dan $D(1, 1)$. Tentukan bayangan dari titik-titik tersebut jika direfleksikan terhadap garis $y = 3$.

Jawab:

Diketahui garis $y = b = 3$

Bayangan ditentukan dengan persamaan refleksi terhadap garis $y = b$ berikut.

$$x' = x$$

$$y' = 2b - y$$

Pada titik $A(3, -1)$, $x = 3$ dan $y = -1$, diperoleh

$$x' = x = 3$$

$$y' = 2b - y = 2 \cdot 3 - (-1) = 7$$

Jadi, bayangan dari $A(3, -1)$ adalah $A'(3, 7)$

Pada titik $B(5, 1)$, $x = 5$ dan $y = 1$ diperoleh

$$x' = x = 5$$

$$y' = 2b - y = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

Jadi, bayangan dari $B(5, 1)$ adalah $B'(5, 5)$

Pada titik $C(3, 3)$, $x = 3$ dan $y = 3$ diperoleh

$$x' = x = 3$$

$$y' = 2b - y = 2 \cdot 3 - 3 = 3$$

Jadi, bayangan dari $C(3, 3)$ adalah $C'(3, 3)$

Pada titik $D(1, 1)$, $x = 1$ dan $y = 1$, diperoleh

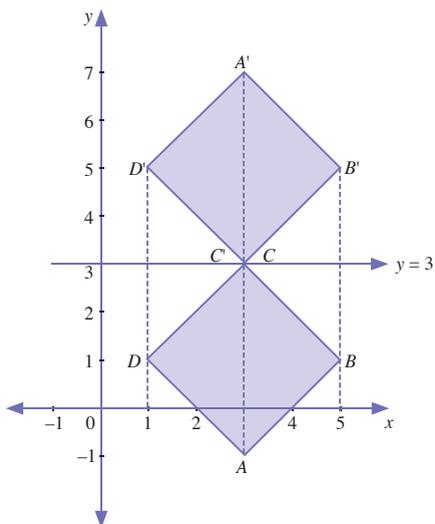
$$x' = x = 1$$

$$y' = 2b - y = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

Jadi, bayangan dari $D(1, 1)$ adalah $D'(1, 5)$.

Segiempat $ABCD$ dan bayangannya $A'B'C'D'$ yang terbentuk tampak pada gambar berikut.

Gambar 5.21
Refleksi segiempat $ABCD$ terhadap garis $y = 3$.



Evaluasi Materi 5.2

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

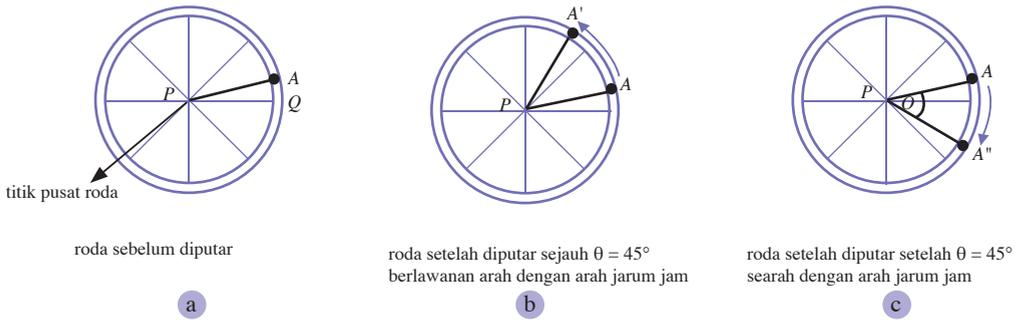
- Tentukan bayangan dari titik $P(2, 5)$ dan $Q(-4, 7)$ yang direfleksikan terhadap
 - sumbu- x
 - sumbu- y
- Tentukan bayangan dari titik $A(5, -3)$ dan $B(-6, 2)$ yang direfleksikan terhadap
 - garis $y = x$
 - garis $y = -x$
- Tentukan bayangan dari titik $S(2, 6)$ dan $T(-1, 5)$ yang direfleksikan terhadap
 - garis $x = -4$
 - garis $y = 3$
- Diketahui koordinat-koordinat titik sudut segiempat $ABCD$ adalah $A(0, 1)$, $B(6, 1)$, $C(8, 5)$, dan $D(2, 5)$
 - Tentukan bayangan dari titik-titik sudut tersebut jika titik tersebut direfleksikan terhadap sumbu- y .
 - Gambarkan segiempat tersebut dan bayangannya pada bidang koordinat Cartesius. (gunakan kertas berpetak)
 - Tentukan luas segiempat $ABCD$.

C Rotasi

Kata Kunci

- rotasi
- pusat rotasi
- sudut rotasi

Rotasi (perputaran) adalah suatu transformasi yang memindahkan suatu titik pada bangun geometri dengan memutar titik tersebut terhadap titik pusatnya. Untuk mudahnya, bayangkan suatu rotasi pada sebuah roda. Jika pada roda tersebut terdapat titik A , posisi titik A akan berpindah ketika roda tersebut diputar atau dirotasikan terhadap titik pusat roda tersebut. Artinya, titik A berpindah akibat putaran roda. Perhatikan gambar berikut.



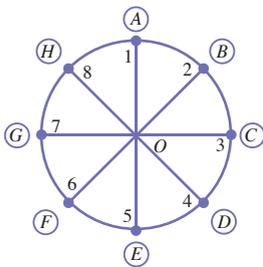
Gambar 5.22

Posisi A dan bayangan A' setelah berotasi

Gambar 5.22 (a) dan (b) menunjukkan suatu rotasi pada titik A pada roda terhadap pusat roda P . Arah rotasi dapat berlawanan dengan arah putaran jarum jam atau searah dengan arah putaran jarum jam. Jika arah rotasi berlawanan dengan arah jarum jam maka dinamakan arah positif (+). Jika arah rotasi searah dengan arah jarum jam maka dinamakan arah negatif (-). Besar sudut rotasi θ adalah sudut yang terbentuk dari besarnya rotasi yang terjadi. Suatu rotasi R , terhadap pusat rotasi P dan sudut rotasi θ dinotasikan dengan $R [P, \theta]$.

Contoh Soal 5.18

Untuk membahas hasil pemasaran suatu produk selama 1 tahun yang dilakukan oleh 7 kantor cabang maka diadakan rapat yang dilakukan menggunakan meja bundar seperti gambar.

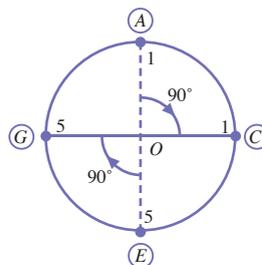


Jika kursi A ditempati oleh direktur pemasaran kantor pusat, kemudian kursi B, C, D, E, F, G, dan H ditempati oleh direktur pemasaran kantor cabang daerah B, C, D, E, F, G, dan H. Selanjutnya, jika meja tersebut diputar (dirotasikan) dengan rotasi, $R = [O, -90^\circ]$ tentukanlah pasangan nomor pada meja dengan huruf pada kursi yang terjadi sebagai hasil rotasi.

Jawab:

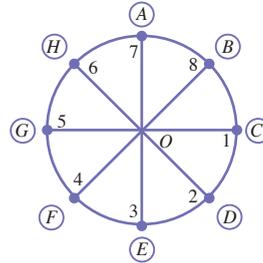
Rotasi yang dinyatakan oleh $R = [O, -90^\circ]$ berarti rotasi terhadap titik O sebesar 90° searah putaran jarum jam, perhatikan gambar berikut.

Setelah meja diputar sejauh 90° searah jarum jam maka seluruh titik berputar bersama meja, pada ilustrasi di samping, diperlihatkan titik 1 yang mula-mula berpasangan dengan kursi A berputar sejauh 90° dan menyebabkan titik 1 berpasangan dengan kursi C, demikian juga titik 5 yang mula-mula berpasangan



dengan kursi E berputar sejauh 900 dan menyebabkan titik 5 berpasangan dengan kursi G

Setelah meja diputar sejauh 900, maka pasangan titik 1,2,3,4,5,6,7, dan 8 pada meja terhadap kursi A, B, C, D, E, F,G, dan H adalah sebagai berikut.

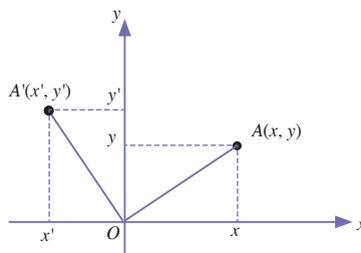


Diperoleh, titik 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, dan 8 masing-masing berpasangan dengan kursi C, D, E, F, G, H, A, dan B.

1. Rotasi terhadap Titik Pusat $O(0, 0)$

Misalkan titik A pada roda dipindahkan pada bidang koordinat cartesius, maka koordinat titik A adalah (x, y) . Jika titik $A(x, y)$ dirotasikan terhadap titik pusat $O(0, 0)$ sejauh θ dan bayangan yang dihasilkan adalah $A'(x', y')$, dapatkan Anda tentukan koordinat (x', y') ? Perhatikanlah Gambar 5.23 berikut.

Gambar 5.23
Titik $A(x, y)$ dirotasikan terhadap titik pusat $O(0, 0)$ sejauh θ berlawanan arah putaran jarumjam.



Terdapat hubungan antara x' dan y' dengan x dan y dan sudut putaran θ , yaitu

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$

Jika titik $A(x, y)$ dirotasikan terhadap titik pusat $O(0, 0)$ sejauh θ atau dinotasikan $R [O, \theta]$ maka bayangan dari titik A adalah $A'(x', y')$, di mana

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta \text{ dan } y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$

atau ditulis

$$A(x, y) \rightarrow A' (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

Persamaan $x' = x \cos \theta - y \sin \theta$ dan $y' = x \sin \theta + y \cos \theta$ disebut persamaan transformasi rotasi terhadap titik pusat $O(0, 0)$ sejauh θ atau $R [O, \theta]$.

Contoh Soal 5.19

Tentukan bayangan dari titik $P(2, 1)$ jika dirotasikan terhadap:

- a. $R [0, 30^\circ]$ b. $R [0, -30^\circ]$

Jawab:

Titik $P(2, 1)$ maka $x = 2$ dan $y = 1$.

$$\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \cos(-30^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \sin(-30^\circ) = -\frac{1}{2}$$

Bayangan titik P ditentukan dengan menggunakan persamaan transformasi $R [O, \theta]$

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$

- a. $R [0, 30^\circ]$ diperoleh

$$x' = 2 \cos 30^\circ - \sin 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$$

$$y' = 2 \sin 30^\circ + \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Jadi, bayangan dari titik $P(2, 1)$ yang dirotasikan sejauh 30° terhadap titik pusat $O(0, 0)$ adalah $P' \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} \right)$

- b. $R [0, -30^\circ]$ diperoleh

$$x' = 2 \cos(-30^\circ) - \sin(-30^\circ) = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \left(-\frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + \frac{1}{2}$$

$$y' = 2 \sin(-30^\circ) + \cos(-30^\circ) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}\sqrt{3} = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Jadi, bayangan dari titik $P(2, 1)$ jika dirotasikan sejauh -30° terhadap titik pusat $O(0, 0)$ adalah $P' \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}, -1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} \right)$.

Rotasi terhadap titik pusat $O(0, 0)$ dapat pula dinyatakan dalam bentuk matriks. Perhatikan kembali persamaan transformasi rotasi berikut.

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$



Sumber : ndonetwork.co.id

Gambar 5.24

Ayunan adalah contoh transformasi rotasi.

Notes

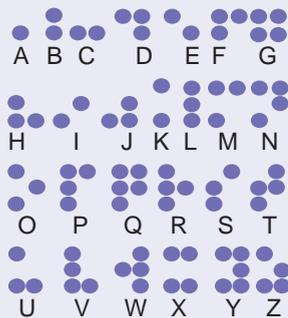
Matriks rotasi terhadap pusat $O(0, 0)$ adalah

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$



Sumber: www.accesslinx.com

Huruf Braille digunakan oleh para tuna netra untuk membaca. Huruf Braille berupa kode titik 3 yang timbul dan dapat dibaca dengan menyentuhnya. Kode ini digunakan pertama kali oleh siswa tuna netra berusia 15 tahun asal Prancis, yaitu Louise Braille.



Perhatikan oleh Anda, huruf Braille pada gambar. Huruf E merupakan refleksi dari huruf I. Huruf D merupakan rotasi dari huruf H. Dapatkah Anda menemukan pasangan huruf-huruf lain hasil refleksi dan rotasi pada huruf Braille?

Sumber: *Kalkulus dan Geometri Analisis Jilid 1*, 1990

Jika persamaan tersebut diuraikan, diperoleh

$$x' = \cos \theta \cdot x - \sin \theta \cdot y$$

$$y' = \sin \theta \cdot x + \cos \theta \cdot y$$

maka diperoleh persamaan matriks sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ disebut matriks rotasi terhadap titik pusat $O(0, 0)$.

Contoh Soal 5.20

Dengan menggunakan matriks rotasi, tentukan bayangan dari titik $P(5, 5)$ yang dirotasikan terhadap titik pusat $O(0, 0)$ sejauh 90° .

Jawab:

Diketahui $P(5, 5)$, maka $x = 5$ dan $y = 5$.

$\cos 90^\circ = 0$ dan $\sin 90^\circ = 1$.

maka diperoleh

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Jadi, bayangan dari titik $P(5, 5)$ adalah $P'(-5, 5)$.

2. Rotasi terhadap Titik Pusat $P(a, b)$

Jika titik $P(x, y)$ dirotasikan terhadap titik pusat $P(a, b)$ sejauh θ , maka bayangan dari titik A adalah $A'(x', y')$, dengan

$$x' = a + (x - a)\cos \theta - (y - b)\sin \theta$$

$$y' = b + (x - a)\sin \theta + (y - b)\cos \theta$$

Persamaan tersebut merupakan persamaan transformasi rotasi terhadap titik pusat (a, b) sejauh θ pelajarilah contoh soal berikut.

Contoh Soal 5.21

Tentukan bayangan dari titik $P(3, 3)$ yang dirotasikan terhadap titik pusat $M(1, 1)$ sejauh 90° .

Jawab:

Diketahui $P(3, 3)$ maka $x = 3$ dan $y = 3$.

Titik pusat $M(1, 1)$ maka $a = 1$ dan $b = 1$.

$\cos 90^\circ = 0$ dan $\sin 90^\circ = 1$.

Bayangan ditentukan dengan menggunakan persamaan

$$x' = a + (x - a) \cos \theta - (y - b) \sin \theta$$

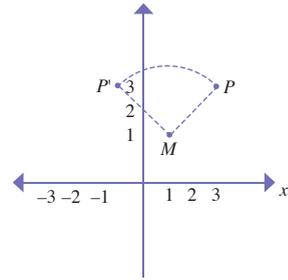
$$y' = b + (x - a) \sin \theta + (y - b) \cos \theta$$

maka diperoleh

$$x' = 1 + (3 - 1) \cos 90^\circ - (3 - 1) \sin 90^\circ = 1 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -1$$

$$y' = 1 + (3 - 1) \sin 90^\circ + (3 - 1) \cos 90^\circ = 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 3$$

Jadi, bayangan titik $P(3, 3)$ adalah $P'(-1, 3)$.



Gambar 5.25

Titik $P(3, 3)$ dirotasikan sejauh 90° terhadap pusat $M(1, 1)$

Evaluasi Materi 5.3

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

- Titik $A(3, 4)$ dirotasikan sejauh 90° terhadap titik pusat $O(0, 0)$, tentukan bayangannya jika arah putarannya
 - berlawanan dengan arah putaran jarum jam,
 - searah dengan arah putaran jarum jam ($\sin 90^\circ = 1, \cos 90^\circ = 0, \sin(-90^\circ) = -1, \cos(-90^\circ) = 0$).
- Tentukan bayangan dari titik $P(4, 4)$ jika dirotasikan terhadap titik pusat $O(0, 0)$ sejauh

a. 30°	c. 60°
b. 45°	d. 90°

$$\left(\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \cos 30^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3}, \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2}, \cos 45^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2}, \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \right).$$

- Diketahui koordinat-koordinat titik sudut segitiga ABC adalah $A(5, -2)$, $B(8, 1)$, dan $C(4, 3)$. Tentukan bayangan dari titik-titik sudut segitiga tersebut jika dirotasikan terhadap titik pusat $O(0, 0)$ sejauh 90° searah dengan arah putaran jarum jam.
- Tentukan bayangan dari titik $P(-4, 3)$ yang dirotasikan terhadap titik pusat $M(-1, -1)$ sejauh 90° .

Kata Kunci

- dilatasi
- pusat dilatasi
- faktor dilatasi

D Dilatasi

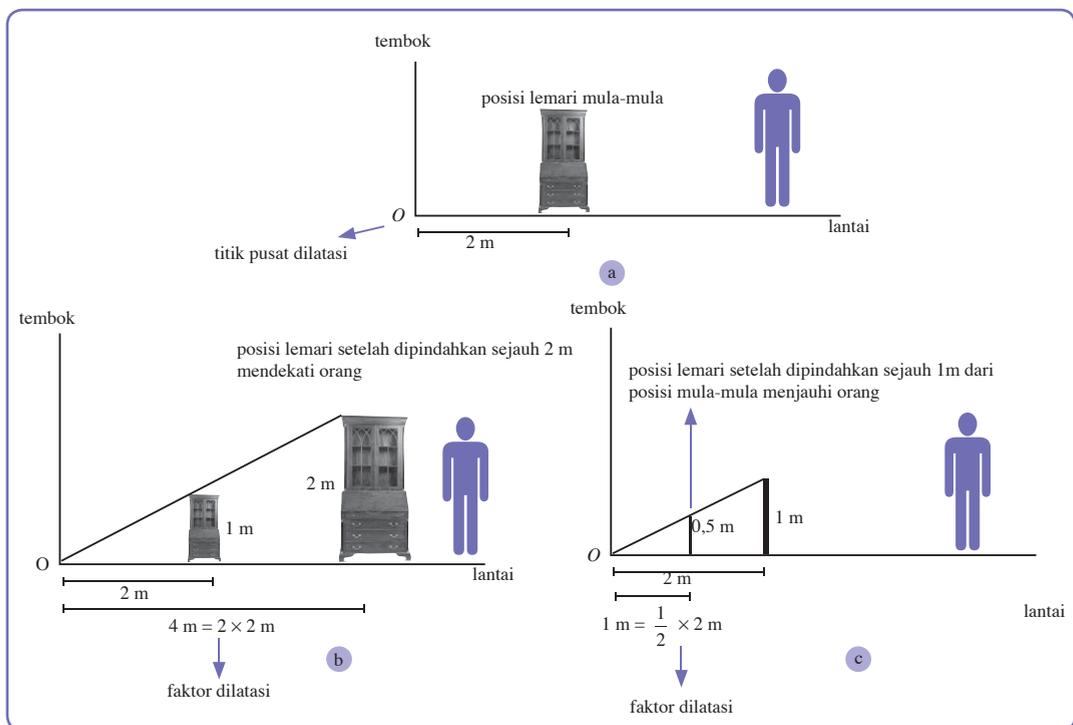
Anda telah mempelajari tiga jenis transformasi, yaitu translasi, refleksi, dan rotasi. Ketiga jenis transformasi ini termasuk transformasi isometri, yaitu transformasi yang menghasilkan bayangan kongruen (sama ukuran dan sebangun) dengan benda.

Sekarang, Anda akan mempelajari transformasi keempat, yaitu dilatasi yang mengubah ukuran (memperbesar atau memperkecil) tetapi tidak mengubah bentuk. Dilatasi tidak termasuk transformasi isometri karena tidak menghasilkan bayangan yang kongruen.

Dilatasi (perkalian) adalah suatu transformasi yang memindahkan suatu titik pada bangun geometri yang bergantung pada titik pusat dilatasi dan faktor (skala) dilatasi. Akibatnya, bayangan dari bangun geometri yang didilatasi berubah ukurannya (membesar atau mengecil). Untuk mudahnya, bayangkan bangun yang didilatasi adalah mobil yang sedang melaju ke arah Anda. Dari jauh mobil tampak kecil. Ketika mendekat mobil tampak semakin besar, dan ketika menjauh mobil tampak mengecil kembali. Dilatasi dapat pula dianalogikan dengan mendekatkan suatu objek atau menjauhkan suatu objek dari Anda. Perhatikan Gambar 5.26 berikut.

Gambar 5.26

Ilustrasi dilatasi pada perpindahan lemari



Pada gambar (a), posisi lemari sebelum dipindahkan adalah 2 m dari titik pusat dilatasi O , yaitu perpotongan antara tembok dengan lantai. Tinggi lemari mula-mula (menurut orang yang sedang berdiri) adalah 1m.

Pada gambar (b), lemari dipindahkan ke arah orang yang sedang berdiri sejauh 2m. Jarak lemari dengan titik pusat dilatasi menjadi 4m atau 2 kali posisi mula-mula. Lemari tampak membesar. Tinggi lemari menjadi 2m atau $2 \times$ tinggi mula-mula.

$$4 \text{ m} = 2 \times 2 \text{ m}$$



faktor dilatasi

$$2 \text{ m} = 2 \times 1 \text{ m}$$



faktor dilatasi

Dengan demikian lemari dikatakan mengalami dilatasi dengan titik pusat O dan faktor dilatasi 2.

Begitu juga ketika lemari dipindahkan ke arah kiri sejauh 1 m dari posisi awalnya. Jarak lemari dengan titik pusat dilatasi menjadi 1 m atau $\frac{1}{2} \times$ posisi mula-mula. Lemari tampak mengecil. Tinggi lemari menjadi 0,5 m atau $\frac{1}{2} \times$ tinggi mula-mula.

$$1 \text{ m} = \frac{1}{2} \times 2 \text{ m}$$



faktor dilatasi

$$0,75 \text{ m} = \frac{1}{2} \times 1 \text{ m}$$



faktor dilatasi

Jadi, lemari mengalami dilatasi dengan titik pusat O dan faktor skala dilatasi $\frac{1}{2}$ atau ditulis $\left[O, \frac{1}{2} \right]$.

Apa yang dimaksud dengan faktor dilatasi? Faktor dilatasi adalah perbandingan antara jarak bayangan dari pusat dilatasi dengan jarak titik mula-mula dari titik pusat dilatasi.

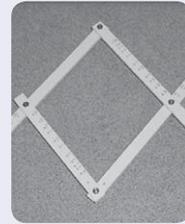
$$\text{faktor dilatasi} \leftarrow 2 = \frac{4\text{m}}{2\text{m}} \rightarrow \begin{array}{l} \text{jarak lemari dari titik } O \text{ setelah dipindahkan} \\ \text{jarak lemari dari titik } O \text{ mula-mula} \end{array}$$

$$\text{faktor dilatasi} \leftarrow \frac{1}{2} = \frac{1\text{m}}{2\text{m}} \rightarrow \begin{array}{l} \text{jarak lemari dari titik } O \text{ setelah dipindahkan} \\ \text{jarak lemari dari titik } O \text{ mula-mula} \end{array}$$

Misalkan k adalah faktor dilatasi maka berlaku hubungan berikut.

- Jika $k > 1$ maka bangun bayangan *diperbesar* dan terletak *sepihak* terhadap pusat dilatasi dan bangun semula.
- Jika $0 < k < 1$ maka bangun bayangan *diperkecil* dan terletak *sepihak* terhadap pusat dilatasi dan bangun semula.

Jelajah Matematika



Sumber: www.marquetry.org

Beberapa seniman, dalam melukis miniatur bisanya menggunakan Pantograf untuk memberikan rincian yang lebih besar. Pantograf tersebut tersusun atas jajargenjang-jajargenjang yang disambung menyambung. Pada pantograf terdapat suatu titik, yang menentukan apakah gambar akan diperbesar atau diperkecil (dilatasi), atau bahkan dapat dirotasikan.

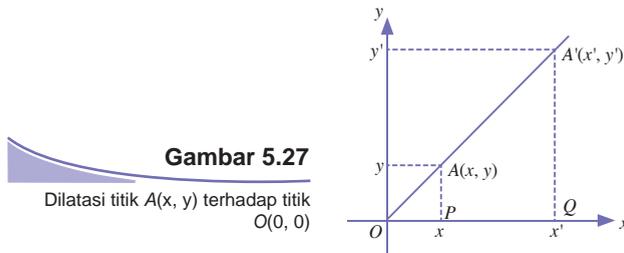
- Jika $-1 < k < 0$ maka bangun bayangan *diperkecil* dan terletak *berlawanan* terhadap pusat dilatasi dan bangun semula.
- Jika $k < -1$ maka bangun bayangan *diperbesar* dan terletak *berlawanan* terhadap pusat dilatasi dan bangun semula.

1. Dilatasi terhadap Titik Pusat $O(0,0)$

Telah Anda ketahui, bahwa faktor dilatasi adalah perbandingan antara jarak bayangan dari pusat dilatasi dengan titik mula-mula dari pusat dilatasi. Misalkan k adalah faktor dilatasi, $A(x, y)$ adalah titik yang didilatasi, dan $A'(x', y')$ adalah bayangan dari A . Jika pusat dilatasi adalah $O(0, 0)$, maka faktor dilatasi k adalah sebagai berikut.

$$k = \frac{OA'}{OA}$$

Perhatikan Gambar 5.27 berikut.



Gambar 5.27

Dilatasi titik $A(x, y)$ terhadap titik $O(0, 0)$

Pada Gambar 5.27, tampak segitiga APO dan segitiga $A'QO$ sebangun. Oleh karena $k = \frac{OA'}{OA}$ kemudian segitiga APO dan $A'QO$ sebangun maka berlaku

$$\frac{OQ}{OP} = k \text{ atau } \frac{x'}{x} = k \text{ atau } x' = kx$$

$$\frac{AQ}{AP} = k \text{ atau } \frac{y'}{y} = k \text{ atau } y' = ky$$

Jadi, diperoleh bayangan dari $A(x, y)$ adalah $A'(kx, ky)$

Dengan demikian, uraian tersebut memperjelas definisi dilatasi berikut.

Jika titik $A(x, y)$ didilatasi terhadap titik pusat $O(0, 0)$ dengan faktor dilatasi k , maka bayangan dari A adalah $A'(x', y')$ dengan

$$x' = kx$$

$$y' = ky$$

ditulis

$$A(x, y) \xrightarrow{[O, k]} A'(kx, ky)$$

Persamaan $x' = kx$ dan $y' = ky$ disebut persamaan transformasi dilatasi terhadap titik pusat $O(0, 0)$ dengan faktor dilatasi k .

Contoh Soal 5.22

Diketahui segitiga ABC dengan koordinat-koordinat titik-titik sudutnya adalah $A(-3, -3)$, $B(-1, -3)$, dan $C(-2, -1)$. Tentukan:

- bayangan dari titik-titik sudutnya jika dilatasi terhadap titik pusat $O(0, 0)$ dengan faktor dilatasi -2 .
- luas dari bayangan bangun ABC .

Jawab:

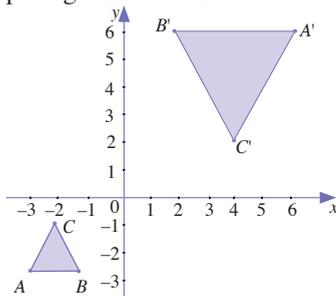
- Diketahui faktor dilatasi $= k = -2$.

$$A(-3, -3) \xrightarrow{|0, -2|} A' (-2 \cdot (-3), -2(-3)) = A' (6, 6)$$

$$B(-1, -3) \xrightarrow{|0, -2|} B' (-2 \cdot (-1), -2(-3)) = B' (2, 6)$$

$$C(-2, -1) \xrightarrow{|0, -2|} C' (-2 \cdot (-2), -2(-1)) = C' (4, 2)$$

- Gambar segitiga ABC dan bayangannya segitiga $A'B'C'$ terlihat pada gambar berikut.



Gambar 5.28

Dilatasi segitiga ABC oleh faktor dilatasi -2 terhadap pusat $O(0, 0)$ segitiga $A'B'C'$ diperbesar dan berlawanan arah dengan segitiga ABC .

Pada segitiga $A'B'C'$, panjang $A'B' = 6 - 2 = 4$ satuan, dan panjang $CP = 4$ satuan.

$$\text{Luas segitiga } A'B' = \frac{1}{2} A' B' C' \times CP = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8 \text{ satuan.}$$

Sama seperti transformasi sebelumnya, dilatasi juga dapat dilakukan dengan perkalian dua matriks.

Perhatikan kembali persamaan dilatasi terhadap titik pusat $O(0, 0)$ berikut.

$$x' = kx$$

$$y' = ky$$

Jika persamaan tersebut diuraikan, diperoleh

$$x' = k \cdot x + 0 \cdot y$$

$$y' = 0 \cdot x + k \cdot y$$

Notes

Matriks dilatasi adalah

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

dengan k adalah faktor dilatasi

Maka diperoleh persamaan matriks sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ disebut matriks dilatasi terhadap titik pusat $O(0, 0)$.

Contoh Soal 5.23

Dengan menggunakan matriks, tentukan bayangan dari titik $A(-5, -3)$ yang dilatasi terhadap titik pusat $O(0, 0)$ dengan faktor dilatasi 3.

Jawab:

Diketahui $A(-5, -3)$ atau $x = -5$ dan $y = -3$ dan $k = 3$.

Bayangan ditentukan dengan persamaan matriks berikut.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

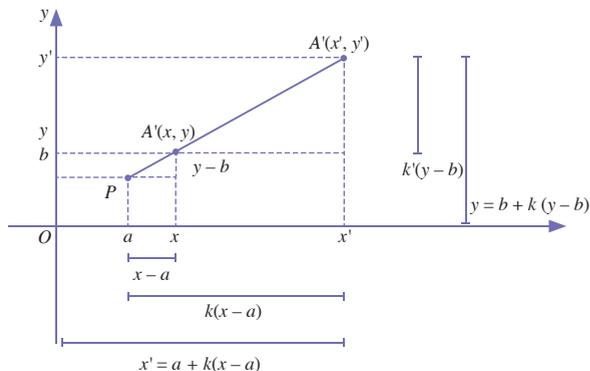
maka diperoleh

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot (-5) + 0 \cdot (-3) \\ 0 \cdot (-5) + 3 \cdot (-3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -15 \\ -9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Jadi, bayangan dari titik $A(-5, -3)$ adalah $A'(-15, -9)$.

2. Dilatasi terhadap Titik Pusat $P(a, b)$

Sebelumnya, Anda telah belajar dilatasi terhadap titik pusat $O(0, 0)$. Sekarang, Anda pelajari dilatasi terhadap titik pusat $P(a, b)$. Perhatikanlah gambar berikut.



Gambar 5.29

Titik $A(x, y)$ didilatasi oleh faktor dilatasi k terhadap titik pusat $P(a, b)$

Secara umum, definisi dilatasi terhadap titik pusat $P(a, b)$ dengan faktor skala k adalah sebagai berikut.

Jika titik $A(x, y)$ didilatasikan terhadap titik pusat $P(a, b)$ dengan faktor dilatasi k maka bayangan titik A adalah $A'(x', y')$ dengan

$$x' = a + k(x - a)$$

$$y' = b + k(y - b)$$

ditulis

$$A(x, y) \xrightarrow{[P, k]} A'(a + k(x - a), b + k(y - b))$$

$x' = a + k(x - a)$ dan $y' = b + k(y - b)$ disebut persamaan dilatasi terhadap titik pusat $P(a, b)$.

Contoh Soal 5.24

Gambarlah bayangan segitiga ABC dengan titik-titik sudutnya $A(5, 0)$, $B(6, 2)$, dan $C(3, 3)$ yang didilatasi terhadap titik pusat dilatasi $P(1, 1)$ dengan faktor dilatasi -2 .

Jawab:

Pertama tentukan terlebih dahulu bayangan dari titik-titik sudutnya.

Diketahui titik pusat dilatasi adalah $P(1, 1)$ maka $a = 1$ dan $b = 1$.

Faktor dilatasi $= k = -2$.

Bayangan ditentukan dengan menggunakan persamaan dilatasi terhadap titik pusat $P(a, b)$

$$x' = a + k(x - a)$$

$$y' = b + k(y - b)$$

Untuk $A(5, 0)$ maka $x = 5$ dan $y = 0$.

$$x' = 1 + (-2)(5 - 1) = 1 + (-8) = -7$$

$$y' = 1 + (-2)(0 - 1) = 1 + 2 = 3$$

Jadi, bayangan dari $A(5, 0)$ adalah $A'(-7, 3)$.

Untuk $B(6, 2)$ maka $x = 6$ dan $y = 2$.

$$x' = 1 + (-2)(6 - 1) = 1 + (-10) = -9$$

$$y' = 1 + (-2)(2 - 1) = 1 + (-2) = -1$$

Jadi, bayangan dari $B(6, 2)$ adalah $B'(-9, -1)$.

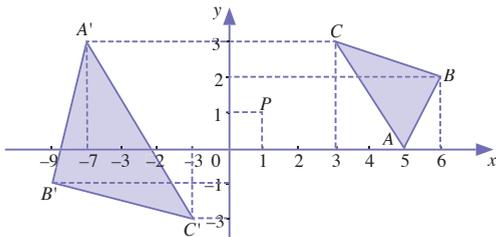
Untuk $C(3, 3)$ maka $x = 3$ dan $y = 3$.

$$x' = 1 + (-2)(3 - 1) = 1 + (-4) = -3$$

$$y' = 1 + (-2)(3 - 1) = 1 + (-4) = -3$$

Jadi, bayangan dari $C(3, 3)$ adalah $C'(-3, -3)$.

Bayangan datar yang terbentuk adalah sebagai berikut.

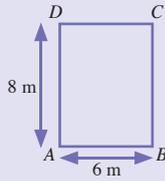


Gambar 5.30

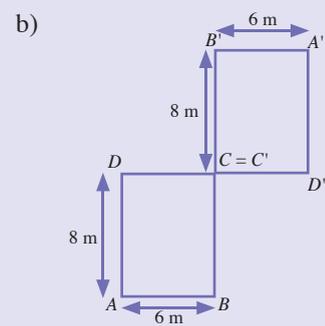
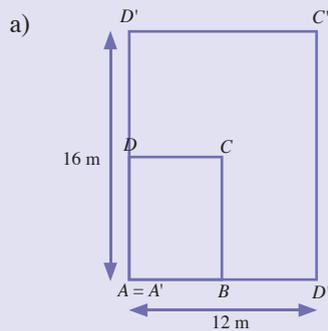
Segitiga ABC dilatasi oleh faktor dilatasi $k = 2$ terhadap pusat $P(1, 1)$

Tugas Siswa 4.2

Sebuah perusahaan memiliki gudang yang memiliki ukuran panjang dan lebar sebagai berikut.



Jika gudang tersebut direnovasi bentuk atau posisinya menjadi persegi panjang $A'B'C'D'$ seperti yang terlihat pada point a), b), dan c) berikut, maka tentukanlah titik pusat dilatasi dan faktor dilatasinya.



Evaluasi Materi 5.4

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

- Tentukan bayangan titik $A(4, 5)$ jika A dilatasi oleh:
 - $(0, 2)$
 - $(0, -1)$
 - $(0, \frac{1}{2})$
 - $(0, -3)$
- Diketahui titik-titik sudut segitiga ABC adalah $A(2, 1)$, $B(4, 1)$, dan $C(3, 3)$.
 - Tentukan bayangan dari titik-titik sudut segitiga ABC jika dilatasi oleh $(0, -3)$
 - Gambarkan segitiga ABC dan bayangannya pada kertas berpetak.
- Jika $P'(8, 4)$ adalah bayangan dari $P(2, 1)$ yang dilatasi oleh $(0, k)$, tentukan nilai k .
- Titik $Q(5, 7)$ dilatasi terhadap titik pusat $P(3, 3)$ dengan faktor dilatasi -3 . Tentukan:
 - bayangan dari titik Q ,
 - gambaran titik Q dan bayangannya pada kertas berpetak,

E Komposisi Transformasi

Pada subbab-subbab sebelumnya, Anda telah mempelajari transformasi-transformasi tunggal. Pada subbab ini, Anda akan mempelajari komposisi transformasi, yaitu transformasi yang dikerjakan dua kali atau lebih secara berurutan.

Transformasi T_1 yang dilanjutkan dengan transformasi T_2 terhadap suatu titik A dapat ditulis $(T_2 \circ T_1)(A) \rightarrow (T_2(A))$. Lambang $T_2 \circ T_1$ (dibaca T_2 dot T_1) menyatakan transformasi T_1 dikerjakan dahulu, kemudian dilanjutkan dengan transformasi T_2 . Sebaiknya $T_2 \circ T_1$ menyatakan transformasi T_2 dikerjakan terlebih dahulu, kemudian dilanjutkan dengan T_1 .

Untuk lebih jelasnya, pelajilah Contoh Soal 5.25 berikut.

Contoh Soal 5.25

Jika T_1 adalah translasi terhadap $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, T_2 adalah refleksi terhadap sumbu- x , dan T_3 adalah rotasi terhadap pusat $O(0, 0)$ sejauh 90° searah jarum jam. Tentukan bayangan titik $A(-4, 3)$ oleh transformasi berikut.

- a. $T_2 \circ T_1$ b. $T_1 \circ T_3$

Jawab:

- a. $T_2 \circ T_1(A)$ artinya titik A ditranslasikan terhadap $T_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

kemudian dilanjutkan oleh T_2 , yaitu refleksi terhadap sumbu $-x$.

$$A(x, y) \xrightarrow{T_1} A'(x + a, y + b)$$

$$A'(x + a, y + b) \xrightarrow{T_2} A''(x + a, -(y + b))$$

$$A(-4, 3) \text{ maka } x = -4, y = 3, a = 1, \text{ dan } b = 2$$

Diperoleh,

$$A(-4, 3) \text{ maka } x = -4, y = 3, a = 1, \text{ dan } b = 2$$

Jadi, bayangan titik $A(-4, 3)$ oleh $T_2 \circ T_1$ adalah $A''(-3, 5)$.

- b. $T_1 \circ T_3(A)$ artinya titik A ditransformasi oleh T_3 , yaitu dirotasikan oleh $R(0, -90^\circ)$, kemudian dilanjutkan oleh transformasi oleh

$$T_1, \text{ yaitu translasi terhadap } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\cos(-90^\circ) = 0 \text{ dan } \sin(-90^\circ) = 1$$

$$A(x, y) \xrightarrow{T_3} A'(x \cdot 0 - y(-1), x(-1) + y \cdot 0)$$

$$A'(y, -x) \xrightarrow{T_1} A'(y + a, -x + b)$$

$$A(-4, 3) \text{ maka } x = -4, y = 3, a = 1 \text{ dan } b = 2$$

Diperoleh

$$A(-4, 3) \xrightarrow{T_1 \circ T_3} A''(3 + 1, -(-4) + 2)$$

Jadi, bayangan titik $A(-4, 3)$ oleh komposisi $T_1 \circ T_3$ adalah $A''(4, 6)$

Kata Kunci

- komposisi

Solusi Cerdas

Bayangan titik A(4, 1) oleh pencerminan terhadap garis $x = 2$ dilanjutkan pencerminan terhadap garis $x = 5$ adalah

- $A''(8, 5)$
- $A''(10, 1)$
- $A''(8, 1)$
- $A''(4, 5)$
- $A''(20, 2)$

Jawab

$$A(x, y) \rightarrow A''(2(n - m) + x, y)$$

$$A(4, 1) \rightarrow A''(2(5 - 2) + 4, 1)$$

Jadi, bayangan titik A adalah A'' adalah $A''(10, 1)$

Jawaban: **b**
UN SMK, 2004

Selain dengan cara seperti pada contoh soal 5.26 komposisi transformasi juga dapat dilakukan dengan menggunakan perkalian matriks yang sesuai dengan transformasi yang ditanyakan. Sebelumnya lakukanlah kegiatan berikut.

Kegiatan Siswa

Menemukan Hubungan antara Komposisi Transformasi $T_2 \circ T_1$ atau $T_1 \circ T_2$ dan Matriks Transformasi M_1 dan M_2 .

Langkah Kerja:

- Misalkan sebuah titik sembarang (x, y) akan ditransformasikan oleh transformasi T_1 dahulu kemudian dilanjutkan dengan transformasi T_2 . Misalkan, matriks transformasi T_1 dan T_2 yaitu M_1 dan M_2 memiliki bentuk umum

$$M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ dan}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

- Tentukan hasil transformasi (x, y) oleh T_1 .

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots + \dots \\ \dots + \dots \end{pmatrix}$$

Kemudian, lanjutkan dengan transformasi T_2 .

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots + \dots \\ \dots + \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \dots(*)$$

Dalam persamaan (*). Anda telah memperoleh matriks komposisi transformasi dari $(T_2 \circ T_1)$, yaitu

$$(T_2 \circ T_1) = \begin{pmatrix} \dots + \dots \\ \dots + \dots \end{pmatrix} \quad \dots(**)$$

- Untuk melihat kaitan matriks $(T_2 \circ T_1)$ dengan matriks M_1 dan M_2 , coba Anda lakukan perkalian $M_1 M_2$ dan $M_2 M_1$.

$$M_1 M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots + \dots \\ \dots + \dots \end{pmatrix} \quad \dots(***)$$

$$M_2 M_1 = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots + \dots \\ \dots + \dots \end{pmatrix} \quad \dots(***)$$

Analisis:

Perhatikan matriks komposisi transformasi $T_2 \circ T_1$ dalam (***) dan perkalian matriks transformasi $M_1 M_2$ dan $M_2 M_1$. Kemudian, nyatakan persamaan yang menghubungkan $T_2 \circ T_1$ dengan M_1 dan M_2 .

Jika T_1 adalah transformasi yang bersesuaian dengan matriks $M_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ dan T_2 adalah transformasi yang bersesuaian dengan matriks $M_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ maka komposisi

transformasi sebagai berikut.

- $T_1 \circ T_2$ bersesuaian dengan perkalian matriks

$$M_1 \cdot M_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

- $T_2 \circ T_1$ bersesuaian dengan perkalian matriks

$$M_2 \cdot M_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Pada subbab-subbab sebelumnya, Anda telah mempelajari matriks-matriks yang mewakili suatu transformasi untuk mengingatkan Anda, berikut adalah tabel matriks-matriks yang mewakili suatu transformasi.

No	Jenis Transformasi	Pemetaan	Matriks
1.	Translasi	$A(x, y) \rightarrow A'(x + a, y + b)$	$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$
2.	Refleksi		
	• terhadap sumbu- x	$A(x, y) \rightarrow A'(x, -y)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
	• terhadap sumbu- y	$A(x, y) \rightarrow A'(-x, y)$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
	• terhadap garis $y = x$	$A(x, y) \rightarrow A'(y, x)$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
	• terhadap garis $y = -x$	$A(x, y) \rightarrow A'(-x, -y)$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
3.	Rotasi		
	• $[O, 90^\circ]$	$A(x, y) \rightarrow A'(-y, x)$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
	• $[O, -90^\circ]$	$A(x, y) \rightarrow A'(y, -x)$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
	• $[O, 180^\circ]$	$A(x, y) \rightarrow A'(-x, -y)$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
4	Dilatasi		
	$[O, k]$	$A(x, y) \rightarrow A'(ky, ky)$	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

Pelajarilah Contoh Soal 5.26 berikut, agar Anda dapat mengkomposisikan transformasi dengan menggunakan matriks.

Contoh Soal 5.26

Jika M adalah pencerminan terhadap sumbu- x , R adalah rotasi oleh $(0, 90^\circ)$. Tentukan bayangan titik $A(6, -2)$ jika ditransformasikan oleh $M \circ R(A)$

Jawab:

Matriks M dan R yang bersesuaian adalah

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ dan } R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} M \circ R(A) &= M \cdot R \cdot (A) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Jadi, $A(6, -2) \xrightarrow{M \circ R} A'(2, -6)$.

Evaluasi Materi 5.5

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

- Diketahui T_1 adalah translasi terhadap $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$. dan T_2 adalah translasi terhadap $\begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}$. Tentukan bayangan titik $A(1, -8)$ oleh transformasi:

 - $T_1 \circ T_2(A)$
 - $T_2 \circ T_1(A)$
- Jika T_1 adalah refleksi terhadap garis $y = 4$, T_2 adalah rotasi terhadap $[O, 180^\circ]$, dan T_3 adalah dilatasi $[O, 2]$, tentukan bayangan titik $A(-2, -4)$ oleh transformasi:

 - $T_1 \circ T_2(A)$
 - $T_2 \circ T_3(A)$
- Diketahui M adalah pencerminan terhadap garis $y = x$ dan D adalah dilatasi $\left(O, \frac{1}{2}\right)$. Tentukan bayangan titik $P(7, -2)$ jika ditransformasikan oleh:

 - $M \circ D(A)$
 - $D \circ M(A)$

Ringkasan

■ Transformasi geometri adalah suatu aturan yang menghubungkan suatu titik ke titik lain pada bidang geometri. Transformasi geometri juga merupakan suatu aturan yang memindahkan suatu bangun geometri dari satu posisi ke posisi lain dengan tidak mengubah bentuk bangun tersebut.

■ Translasi (pergeseran) adalah suatu transformasi yang memindahkan suatu titik pada bangun geometri sepanjang garis lurus dengan jarak dan arah tertentu. Jika titik $A(x, y)$ ditranslasikan oleh translasi $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

maka diperoleh bayangan dari A , yaitu $A'(x + a, y + b)$.

Refleksi (pencerminan) adalah suatu transformasi yang memindahkan suatu titik pada bangun geometri dengan menggunakan sifat objek dan bayangannya pada cermin datar. Jika $A(x, y)$ direfleksikan terhadap sumbu- x , maka diperoleh bayangannya, yaitu $A'(x, -y)$.

Matriks refleksi terhadap sumbu- x adalah $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Jika $A(x, y)$ direfleksikan terhadap sumbu- y , maka bayangannya adalah $A'(-x, y)$.

Matriks refleksi terhadap sumbu- y adalah $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Jika $A(x, y)$ direfleksikan terhadap garis $y = x$, maka bayangan dari A adalah $A'(y, x)$.

Matriks refleksi terhadap garis $y = x$ adalah $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Jika $A(x, y)$ direfleksikan terhadap garis $y = -x$, maka bayangan dari A adalah $A'(-y, -x)$.

Matriks refleksi terhadap garis $y = -x$ adalah $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Jika $A(x, y)$ direfleksikan terhadap garis $x = a$, maka bayangan dari A adalah $A'(2a - x, y)$.

Jika $A(x, y)$ direfleksikan terhadap garis $y = b$ maka bayangan dari A adalah $A'(x, 2b - y)$.

■ Rotasi (perputaran) adalah suatu transformasi yang memindahkan suatu titik pada bangun geometri dengan memutar titik tersebut terhadap titik pusatnya.

Jika titik $A(x, y)$ dirotasikan terhadap titik pusat $O(0, 0)$ sejauh θ , maka bayangan dari titik A adalah $A'(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$.

Jika titik $A(x, y)$ dirotasikan terhadap titik pusat $P(a, b)$ sejauh θ , maka bayangan dari titik A adalah $A'(x', y')$, dengan

$$\begin{aligned} x' &= a + (x - a) \cos \theta - (y - b) \sin \theta \\ y' &= b + (x - a) \sin \theta + (y - b) \cos \theta \end{aligned}$$

■ Dilatasi (perkalian) adalah suatu transformasi yang memindahkan suatu titik pada bangun geometri yang ditentukan oleh titik pusat dilatasi dan faktor skala dilatasi.

Jika titik $A(x, y)$ didilatasikan terhadap titik pusat $O(0, 0)$ dengan faktor dilatasi k maka bayangan dari A adalah $A'(kx, ky)$.

Matriks dilatasi terhadap titik pusat $O(0, 0)$ adalah $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$.

Jika titik $A(x, y)$ didilatasikan terhadap titik pusat $P(a, b)$ dengan faktor dilatasi k maka bayangan dari A adalah

$$A'(a + k(x - a), b + k(y - b)).$$

Evaluasi Materi Bab 5

1. Pilihlah salah satu jawaban yang tepat. Tuliskan jawabannya di buku latihan Anda.

1. Bayangan dari titik $A(4, -5)$ yang ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ adalah

- a. $A'(-1, -6)$ d. $A'(7, 4)$
 b. $A'(1, -6)$ e. $A'(7, 6)$
 c. $A'(7, -6)$

2. Bayangan dari titik $B(-5, 2)$ yang ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ adalah

- a. $B'(9, 6)$ d. $B'(-1, -4)$
 b. $B'(1, -4)$ e. $B'(-9, -8)$
 c. $B'(-1, 4)$

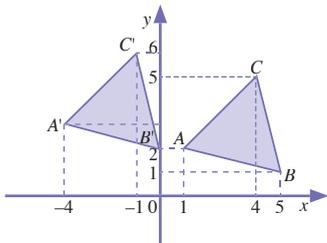
3. Translasi $T = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ memetakan titik $A(-6, 8)$ ke titik

- a. $A'(-11, 9)$ d. $A'(-1, 7)$
 b. $A'(11, 9)$ e. $A'(1, 7)$
 c. $A'(-11, 7)$

4. $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dan $A(5, 8) \xrightarrow{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} A'(3, 4)$. a dan b adalah

- a. 8 dan 12 d. -2 dan -4
 b. 2 dan 4 e. 11 dan 9
 c. -8 dan -12

5. Perhatikan gambar berikut



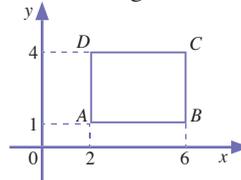
Translasi yang memetakan segitiga ABC ke segitiga $A'B'C'$ adalah

a. $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d. $T = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

b. $T = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ e. $T = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

c. $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

6. Perhatikan gambar berikut.



Jika titik A direfleksikan terhadap sumbu- x maka bayangan dari A adalah

- a. $A'(2, 0)$ d. $A'(1, -1)$
 b. $A'(0, 1)$ e. $A'(2, -1)$
 c. $A'(-1, 1)$

7. Jika titik B pada gambar no.6 direfleksikan terhadap sumbu- y maka bayangan dari B adalah

- a. $B'(2, 1)$ d. $B'(2, 4)$
 b. $B'(0, 1)$ e. $B'(-6, 4)$
 c. $B'(-6, 1)$

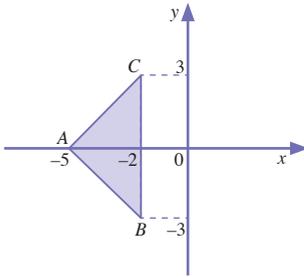
8. $A(-3, 4) \xrightarrow{y=x} A'(x', y')$ maka x' dan y' adalah

- a. -3 dan -4 d. 4 dan 3
 b. -4 dan -3 e. 3 dan 4
 c. 4 dan -3

9. $P(2, 1) \xrightarrow{y=-x} P'(x', y')$ maka (x', y') adalah

- a. $(1, 2)$ d. $(1, -2)$
 b. $(-1, -2)$ e. $(-2, -1)$
 c. $(-1, 2)$

10. Perhatikan gambar berikut



Jika titik C direfleksikan terhadap garis $y = 1$ maka bayangan dari C adalah

- a. $C'(-2, 0)$
- b. $C'(-2, -1)$
- c. $C'(-2, -2)$
- d. $C'(-2, -3)$
- e. $C'(-2, -4)$

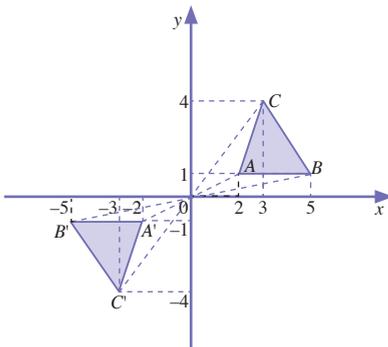
11. Jika B pada gambar nomor 10 direfleksikan pada garis $x = -4$, maka bayangan dari B adalah

- a. $B'(-6, -3)$
- b. $B'(-5, -3)$
- c. $B'(-4, -3)$
- d. $B'(-3, -3)$
- e. $B'(-2, -3)$

12. $P(-2, 3) \xrightarrow{[0,4]} P'(x', y')$. Maka x' dan y' adalah

- a. 2 dan -3
- b. 3 dan -2
- c. -4 dan 6
- d. 8 dan 12
- e. -8 dan 12

13. Perhatikan gambar berikut



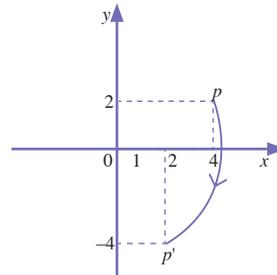
Segitiga $A'B'C'$ adalah bayangan dari segitiga ABC yang dilatasi terhadap titik pusat dilatasi $O(0, 0)$ dengan faktor dilatasi

- a. 2
- b. 1
- c. 0
- d. -1
- e. -2

14. Jika titik C' pada gambar no. 13 dirotasikan terhadap titik pusat $O(0, 0)$ sejauh 90° jika maka bayangan dari titik C' adalah ... ($\cos 90^\circ = 0$, $\sin 90^\circ = 1$)

- a. $C''(4, -3)$
- b. $C''(4, 3)$
- c. $C''(-4, 3)$
- d. $C''(-4, -3)$
- e. $C''(3, 4)$

15. Perhatikan gambar berikut

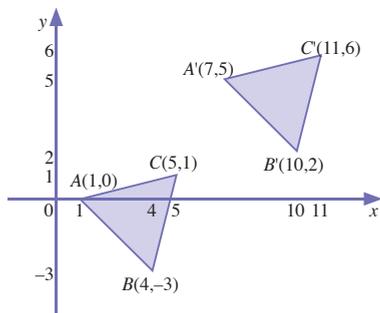


Berdasarkan gambar tersebut, pernyataan dibawah ini yang benar adalah

- a. p' adalah bayangan dari p oleh rotasi sejauh 90° berlawanan arah dengan arah jarum jam terhadap titik $O(0, 0)$.
- b. p' adalah bayangan dari p oleh rotasi sejauh 90° searah dengan arah jarum jam terhadap titik $O(0, 0)$.
- c. p' adalah bayangan dari p oleh rotasi terhadap titik pusat $O(0, 0)$ sejauh 45° .
- d. p' adalah bayangan dari p oleh rotasi terhadap titik pusat $O(0, 0)$ sejauh -45° .
- e. Tidak ada yang benar.

II. Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Tentukan tranlasi yang memetakan segitiga ABC ke segitiga $A'B'C'$ berikut.



2. Diketahui Koordinat titik-titik sudut segiempat $ABCD$ adalah $A(0, 2)$, $B(4, 2)$, $C(6, 5)$, dan $D(2, 5)$.
- Tentukan bayangan dari koordinat titik-titik sudut segiempat $ABCD$ jika ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.
 - Tentukan luas segiempat tersebut.
3. Tentukan bayangan dari titik $A(2, 5)$ jika direfleksikan terhadap:
- garis $x = 6$
 - garis $y = -2$
4. Diketahui koordinat-koordinat titik sudut segiempat $ABCD$ adalah $A(-5, -5)$, $B(-1, -5)$, $C(-1, -1)$, dan $D(-5, -1)$
- Tentukan bayangan dari titik-titik sudut segiempat $ABCD$ jika didilatasi terhadap titik pusat $O(0, 0)$ dengan faktor dilatasi -2 .
 - Hitunglah masing-masing luas segiempat $ABCD$ dan bayangannya.
5. Diketahui koordinat-koordinat titik sudut segitiga ABC adalah $A(3, 3)$, $B(7,3)$, dan $C(5,6)$. Tentukan bayangan dari titik-titik sudut ABC jika di rotasikan terhadap titik pusat $O(0, 0)$ sejauh 60° . ($\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$)

Pilihan Karir

Reporter adalah salah satu jenis jabatan kewartawanan yang bertugas melakukan peliputan berita (*news gathering*) di lapangan dan melaporkannya kepada publik, baik dalam bentuk tulisan untuk media cetak atau dalam situs berita di internet, atau secara lisan, jika laporannya disampaikan melalui media elektronik radio atau televisi. Hasil kerja reporter, baik merupakan naskah tulisan ataupun lisan, umumnya harus melalui penyuntingan redaktur atau produser berita sebelum bisa disiarkan kepada publik

Kerjakan di buku latihan Anda.

I. Pilihlah satu jawaban yang tepat.

- Barisan bilangan berikut yang bukan merupakan barisan aritmetika adalah
 - 0, 1, 2, 3, 4, ...
 - 4, -2, 0, 2, 4, ...
 - 10, 15, 20, 25, 30, ...
 - 1, 2, 4, 8, 16, ...
 - 30, 27, 24, 21, 18, ...
- Suku ke-10 pada barisan bilangan 3, 5, 7, 9, 11, ... adalah
 - 17
 - 19
 - 20
 - 21
 - 22
- Pada suatu barisan aritmetika, diketahui suku pertamanya adalah 5 dan bedanya adalah 3, Suku ketujuh dari barisan tersebut adalah
 - 20
 - 23
 - 26
 - 29
 - 32
- Diketahui $-3, 2, 3, 12, \dots$
Suku ke- n pada barisan tersebut adalah U_n maka n adalah
 - 10
 - 11
 - 12
 - 13
 - 14
- Pada suatu deret aritmetika, diketahui suku pertamanya 12 dan bedanya -2 . Jumlah 6 suku pertamanya adalah
 - 10
 - 9
 - 8
 - 7
 - 6
- Diketahui suatu deret: $(-7) + (-3) + 1 + 5 + \dots$
Nilai dari $S_{12} = \dots$
 - 100
 - 150
 - 180
 - 210
 - 300
- Pada suatu barisan aritmetika, diketahui suku ketiganya adalah 7 dan suku keenamnya adalah 19. Suku keempat dari barisan tersebut adalah
 - 50
 - 51
 - 52
 - 53
 - 54
- Pada suatu deret aritmetika, diketahui suku keduanya adalah 9 dan suku keempatnya adalah 3. Jumlah sepuluh suku pertama pada barisan tersebut adalah
 - 10
 - 5
 - 0
 - 10
 - 15
- Jumlah 4 suku pertama suatu barisan aritmetika adalah 32 dan jumlah 6 suku pertamanya adalah 72. Jumlah 11 suku pertamanya adalah
 - 142
 - 200
 - 222
 - 242
 - 310
- Pada barisan bilangan berikut yang merupakan barisan geometri adalah
 - $-3, -2, -1, 0, 1, \dots$
 - $2, 2\frac{1}{2}, 3, 3\frac{1}{2}, 4, \dots$
 - 0, 5, 10, 15, 20, ...
 - 1, 3, 9, 27, 81, ...
 - $\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots$
- Suku pertama dari suatu barisan geometri adalah 3 dan rasionya adalah 2. Suku kelima-nya adalah
 - 96
 - 48
 - 24
 - 12
 - 10

12. Diketahui suatu barisan: 16, 8, 4, 2, ...
Suku ke-8 dari barisan tersebut adalah

- a. $\frac{1}{2}$
b. $\frac{1}{4}$
c. $\frac{1}{8}$
d. $\frac{1}{16}$
e. $\frac{1}{32}$

13. Pada suatu deret geometri diketahui $U_1 = 3$ dan $U_5 = 48$. Nilai dari U_7 adalah

- a. 192 d. 186
b. 190 e. 188
c. 184

14. Diketahui suku pertama suatu barisan geometri adalah 6 dan rasionya adalah 2. Jumlah 6 suku pertama barisan tersebut adalah

- a. 358 d. 388
b. 368 e. 398
c. 378

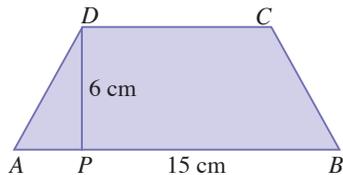
15. Pada suatu deret geometri, diketahui suku keduanya sama dengan 8 dan suku keempatnya sama dengan 32. Jumlah 8 suku pertama deret tersebut adalah

- a. 1000 d. 2048
b. 2050 e. 1020
c. 522

16. Ciri-ciri sebuah bangun datar adalah mempunyai empat titik sudut, keempat sisinya sama panjang, diagonalnya saling tegak lurus, dua pasang sisinya sejajar, sudutnya tidak ada yang siku-siku. Bangun tersebut adalah

- a. persegi
b. persegipanjang
c. segitiga
d. belahketupat
e. trapesium

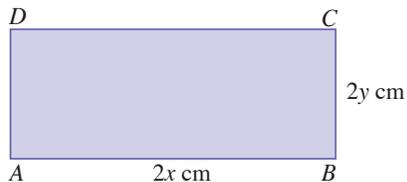
17. Perhatikan gambar berikut.



Luas bangun $ABCD$ adalah ... cm^2 .

- a. 80 d. 68
b. 72 e. 54
c. 45

18. Perhatikan gambar berikut.



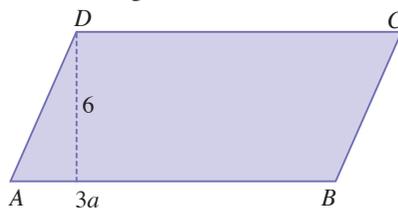
Pada persegipanjang $ABCD$ tersebut, mempunyai keliling 28 cm dan luas 48 cm^2 . Nilai x dan y adalah ... cm

- a. 4 dan 4 d. 4 dan 3
b. 3 dan 3 e. 2 dan 3
c. 3 dan 4

19. Diketahui luas layang-layang adalah 24 cm^2 . Panjang salah satu diagonalnya adalah 6 cm. Panjang diagonal yang lain adalah

- a. 6 cm d. 9
b. 7 cm e. 10 cm
c. 8 cm

20. Perhatikan gambar berikut.



Luas bangun tersebut adalah 27 satuan luas. Nilai a adalah

- a. 6 d. 3
b. 5 e. 2
c. 4

21. Diketahui titik $A(4, -5)$ ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bayangan dari A adalah
- $A'(-4, -3)$
 - $A'(-4, 3)$
 - $A'(4, 3)$
 - $A'(12, 7)$
 - $A'(-12, 7)$
22. Titik $P(-5, -2)$ direfleksikan terhadap sumbu- y . koordinat bayangannya adalah
- $P'(-5, 2)$
 - $P'(5, -2)$
 - $P'(5, 2)$
 - $P'(-5, -4)$
 - $P'(-5, 4)$
23. Bayangan dari titik $A(-6, 5)$ yang ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ adalah $A'(2, 4)$. Nilai a dan b masing-masing adalah

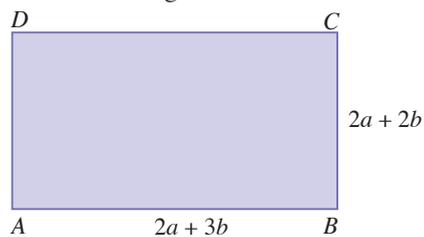
- 4 dan 1
- 4 dan -1
- 8 dan 1
- 8 dan -1
- 8 dan -1

24. Bayangan dari suatu titik yang direfleksikan terhadap garis $y = -x$ adalah $(-3, 4)$. Titik yang direfleksikan tersebut adalah
- $(3, 4)$
 - $(-3, -4)$
 - $(3, -4)$
 - $(4, -3)$
 - $(-4, 3)$
25. Titik $A(2, 3)$ dilatasi terhadap titik pusat $O(0, 0)$ dengan faktor dilatasi -3 . Bayangan dari A adalah
- $A'(6, 9)$
 - $A'(-6, -9)$
 - $A'(9, 6)$
 - $A'(-9, -6)$
 - $A'(9, -6)$

II. Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Diketahui suatu barisan sebagai berikut:
 $-4, 1, 6, 11, 16, \dots$
 Tentukan:
- U_{10}
 - U_{15}
 - U_{25}
 - U_{31}
2. Pada suatu deret aritmetika, diketahui suku keempatnya adalah 11 dan suku keenamnya adalah 5. Tentukan:
- S_6
 - S_{10}
 - S_{12}
 - S_{15}
3. Jumlah penduduk sebuah kota setiap sepuluh tahun menjadi dua kali lipat. Menurut perhitungan, pada tahun 2010 nanti akan mencapai 3,2 juta orang. Tentukan jumlah penduduk kota tersebut pada tahun 1960.

4. Perhatikanlah gambar berikut.



Diketahui persegi panjang ABCD tersebut mempunyai luas 120 cm^2 dan keliling 44 m. Tentukan nilai a dan b .

5. Diketahui koordinat-koordinat titik sudut segitiga ABC adalah $A(-5, -3)$, $B(-2, 0)$, dan $C(-4, 4)$. Jika titik-titik tersebut dilatasi terhadap titik pusat $O(0, 0)$ dengan faktor dilatasi -3 , tentukan koordinat titik-titik sudut bayangan segitiga itu.

Tugas Observasi Semester 2

Materi Pokok: Barisan dan Deret Bilangan

Kunjungi sebuah bank tersebut di Kota Anda. Kumpulkanlah data-data yang diperlukan berikut.

1. Besar bunga deposito per tahun :%
2. Besar deposito minimum : Rp.....
3. Dengan deposito minimum, hitunglah besar deposito setiap bulannya selama 2 tahun, kemudian susunlah dalam tabel berikut.

Bulan Ke-	Besar Deposito (Rp)
1.
2.
...
...
24

4. Perhatikan, apakah besar deposito setiap bulannya membentuk suatu deret? Jika ya, tentukan deret yang terbentuk.
5. Dari deret yang terbentuk, tentukan suku awal dan rasio deret tersebut.
6. Tentukan besar deposito itu setelah 3,5 tahun.

Kerjakan di buku latihan Anda.

I. Pilihlah satu jawaban yang tepat.

1. Ingkaran dari "Semua atlet berbadan kekar" adalah
 - a. Semua atlet tidak berbadan besar
 - b. Ada atlet yang berbadan kekar
 - c. Tidak semua atlet kurus
 - d. Ada atlet yang tidak berbadan kekar
 - e. Semua atlet kurus
2. Jika diketahui p benar dan q salah, pernyataan berikut yang bernilai salah adalah
 - a. $p \vee \sim q$
 - b. $p \wedge \sim q$
 - c. $\sim(p \wedge q)$
 - d. $p \vee \sim q$
 - e. $(p \wedge q) \vee \sim p$
3. Diketahui p salah, q benar, dan r salah. Pernyataan berikut yang bernilai salah adalah
 - a. $p \Rightarrow r$
 - b. $(\sim p \wedge q) \Rightarrow \sim r$
 - c. $p \Rightarrow (q \vee r)$
 - d. $(\sim p \wedge q) \Rightarrow \sim q$
 - e. $(r \vee p) \Rightarrow \sim q$
4. Pernyataan "Jika rajin berolah raga maka badan sehat" ekuivalen dengan
 - a. Jika badan tidak sehat maka tidak rajin berolah raga
 - b. Jika tidak rajin berolahraga maka badan tidak sehat
 - c. Jika badan sehat maka rajin berolah-raga
 - d. Rajin berolahraga atau badan sehat
 - e. Tidak rajin berolahraga dan badan sehat
5. Argumen-argumen berikut sah, *kecuali*

<ol style="list-style-type: none"> a. $\frac{p \Rightarrow q}{\therefore q}$ b. $\frac{p \Rightarrow q}{\therefore \sim q}$ c. $\frac{p \Rightarrow \sim q}{\therefore p \Rightarrow r}$ 	<ol style="list-style-type: none"> d. $\frac{p \Rightarrow \sim q}{\therefore \sim q}$ e. $\frac{\sim q \Rightarrow \sim p}{\therefore q}$
--	--
6. Argumen berikut yang memenuhi modus tollens adalah

<ol style="list-style-type: none"> a. $\frac{p \Rightarrow q}{\sim p \Rightarrow r}$ b. $\frac{p \Rightarrow q}{\therefore q}$ c. $\frac{p \Rightarrow q}{\sim p}$ 	<ol style="list-style-type: none"> d. $\frac{\sim p \Rightarrow q}{\sim p \Rightarrow r}$ e. $\frac{\sim p \Rightarrow q}{\therefore \sim p}$
--	---
7. Fungsi-fungsi berikut merupakan fungsi linear, *kecuali*
 - a. $f(x) = 5x - 10$
 - b. $f(x) = \frac{x-3}{2}$
 - c. $f(x) = x^2$
 - d. $f(x) = f(x) = 2 \log x + 3$
 - e. $2f(x) = 4x + 7$
8. Jika $f(x) = 6x + 7$ maka $f(-3) = \dots$

a. 21	d. 24
b. 22	e. 25
c. 23	
9. Diketahui suatu fungsi $f(x) = a + b$. Jika $f(0) = 4$ dan $f(1) = 6$, maka fungsi tersebut adalah
 - a. $f(x) = 2x + 2$
 - b. $f(x) = x + 4$

- c. $f(x) = 2x + 4$
 d. $f(x) = 3x + 1$
 e. $f(x) = 4x + 2$
10. Diketahui suatu fungsi $f(x) = 4x - b$. Jika $f(2) = 1$ maka nilai b adalah
 a. 7 d. 10
 b. 8 e. 11
 c. 9
11. Diketahui suatu fungsi $f(x) = ax - 3$. Jika $f(2) = 0$ maka nilai a adalah
 a. $\frac{1}{3}$ d. $\frac{3}{2}$
 b. $\frac{2}{3}$ e. $-\frac{2}{3}$
 c. $\frac{1}{2}$
12. Diketahui $f(x) = x^2 + 5$, Nilai $f(2) = \dots$
 a. 7 d. 10
 b. 8 e. 11
 c. 9
13. Grafik fungsi $f(x) = x^2 - 5x$ memotong sumbu- x di titik
 a. $(0, 0)$ dan $(5, 0)$
 b. $(0, 0)$ dan $(-5, 0)$
 c. $(0, 0)$ dan $(0, 5)$
 d. $(0, 0)$ dan $(0, -5)$
 e. $(5, 0)$ dan $(0, 5)$
14. Grafik fungsi $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ memotong sumbu- y di titik
 a. $(1, 0)$ d. $(0, 1)$
 b. $(-1, 0)$ e. $(1, 1)$
 c. $(0, -1)$
15. Sumbu simetri dari grafik $f(x) = x^2 - 3x + 2$ adalah
 a. $\frac{3}{2}$ d. $\frac{9}{2}$
 b. $\frac{5}{2}$ e. $\frac{11}{2}$
 c. $\frac{7}{2}$
16. Nilai maksimum untuk fungsi $f(x) = 3 - 2x - x^2$ adalah
 a. 1
 b. 2
 c. 3
 d. 4
 e. 5
17. Suku ke-8 dari barisan $-3, -1, 1, 3, 5, \dots$ adalah
 a. 10
 b. 11
 c. 12
 d. 13
 e. 14
18. Diketahui pada suatu barisan aritmetika, suku pertamanya adalah 6 dan bedanya adalah 4 Suku kesebelas pada barisan tersebut adalah
 a. 42 d. 45
 b. 43 e. 46
 c. 44
19. Pada suatu barisan aritmetika, diketahui suku ketiganya adalah 13 dan suku kelimanya adalah 21 maka suku pertama dan beda dari barisan tersebut adalah
 a. 5 dan 4 d. 4 dan 4
 b. 5 dan 5 e. 4 dan 3
 c. 4 dan 5
20. Pada suatu deret aritmetika, diketahui suku pertamanya 12 dan bedanya adalah 3. Jumlah delapan suku pertamanya adalah
 a. 120 d. 144
 b. 136 e. 148
 c. 140
21. Suatu deret aritmetika mempunyai suku pertama 5 dan beda 3. Jika jumlah n suku pertamanya adalah 549 maka n adalah
 a. 17 d. 20
 b. 18 e. 21
 c. 19

22. Suku pertama suatu barisan geometri adalah 2. Beda barisan tersebut adalah 2. Suku kelima dari barisan tersebut adalah

- a. 8 d. 64
b. 16 e. 128
c. 32

23. Diketahui suatu deret geometri 8, 4, 2, 1, ... Suku keenam dari barisan tersebut adalah

- a. $\frac{1}{2}$ d. $\frac{1}{16}$
b. $\frac{1}{4}$ e. $\frac{1}{32}$
c. $\frac{1}{8}$

24. Pada suku barisan geometri, suku ketiganya adalah $\frac{5}{9}$ dan suku keduanya $\frac{5}{9}$. Rasio barisan tersebut adalah

- a. 3 d. $\frac{1}{2}$
b. 2 e. $\frac{1}{3}$
c. 1

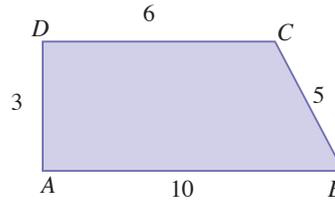
25. Suatu deret geometri mempunyai suku pertama $\frac{1}{2}$ dan rasio 2. Jumlah enam suku pertamanya adalah

- a. 31 d. $32\frac{1}{2}$
b. $31\frac{1}{2}$ e. 33
c. 32

26. Diketahui suatu deret 128, 64, 32, 16, 8, ... Jumlah sepuluh suku pertamanya adalah

- a. 240 d. 250
b. 245 e. 255
c. 246

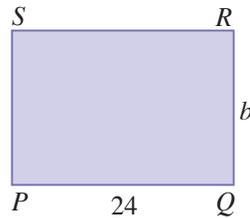
27. Perhatikan gambar bangun berikut.



Luas bangun $ABCD$ tersebut adalah

- a. 50 d. 20
b. 30 e. 18
c. 24

28. Perhatikan gambar berikut



Jika keliling $PQRS$ tersebut adalah 20 dan luasnya 24 maka nilai a dan b adalah

- a. 3 dan 3 d. 4 dan 3
b. 3 dan 4 e. 2 dan 4
c. 4 dan 4

29. Titik $A(2, 5)$ ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bayangannya titik A adalah

- a. $A'(7, 7)$ d. $A'(5, 5)$
b. $A'(3, 3)$ e. $A'(2, 2)$
c. $A'(5, 2)$

30. Bayangan dari titik $P(1, 3)$ yang diranslasikan oleh T adalah $(-3, 8)$. Translasi T adalah

- a. $T = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ d. $T = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$
b. $T = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ e. $T = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$
c. $T = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix}$

II. Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Diberikan pernyataan:
"Jika terjadi pemanasan global maka suhu udara akan naik."
Ternyata suhu udara tidak naik. Tentukan kesimpulannya sehingga diperoleh argumen yang sah.
2. Pak Bayu mengangsur sebuah televisi seharga Rp880.000,00. Pak Bayu mengangsur berturut-turut setiap bulan sebesar Rp25.000,00; Rp27.000,00; Rp29.000,00; dan seterusnya. Dalam berapa bulan angsuran Pak Bayu akan lunas?
3. Diketahui fungsi $f(x) = 8x - 3$. Tentukan:
 - a. $f(2)$
 - b. $f(3)$
 - c. $f(5)$
 - d. $f(10)$
4. Diketahui fungsi $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$. Tentukan:
 - a. sumbu simetrinya
 - b. titik minimumnya
 - c. titik potong terhadap sumbu- x
 - d. titik potong terhadap sumbu- y
5. Diketahui suatu titik $A(2, 5)$. Tentukan bayangan titik A jika:
 - a. ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$
 - b. direfleksikan terhadap sumbu- y
 - c. direfleksikan terhadap sumbu- x
 - d. direfleksikan terhadap $x = 3$

Kunci Jawaban

Bab 1

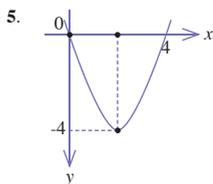
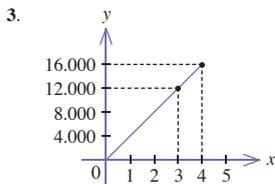
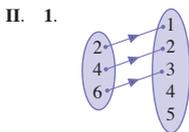
Logika Matematika

- I. 1. c 9. a
 3. d 11. a
 5. e 13. b
 7. a 15. c
- II. 1. a. Benar
 b. Benar
 c. Benar
 3. Kucing bukan ikan
 5. Jika 6 bilangan komposit maka 6 bilangan rasional

Bab 2

Relasi dan Fungsi

- I. 1. d 11. b
 3. b 13. a
 5. c 15. a
 7. b 17. b
 9. d 19. c



Evaluasi Semester 1

- I. 1. d 9. b 19. a
 3. c 11. a 21. b
 5. d 13. e 23. d
 7. c 15. b 25. a
- II. 1. • Invers: jika seseorang tidak mau berusaha maka ia tidak akan berhasil.
 • Konvers: jika seseorang berhasil maka ia mau berusaha keras.
 • Kontraposisi: jika seseorang tidak berhasil maka ia tidak berusaha keras.
3. a. -9
 b. 33

Bab 3

Barisan dan Deret Bilangan

- I. 1. c 9. c
 3. a 11. d
 5. d 13. d
 7. a 15. b
- II. 1. Rp1.200.000,00
 3. Rp1.017.000,00
 5. $r = \frac{4}{5}$

Bab 4

Geometri Dimesi Dua

- I. 1. e 9. a
 3. c 11. e
 5. b 13. d
 7. a 15. a
- II. 1. a. 90°
 3. a. 630°
 5. a. 0,8 m

Bab 5

Transformasi Geometri

- I. 1. b 9. b
 3. a 11. a
 5. e 13. d
 7. c 15. a
- II. 1. $T \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$
 3. a. $A'(10,5)$
 5. $A' \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{3}{2} \right)$
 $C' \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2}\sqrt{2}, 3\sqrt{2} - 3 \right)$
 $B' \left(\frac{7}{2} - \frac{7}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{3}{2} \right)$

Evaluasi Semester 2

- I. 1. d 9. d 17. b
 3. b 11. b 19. c
 5. c 13. a
 7. b 15. e
- II. 1. a. 41
 b. 146
 3. 100.000 jiwa
 5. $A'(15,9)$
 $B'(6,0)$
 $C'(12,-12)$

Evaluasi Akhir Tahun

- I. 1. d 9. c 17. b 25. b
 3. d 11. d 19. a 27. a
 5. d 13. a 21. b 29. d
 7. d 15. a 23. b
- II. 1. a. Tidak terjadi pemanasan global
 3. a. 13
 c. 37
 5. a. $A'(-4,6)$
 c. $A'(2,-5)$

Daftar Istilah

A

Argumen: rangkaian premis-premis dan kesimpulan.

B

Bangun datar: bangun yang dibuat pada permukaan datar.

Barisan aritmetika: barisan bilangan yang memiliki beda atau selisih yang tetap.

Bidang: permukaan yang rata dan tentu batasnya.

Biimplikasi: pernyataan majemuk yang menggunakan kata hubung *jika dan hanya jika*.

Bilangan ganjil: bilangan bulat yang bila dibagi dua selalu bersisa.

Bilangan genap: bilangan bulat yang habis dibagi dua.

Belahketupat: jajargenjang yang semua sisinya sama panjang.

Busur: garis lengkung yang dapat membentuk lingkaran.

D

Disjungsi: pernyataan yang dibentuk dari dua pernyataan p dan q yang dirangkai dengan menggunakan kata hubung “atau”.

Domain: daerah pusat

Diagram: gambaran untuk memperlihatkan atau menerangkan sesuatu.

Derajat: satuan ukuran sudut

Detik: ukuran satuan waktu

Diagonal: garis yang ditarik dari titik sudut ke titik sudut yang tidak bersisian.

Diameter: garis tengah lingkaran

Dilatasi: transformasi yang mengubah ukuran tapi tidak mengubah bentuk.

E

Ekuivalen: mempunyai nilai yang sama, seharga, atau sebanding.

F

Fungsi: besaran yang berhubungan, jika besaran yang satu berubah, besaran yang lain juga berubah.

G

Garis: deretan titik-titik yang saling berhubungan.

Gradien: koefisien arah suatu garis lurus.

H

Himpunan: kumpulan benda-benda baik yang jelas maupun yang tidak jelas.

I

Inkaran: pernyataan yang nilai kebenarannya merupakan lawan dari pernyataan semula.

Invers: kebalikan

Implikasi: pernyataan yang dibentuk dari dua pernyataan p dan q yang dirangkai dengan menggunakan kata hubung *jika ... maka ...*.

J

Jarak: ruang sela antara dua benda atau tempat.

Jajargenjang: bangun datar bersegi empat, sisi-sisinya yang berhadapan sejajar dan sama panjang.

Jari-jari: jarak titik-titik pada lingkaran dengan pusat lingkaran.

Juring: daerah dalam lingkaran yang dibatasi oleh dua jari-jari dan busur yang diapit oleh kedua jari-jari tersebut.

K

Kalimat terbuka: kalimat yang belum dapat ditentukan nilai kebenarannya.

Keliling: garis yang membatasi suatu bidang.

Kodomain: daerah kawan

Konjungsi: pernyataan yang dibentuk dari dua pernyataan p dan q yang dirangkai kata hubung "dan".

Konklusi: simpulan pendapat

Kuantor: pernyataan yang menggunakan kata *semua* atau *beberapa*.

L

Layang-layang: segiempat yang sepasang sisi-sisinya yang berdekatan sama panjang.

Linear: berbentuk garis lurus.

Lingkaran: lengkung tertutup yang merupakan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap titik tertentu.

Logika: pengetahuan tentang kaidah berpikir.

Luas: ukuran panjang lebarnya bidang.

M

Maksimum: paling banyak (besar).

Menit: satuan ukuran waktu yang lamanya $\frac{1}{60}$ jam.

Minimum: paling sedikit (kecil).

Model: contoh sederhana

Modus ponens: penarikan simpulan berdasarkan premis $p \Rightarrow q$ dan p yang menghasilkan q .

Modus tollens: penarikan simpulan berdasarkan premis $p \Rightarrow q$ dan p yang menghasilkan $\sim q$.

N

Negasi: Lawan atau pernyataan penyangkalan, peniadaan.

P

Parabola: garis lengkung datar yang terbentuk jika suatu bidang memotong kerucut sejajar dengan garis titik sudut puncak dengan salah satu titik pada bidang alas.

Persegi: bangun datar berbentuk segiempat yang keempat sisinya sama panjang dan keempat sudutnya siku-siku.

Persegipanjang : bangun datar yang memiliki empat buah sisi dengan sisi yang berhadapan sama panjang dan sejajar dan keempat sudutnya siku-siku.

Premis: kalimat atau proposisi yang dijadikan dasar penarikan kesimpulan dalam logika.

Probabilitas: kemungkinan tingkat kejadian suatu peristiwa.

R

Radian: satuan ukuran sudut dalam lingkaran.

Range: daerah hasil

Refleksi: menukar kolom menjadi baris dan baris menjadi kolom.

Relasi: hubungan

Rotasi: suatu transformasi yang memindahkan titik-titik dengan cara memutar titik-titik tersebut sejauh θ° terhadap suatu titik pusat rotasi.

S

Segitiga: bangun datar yang dibatasi oleh tiga buah sisi dan membentuk sudut.

Silogisme: bentuk, cara berpikir atau menarik simpulan yang terdiri atas premis umum, premis khusus, dan simpulan.

Simetri: seimbang, selaras, membagi 2 bagian menjadi sama besar.

Sketsa: gambar, rancangan, denah, bagan.

Suku: bilangan yang menjadi bagian dari perbandingan atau jajaran bilangan.

Sumbu: garis mendatar yang berpotongan tegak lurus dengan garis lain pada suatu bidang.

T

Tali busur: garis di dalam lingkaran yang menghubungkan dua titik pada lingkaran.

Tembereng: daerah dalam lingkaran yang dibatasi oleh sebuah tali busur dan busur dihadapan tali busur tersebut.

Teori: pendapat yang didasarkan pada penelitian dan penemuan, didukung oleh data dan argumen-tasi.

Transformasi : suatu cara untuk memindahkan/ memetakan suatu titik atau bangun pada sebuah bidang.

Translasi: suatu transformasi yang memindahkan tiap titik pada bidang dengan jarak dan arah tertentu.

V

Variabel: peubah, diberikan persamaan $x + 2 = 5$, x dalam persamaan ini disebut variabel.

Indeks

A

Aktiva

lancar 134

tetap 156, 134, 135, 136, 137, 141, 143,
146, 147, 151, 153, 155

Angsuran 155, 101, 116, 117, 119, 120, 122,
124, 126, 127, 128, 129, 131, 132, 141,
142, 143, 146, 147, 148, 151, 153, 155

Aturan perkalian 6

B

bangun datar 105, 115, 116, 117, 119, 121, 124,
134, 120, 139, 160, 139, 188, 196, 197

barisan aritmetika 81, 87, 90, 88, 90, 92, 102,
93, 88, 101, 89, 187, 192

belahketupat 126, 127, 128, 104, 129, 138,
134, 128, 115, 127, 129, 126, 154, 188

bidang 55, 56, 60, 62, 66, 68, 70, 75, 128, 129,
132, 129, 105, 119, 138, 142, 144, 139,
140, 144, 146, 147, 149, 157, 148, 149,
154, 167, 139, 146, 166, 183, 197, 198

biimplikasi 2, 8, 11, 19, 20, 21, 25, 20

bilangan ganjil 7, 39, 41, 42

bilangan genap 17, 19, 29, 16, 39, 42

busur 196, 198

D

derajat 108, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 114,
115, 137

detik 67, 110, 111, 135, 137, 112

diagonal 116, 128, 130, 129, 136, 138, 134,
131, 135, 115, 116, 129, 130, 158, 188

diagram 11, 28, 29, 15, 24, 44, 47, 48, 12, 13,
15, 16, 18, 147, 148, 152

Diameter 196

dilatasi 141, 1, 2, 8, 11, 12, 52, 54, 55, 71

disjungsi 13, 51, 52

domain 51

E

ekuivalen 23, 26, 28, 29, 10, 34, 41, 42, 191

F

fungsi 47, 50, 51, 45, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 56,
57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 66, 67, 65,
66, 67, 68, 69, 70, 73, 74, 75, 76, 54, 57,
59, 71, 50, 51, 62, 63, 66, 68, 69, 56, 55,
61, 78, 79, 80, 191, 192, 194

G

garis 7, 55, 56, 58, 59, 71, 66, 56, 55, 80, 93,
107, 106, 109, 116, 122, 125, 127, 132,
124, 137, 125, 134, 109, 116, 132, 142,
145, 146, 147, 148, 152, 156, 157, 158,
159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 157,
159, 160, 161, 162, 163, 165, 181, 185,
186, 139, 140, 142, 166, 182, 157, 158,
159, 156, 162, 163, 164, 166, 180, 183,
189, 196, 197, 198

H

Himpunan 5, 14, 10, 11, 13, 21, 15, 18, 47, 49,
77, 104, 196

I

implikasi 1, 8, 17, 18, 19, 22, 21, 26, 25, 26,
28, 18, 24, 25, 27, 30, 40, 11, 79

Ingkaran 5, 15, 16, 22, 23, 28, 2, 29, 40, 41, 6,
191, 196, 201

invers 1, 26, 25, 26, 27, 25, 79

J

Jajargenjang 106, 124, 134, 125, 124, 140, 196

jarak 45, 56, 57, 105, 136, 146, 147, 152, 156,
159, 173, 174, 173, 139, 183, 196, 198

jari-jari 113, 134, 109, 196

Juring 196

K

kalimat terbuka 1, 4, 5, 7, 41, 3

keliling 111, 105, 116, 118, 119, 121, 122, 123,
124, 127, 130, 132, 117, 118, 119, 123,

125, 126, 129, 136, 137, 138, 133, 134,
120, 123, 128, 130, 131, 132, 146, 188,
189, 193

kodomain 51, 52, 54, 55, 71, 51

konjungsi 9, 1, 2, 8, 9

konklusi 35

kuantor 28

L

Layang-layang 106, 129, 135, 129, 130, 140,
197

linear 3, 45, 54, 55, 56, 191

lingkaran 111, 76, 113, 134, 109, 111, 113, 134,
109, 198, 196, 197, 198

luas 68, 69, 70, 113, 105, 118, 122, 123, 125,
128, 129, 130, 132, 117, 118, 119, 123,
124, 125, 126, 129, 136, 137, 138, 133,
134, 120, 123, 126, 128, 130, 131, 132,
140, 157, 158, 161, 175, 186, 146, 166,
158, 188, 189

M

maksimum 67, 46, 63, 64, 65, 66, 69, 70, 71,
76

menit 111, 112, 115, 135, 137, 115

minimum 1, 35, 37

N

Negasi 40, 5, 77, 197

P

parabola 63, 67, 71, 61

persegi 43, 84, 85, 105, 115, 116, 118, 119,
127, 119, 136, 137, 133, 120, 115, 118,
119, 188

persegi panjang 75, 105, 115, 116, 117, 118,
124, 117, 118, 136, 133, 134, 115, 116,
117, 188, 189

premis 196, 197

Probabilitas 197

R

radian 134, 107, 110, 113, 114, 115, 134

range 51, 71, 51

refleksi 183, 139, 141, 146, 147, 148, 150, 151,
153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160,
161, 162, 163, 165, 168, 170, 172, 179,
182, 183

Relasi 45, 47, 48, 49, 50, 195, 197

Rotasi 139, 166, 167, 169, 170, 166, 181, 140,
183, 197

S

segitiga 63, 64, 116, 192

silogisme 24, 27, 83

Sketsa 197

T

Tali busur 198

Tembereng 198

teori 62

Transformasi 195, 198

V

variabel 4, 7, 198

Daftar Simbol

\sim	: Ingkaran (negasi)
\wedge	: Konjungsi (dan)
\vee	: Disjungsi (atau)
\Rightarrow	: Implikasi (jika ... maka ...)
\Leftrightarrow	: Biimplikasi (jika hanya jika)
\equiv	: Ekuivalen (setara)
\forall	: Untuk setiap
\in	: Anggota himpunan
\exists	: Ada (beberapa/sekurang-kurangnya satu)
$<$: Lebih kecil dari
$>$: Lebih besar dari
\leq	: Lebih kecil atau sama dengan
\geq	: Lebih besar atau sama dengan
$=$: Sama dengan
\neq	: Tidak sama dengan
∞	: Tak hingga
\sphericalangle	: Sudut
$^\circ$: Derajat
π	: Phi
'	: Menit
"	: Detik
θ	: Besar sudut Teta
\perp	: Tegak lurus
//	: Sejajar

Daftar Pustaka

- Barnett, Raymond A, et.al. 2008. *Finite Mathematics for Business, Economics, Life Sciences, and Social Sciences Edisi Ke-II*. New Jersey: Pearson Prentice Hall.
- Bartle, Robert G. dan Sherbert, Donald R. 1994. *Introduction to Real Analysis, Third Edition*. New York: John Wiley & Sons, inc.
- Badan Standar Nasional Pendidikan. 2006. *Standar Kompetensi dan Kompetensi Dasar 2006 Mata Pelajaran Matematika Sekolah Menengah Kejuruan/Madrasah Aliyah Kejuruan Kelompok Sosial, Administrasi Perkantoran, dan Akuntansi*. Jakarta: Departemen Pendidikan Nasional.
- Budnick, Frank. S. 1993. *Applied Mathematics for Bussines, Economics, and the Social Scences*. New York: Mc. Graw-Hill. Inc.
- Fathani, A. Halim. 2007. *Ensiklopedi Matematika*. Jakarta: Ar-Ruzz Media.
- Frensidy, Budi. 2007. *Matematika Keuangan*. Jakarta: Salemba Empat.
- Koesmantono, dkk. 1983. *Matematika Pendahuluan*. Bandung: ITB.
- Negoro, S.T, dkk. 1982. *Ensiklopedia Matematika*. Jakarta: Ghalia Indonesia.
- Purcell, Edwin J. dan Varberg, Dale. 1996. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid I, Edisi Kelima*. Jakarta: Erlangga.
- Rawuh R, dkk. 1962. *Ilmu Ukur Analitis Jilid 1 dan 2*. Bandung: Terate.
- Simangunsong, Wilson. 1994. *Matematika Dasar Ujian Masuk Perguruan Tinggi*. Jakarta: Erlangga.
- Sudjana. 2002. *Metode Statistika, Edisi Keenam*. Bandung: Tarsito.
- Sunyoto, Danang dan Henry Sarnowo. 2007. *Matematika Ekonomi dan Keuangan*. Jakarta: Media Pressindo.
- Verberg, Dale dan Edwin J.Purcell. 2004. *Kalkulus Jilid 1 Edisi Ke-8*. Jakarta: Erlangga
- Wahyudin, dkk. 2002. *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia*. Jakarta: Tarity Samudra Berlian.
- Wahyudin, dkk. 2003. *Ensiklopedi Matematika (Topik-Topik Pengayaan)*. Jakarta: Tarity Samudra Berlian.
- Wallace, Edward. C dan Stephen F. 1992. *West. Roads to Geometry*. New Jersey: Prentice-Hall.
- Walpole, Ronald E. dan Myers, Raymond H. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan, Edisi Keempat*. Bandung: ITB.

ISBN 979-462-941-3

Buku ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP) dan telah dinyatakan layak sebagai buku teks pelajaran berdasarkan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 34 Tahun 2008 tanggal 10 Juli tentang Penetapan Buku Teks Pelajaran yang Memenuhi Syarat Kelayakan untuk Digunakan dalam Proses Pembelajaran

HET(Harga Eceran Tertinggi) Rp. 13.639,-

